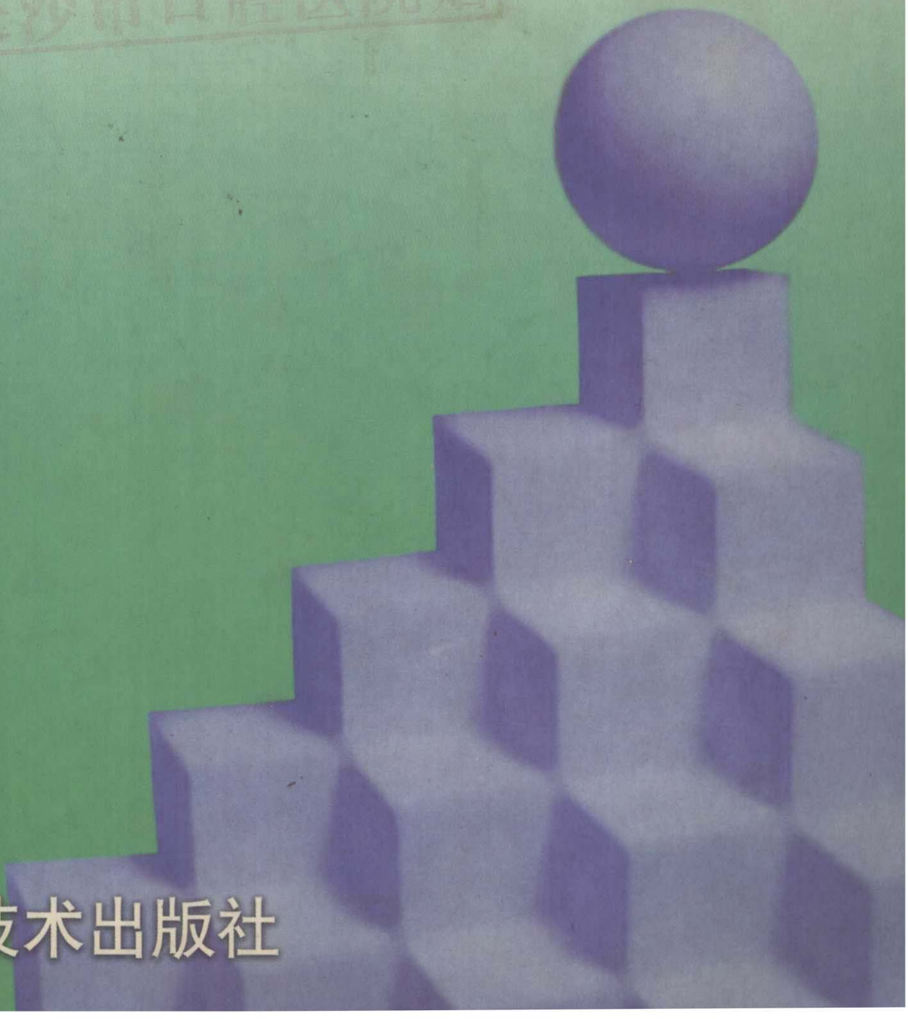
高等医学院校教材

医用高等数学

张双德　郑乃法　主编



天津科学技术出版社

检车2班 李春江

高等医学院校教材

医用高等数学

张双德 郑乃法 主编

天津科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学/张双德，郑乃法主编．—天津：天津科学技术出版社，1999.8

ISBN 7-5308-2729-4

Ⅰ.医… Ⅱ.张… Ⅲ.医用数学：高等数学-高等学校：医学院校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第38083号

天津科学技术出版社出版
出版人：王树泽
天津市张自忠路189号 邮编300020 电话（022）27306314
山东省费县方正印刷厂印刷
*
开本787×1092 1/16 印张20 字数449千字
1999年8月第1版
1999年8月第1次印刷
定价：25.00元

本书编撰人员名单：

主　编：张双德　郑乃法

副主编：郝　海　张学良　罗万成

　　　　陈宇丹　张喜红

编　委：(以姓氏笔画为序)

　　　　张学良　张　泽　张喜红

　　　　张双德　陈宇丹　郑乃法

　　　　岳　华　杨　林　罗万成

　　　　郝　海　耿　魁

前　言

随着生命科学与医学科学数量化进程的加快，数学在高等医学教育中的地位和作用将显得愈来愈重要。

在面向21世纪高等医学人才的培养目标中，应当使未来的医学人才具有应用数学分析的头脑去研究医学理论和临床实践的能力。然而，目前国内高等医学院校中的数学教学不仅远未达到此要求，而且相去甚远，数学教学内容和课程体系的设置也远不能适应21世纪人才培养与教育改革的要求。为此，在多年教学实践的基础上，我们编著了这本教材，以期进一步开展医学院校中高等数学课程教学改革的实验。

在编写过程中，我们着重体现了以下几个方面：

（1）加强数学基础的教学。数学课程是学生学习和掌握数学工具的主要形式，是培养学生理性思维的重要载体。因此，加强数学基础内容的教学是第一位的。本书强化了在数学基础理论部分的论述，并且对于一些重要的定理和性质给出了证明。因为许多定理的证明本身就包含了丰富的数学思想和数学方法。尽管如此，但本书并不追求过分严谨的数学形式，许多问题的处理采用了逻辑推导、几何解释和举例说明并用的方式，这样更有助于学生对数学知识的学习和理解。

（2）加强与生物医学的联系，突出数学建模的教学。数学源于实践但又高于实践，我们不主张任何的数学概念和方法都从生物学或医学的问题中引入。事实上，那样做既牵强附会，又不符合数学发展的轨迹。数学教学应当展现数学的思想和数学的发展过程。数学应用的广泛性是缘于数学高度的抽象性，如果把它过窄地限制于某一学科的应用，将不利于学生数学思维和数学应用能力的培养。但是，我们从数学建模的角度，尽量体现“医用高等数学”的特点，全书精选了几十个来自生物医学方面的问题，结合相应课程的内容，用尽可能浅显的方法来建立它们的数学模型。通过这些数学模型的教学，使学生既可从中窥视到数学应用于生物医学的可能，又可培养他们建立简单数学模型的基本思想和方法，应该说这是学习数学更本质的方面。

（3）加强数学与人文知识的联系。数学是人类文化的重要组成部分，由于传统教材只注重纯数学知识的阐述，使学生很难体会到数学文化的内蕴，这既不利于学生综合素质的培养，又不利于调动学生的学习兴趣，易使学生产生数学难学和枯燥的感觉。为此，在新教材中我们有意识地嵌入了多篇数学史料和专题资料作为阅读内容。这既可拓展学生的视野又可激发学生的兴趣，使学生在阅读这些材料的同时去体验数学文化的魅力。这也增强了教材的可读性。

本书试图用数学统一性的观点来设计和组织内容，全书分为微积分、线性代数和概率论三个板块，共九章内容。前七章为微积分和微分方程，可作为第一学期的必修课内容，后两章线性代数和概率论可作为第二学期的选修课开设。由于医学统计辟为专门的课程开设，所以在本书中没有安排统计学的内容。

此外，为了适应不同院校或不同专业的教学需要，我们对有些章节加注了星号“*”，这些内容可由教师根据教学的具体情况作灵活取舍，不影响教材的系统性。

为了便于学习和理解所学的内容，在每节前我们给出了该节的学习要点和要求，每节后组织了思考题和习题，以章为单元给出了小结和复习题。这种设计将有助于学生对知识的学习和把握。

本书在编写过程中得到了武警医学院首长和教务处领导的大力支持。该书列为武警医学院1999年教学改革立项课题。同时还得到了新疆医科大学、广西医科大学、长治医学院、四川畜牧医学院、齐齐哈尔医学院和湖南高等医学专科学校同仁的大力支持和帮助，在此，向他们表示真诚的感谢和敬意。曲阜师范大学的徐本顺教授为本书慷慨提供了大量的专题资料，我们深表敬佩。写作中参考了大量的有关著述和文献，这里一并向这些作者表示衷心的谢意。

由于我们水平有限，加之时间仓促，难免睽异编写教材的初衷。不合理，不恰当，甚或错误之处定会存在，恳请使用本教材的同志及所有读者不吝指正。

编著者

1999年8月于天津

目　录

1. 函数的定义域

2. 函数的相同 $\begin{cases}\text{定义域}\\ \text{对应法则}\end{cases}$

3. 复合函数的分析

4. 极限存在的条件（左=右 有界量×无穷小）

5. 求极限

6. 间断点的分类 { 可去

7. 连续的定义（左右极限相同）

例1 $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$，$x=1$ 为可去间断

2 $y=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ a+\frac{x}{2} & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续 $a=\frac{3}{2}$

第一章　函数、极限与连续

函数和极限是高等数学中最基本的概念和方法．微积分学中几乎所有的概念都离不开极限，极限理论构筑了高等数学的理论基础．连续函数是重要的一类函数，微积分学的主要研究对象就是连续函数．本章将对函数、函数极限、函数的连续性等概念给出较严格的数学定义，并对其主要的性质和运算法则作系统的介绍．

$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$　$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

§1.0　实数概述

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

微积分是在实数范围内研究函数的．为此，我们在讨论函数之前，先对实数的概念和性质略加叙述．

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^4-2x+3}$　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-2x+3}$

函数在某点连续 则极限值等于函数值

1.0.1　数的扩充

人类在认识自然和改造自然的实践中，对数的认识是从自然数开始的．自然数从 1 算起，全体自然数组成的集合称为**自然数集**，记为 N．在自然数集 N 中，关于数的加法和乘法运算是封闭的，但对减法运算不封闭．为使减法运算封闭，人们引进了数 0 与负整数，从而自然数集 N 扩充为**整数集** Z．

在整数集 Z 中，关于数的加法、减法和乘法运算是封闭的，但对除法运算不封闭．为使除法运算封闭，必须引入分数，从而整数集 N 被扩充为**有理数集** Q．

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^4-2x+3}$（除 x^4）

$$Q=\{p/q \mid p,q\in Z, q\neq 0\}$$

在有理数集 Q 中，加、减、乘、除都可畅行无阻(当然，0 不能作除数)，因而有理数集对于四则运算是封闭的．但是，有理数集对开方运算不封闭，即有理数的开方可能不再是有理数，例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 等就不是有理数，这一点很容易证明．

都没有质因

事实上，若假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则 $\sqrt{2}$ 可表为 $\frac{p}{q}$ 的形式，即 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，其中 $p,q\in Z$，且互素．这样一来，p,q 不能同时为偶数，不妨设 q 是奇数，于是 $p=\sqrt{2}q$，两边平方得 $p^2=2q^2$，由此知 p^2 是偶数，从而知 p 是偶数．记 $p=2r$，由上式得 $q^2=2r^2$，这说明 q^2 是偶数，从而 q 是偶数，这与 q 是奇数的假设相矛盾，即假设 $\sqrt{2}$ 是有理数导致了矛盾，故 $\sqrt{2}$ 不是有理数．

由于任何有理数都可表示为有限小数(包括整数)或无限循环小数．既然 $\sqrt{2}$ 不是有理数，它必是无限不循环小数，我们知道

$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots\cdots.$$

为了与有理数相区别，人们把这类数(无限不循环小数)称为无理数．

有理数与无理数一起构成实数，全体实数组成的集合，称为**实数集**，记为 R．

由上述数集的逐步扩充可见，在这些集合间显然有

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$；$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin kx}=\frac{m}{k}$；

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$　$\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$

4、函数的特性：①有界性．②单调性．③周期性．④奇偶性．（定义域关于原点对称）

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

1.0.2 实数的性质

(1) 有序性　即任意两个实数 a 与 b 可以比较大小，即在下列三个关系中有且仅有一个成立：$a > b, a = b, a < b$．

(2) 封闭性　即对任意两个实数施行加、减、乘、除（除数不为 0）运算后仍得实数．

(3) 稠密性　即在任何两个不同的实数之间都还存在着无穷多个不同的实数．

(4) 连续性　当建立了数轴后，实数集与数轴上的点集之间有一一对应关系，即每一个实数在数轴上都有唯一的一个点相对应；反之，数轴上的每一个点都有唯一的一个实数与之对应．直观地说，实数集不仅密布数轴而且布满数轴（注意，有理数集不具有这一性质，例如在数轴上可以画出表示 $\sqrt{2}$ 的点，但 $\sqrt{2}$ 却不是有理数）．正是基于这种性质，通常我们把实数与其在数轴上对应的点不加区别．

(5) 阿基米德（Archimedes）性　即对任意两个正实数 a, b，必存在自然数 n，使 $na > b$．由此可知，任何正实数 x，必有非负整数 n，使得 $n \leqslant x < n+1$．

1.0.3 邻域

为了今后叙述上的方便，我们介绍一种特殊的区间——邻域．

设 a 为某一定数，$\delta > 0$，则称数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．在没有必要指明 δ 时，就简称为点 a 的某邻域，记为 $U(a)$．

数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的空心邻域，记为 $U^{\circ}(a, \delta)$，即

$$U^{\circ}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

当没有必要指明 δ 时，就简称点 a 的某空心邻域，记为 $U^{\circ}(a)$．

可见，邻域是一种特殊的开区间．

§1.1 函数

【学习要点和要求】　理解函数概念，熟悉函数的几种特性；理解分段函数、反函数、复合函数的概念，并能将一个复合函数分解为几个简单函数．

1.1.1 函数概念

在中学中，我们已经学习了很多函数，例如：

(1) 幂函数 $y = x^{\alpha} (\alpha \in R)$；

(2) 指数函数 $y = a^{x} (a > 0, a \neq 1)$；

(3) 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$；

(4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$；

( ) → 开区间　[ ] → 闭区间　∀ 任取　∃ 存在　8912492 - 数理教研室　第一实验楼六楼

(5) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ 等.

这些函数的共同之处在于每个函数都包含两个变量,它们的变化范围都是数集,且两个数集的元素之间存在着一种对应关系,把这些特征抽象出来,便得到函数的定义.

定义 1.1　设有非空数集 X 与 Y,若存在某种对应规则 f,对于每个 $x \in X$,都有唯一的 $y \in Y$ 与之对应,则称 **f 是 X 到 Y 的一个函数**,与 x 相对应的 y 记作 $f(x)$,称为 f 在 x 处的值.上述函数关系记为

三要素：定义域.值域.对应法则

$$f: X \to Y, x \mapsto f(x)$$

x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.X 称为函数 f 的**定义域**,$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 称为函数 f 的**值域**.

定义中当 X 与 Y 为一般集合时,称 f 是 X 到 Y 的**映射**.可见函数是一种特殊映射.

在函数定义中,对应规则 f 称为函数,$f(x)$ 称为函数值,故 f 与 $f(x)$ 不同,但在习惯上,特别在微积分教材中常用 $f(x)$ 表示函数,这可从上下文中不难予以区别.

注意:在上述函数定义中,要求对每个 x,通过 f 都有"唯一"的 y 值相对应,由此定义的函数称为单值函数.若对每一个 x,通过 f 有两个或两个以上的 y 值相对应,这样的函数称为多值函数.在本书中我们主要讨论单值函数.

定义域与对应规则是函数的两个要素,若两个函数 f_1, f_2 有相同的定义域 X,且对每个 $x \in X$,有 $f_1(x) = f_2(x)$,就认为这两个函数相等或相同.

函数的表示方法主要有三种:解析法(即用数学式子表达的函数),图形法和表格法.

在用解析法表达的函数中,y 是 x 的函数,若能表示成 $y = f(x)$ 的形式,就称为**显函数**;若函数关系是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的,则称之为**隐函数**.例如由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

函数的表示：解析.列表.图象法

所表示的 y 是 x 的函数,就是隐函数.从上式中解出

分段函数

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ 或 } y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

由此表示的函数就是显函数.

对于用解析式表示的函数,其定义域就是使表达式有意义的全体自变量值.例如 $y = x^{\alpha}$ 的定义域依赖于 α 的选择.当 α 为正整数时,定义域$(-\infty, +\infty)$;当 $\alpha = \frac{1}{2n}$($n \in N$)时,定义域为$[0, +\infty)$,当 $\alpha = \frac{1}{2n-1}$ 时,定义域为$(-\infty, +\infty)$;当 α 为正无理数时,规定其定义域为$[0, +\infty)$,当 α 为负无理数时,定义域为$(0, +\infty)$.

许多实际问题中的函数,在其定义域的不同子区间上要用不同的对应法则来表示,这类函数称为**分段函数**.例如邮资函数

$$y = \begin{cases} 0.8, & 0 < x \leqslant 20, \\ 1.6, & 20 < x \leqslant 40, \\ 2.4, & 40 < x \leqslant 80 \\ 3.2, & 80 < x \leqslant 100. \end{cases}$$

表示了信重(克)与邮资(元)之间的函数关系.即对国内外埠平信,每重20克或不足20

克者付邮资 0.8 元，每大于 20 克不超 40 克者，付邮资 1.6 元，依此累计，大于 80 克不超过 100 克者，付邮资 3.2 元．邮资函数是分段函数．

注意：分段函数所表达的是一个函数，而不是多个函数．

下面介绍几个特殊的函数．

例 1 符号函数(如图 1.1)

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0.\end{cases}$$

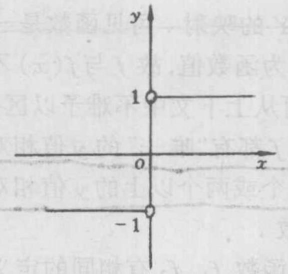


图 1.1

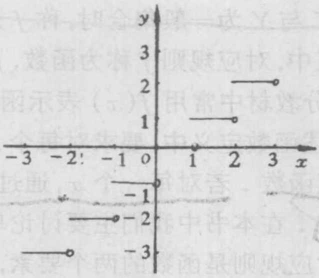


图 1.2

例 2 取整函数(如图 1.2)

$$f(x)=[x]$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，即 $[x]=\max\{y\mid y\leqslant x, y\in Z\}$．

例如 $[2.3]=2, [0.5]=0, [-3.5]=-4$．

例 3 狄利克莱(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\0, & x\notin Q.\end{cases}$$

1.1.2 函数的几种特性

这一段我们主要复叙一下函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性等几种几何特性．

定义 1.2 设 $f(x)$ 的定义域为 X．若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$．则称 $f(x)$ 在 X 上为**有界函数**，M 称为 $f(x)$ 的一个界．

由此可见，所谓一个函数有界，是指这个函数既有上界又有下界，反之亦然．

例 4 (1) 函数 $\sin x, \cos x$ 是有界函数．因为 $\forall x\in R$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$．

(2) 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\forall x\in(0,+\infty)$，有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$．但 $\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是有界的．

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 定义在 X 上．若 $\forall x_1, x_2\in X$，且 $x_1<x_2$ 有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上为**单调增函数(单调减函数)**．

单调增和单调减函数统称为**单调函数**．如果上述不等式中是严格不等号 $<$ ($>$) 成

如 复合分析：一般分为
①从代数计算步骤
②分解到的程度 a：基本函数初等函数
b：多项式
c：有理分数

立，就称 $f(x)$ 为**严格单调增(减)函数**．

例 5 线性函数 $f(x)=ax$ 在 R 上是严格单调的．

事实上，$\forall x_1,x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)-f(x_2)=ax_1-ax_2=a(x_1-x_2)$$

当 $a>0$ 时，有 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，$f(x)$ 是严格增的；
当 $a<0$ 时，有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，这时 $f(x)$ 是严格减的．

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $X=(-a,a)$．若 $\forall x\in X$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若 $\forall x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**．

奇函数的图形关于原点对称(如图 1.3)，偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1.4)．

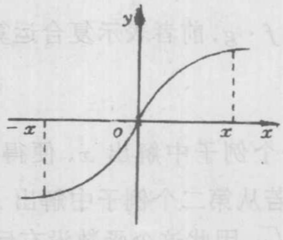


图 1.3

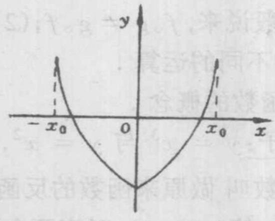


图 1.4

例如 $\sin x,\tan x,x^3$ 是奇函数；$\cos x,\sin^4 x,x^2$ 是偶函数．

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域是 X．若 $\exists T\in R$，使 $\forall x\in X$，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为它的一个**周期**．

由定义知，若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则必有 $f(x+2T)=f(x+3T)=\cdots=f(x+nT)=f(x)$．因此 T 不是唯一的，我们规定最小的正数 T 作为周期函数的周期．

例如，$\sin x$ 的周期是 2π，但 $|\sin x|$ 的周期为 π．

注意：并非每一个周期函数都有最小的周期，如狄利克莱函数 $D(x)$ 以任何有理数为周期，但不存在最小正周期．

1.1.3 复合函数与反函数

先看一个例子：函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可以看成是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 两个函数复合起来的，称 $y=\sqrt{1-x^2}$ 为 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 的复合函数．显然 $u=1-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，但作为复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域却是 $[-1,1]$．这就是说，只有限制 $u=1-x^2$ 的定义域，使其值域包含于 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内时，$y=\sqrt{1-x^2}$ 才有意义．

一般地，有如下定义：

定义 1.6 该函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=g(x)$ 的定义域为 D_g，若 $X=\{x\mid x\in D_g,g(x)\in D_f\}\neq\varnothing$，作函数

$$f\circ g:X\to R,x\mapsto f(g(x))$$

则称 $f\circ g$ 为 f 与 g 的**复合函数**．“$\circ$”称为函数的复合运算，即对 $\forall x\in X$，有 $f\circ g(x)=f(g(x))$．若函数 f 的值域亦包含于 g 的定义域内，则复合函数 $g\circ f$ 也存在．

由 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 构成的复合函数 $y = f(g(x))$，通常我们把它称为是以 x 为自变量，以 u 为中间变量的复合函数．

例如 $y = \sin(2x+1)$ 可以视为由 $y = \sin u$ 与 $u = 2x+1$ 复合而成的．而 $y = \ln\sin\sqrt{x-1}$ 可以视为由 $y = \ln u, u = \sin v, v = \sqrt{x-1}$ 复合而成的．

例 6　设 $f(x) = x^3, g(x) = 2^x$．求复合函数 $f\circ g, g\circ f, f\circ f, g\circ g$．

解　$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^3 = 2^{3x}$

$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 2^{x^3}$

$f\circ f(x) = f(x^3) = (x^3)^3 = x^9$

$g\circ g(x) = g(2^x) = 2^{2^x}$．

注意：(1) 一般说来，$f\circ g \neq g\circ f$；(2) $f\circ g \neq f\cdot g$，前者表示复合运算，而后者表示乘法运算，这是两种不同的运算．

下面介绍反函数的概念．

先看两个例子：$y = x^3$ 与 $y = x^2$．从第一个例子中解出 x，便得 x 是 y 的函数：$x = \sqrt[3]{y}$．这个函数叫做原来函数的反函数．但若从第二个例子中解出 x，得 $x = \pm\sqrt{y}$，这说明对同一个 y 值（$y > 0$），对应两个数值 $\pm\sqrt{y}$，因此这个函数没有反函数．

上述例子说明，当且仅当函数的自变量与因变量之间存在一一对应关系时，才有反函数存在．确切地说，有下面的定义．

定义 1.7　设函数 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y．若存在函数

$$f^{-1}: Y \to X$$

使 $\forall y \in Y, f^{-1}(y) = x$，满足 $f(x) = y$．则称 f^{-1} 为 f 的**反函数**．

显然，f 与 f^{-1} 互为反函数，且 f 的值域是 f^{-1} 的定义域，f 的定义域是 f^{-1} 的值域，并且有

$$f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(y)) = y.$$

关于反函数的存在性有如下定理．

定理 1.1　任何严格单调函数一定有反函数．并且反函数也是严格单调的（其增减性与原来函数相同）．

注意：函数严格单调仅是存在反函数的充分条件，而非必要条件．

例如

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

在〔0,2〕上不是严格单调函数，但有反函数

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} 1-y, & -1 \leqslant y \leqslant 0 \\ \dfrac{y}{2}, & 0 < y \leqslant 2 \end{cases}$$

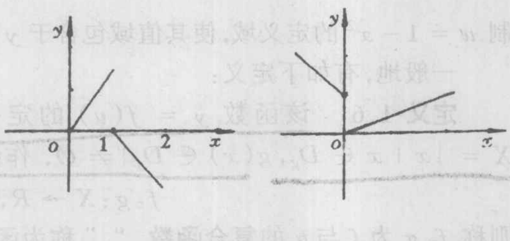


图 1.5

如图 1.5 所示．从图形上看，$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 表示同一条曲线，所不同的仅仅是前者的自变量为 x，后者的自变量为 y．但习

五类几种常见函数 (1)分段函数

~~y=sinx~~

(2)取整函数

(3)反函数

(3)幂整函数 $y=x^x$ $y=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$

(4)隐函数

$F(x,y)=0$

如 $x^2+y^2-1=0$

(5)多元函数

$PV=nRT$

(6)双曲函数

惯上总是用 x 表示自变量，即以 $y = f^{-1}(x)$ 表示 $y = f(x)$ 的反函数．这样在同一坐标系内，$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称(如图 1.6)．事实上，设(x_0, y_0) 是曲线 $y = f(x)$ 上的任一点，则有 $x_0 = f^{-1}(y_0)$，即点(y_0, x_0) 在曲线 $y = f^{-1}(x)$ 上，反之亦然．而点(x_0, y_0) 与(y_0, x_0) 恰是关于直线 $y = x$ 对称的(为什么?)．

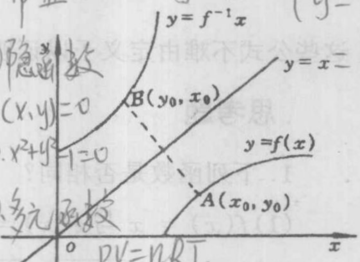


图 1.6

1.1.4 初等函数

本节开头列举的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数连同常量函数，称为**基本初等函数**．基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所得到的函数，称为**初等函数**．

自变量的系数、指数都为1.

例如 $\sqrt{1+x}, \sin(x+\frac{\pi}{3}), x+\frac{1}{x}, \sqrt{x^2+1}+2^{\sin x}$ 等都是初等函数．

凡不是初等函数的函数称为非初等函数．如狄利克莱函数，符号函数等都是非初等函数．

最后我们介绍一下有用的双曲函数．

定义 1.8 双曲正弦 $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

双曲余切 $\mathrm{coth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$

$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$

它们的图形如图 1.7，图 1.8 所示．

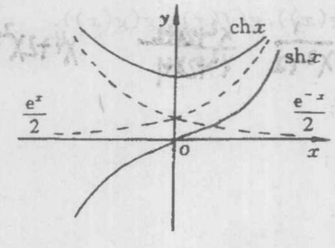


图 1.7

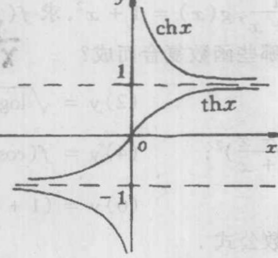


图 1.8

双曲函数有类似于三角函数的下述公式：

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y \\ &\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y \\ &\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1 \\ &\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x \end{aligned}}$$

$$\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$$

这些公式不难由定义予以证明．

思考题

1．下列函数是否相同？

(1) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$； ×

(2) $f(x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$ 与 $g(x) = \sqrt{1-x^2}$； ×

(3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与 $g(x) = x+2$． ×

2．若函数 $f(x)$ 为奇函数，则必有 $f(0) = 0$． 不是

3．是否任何两个函数都能构成复合函数？ 不是

习题 1.1

1．求下列函数的定义域．

(1) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$； [-1,2]　　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$； (0,1)

(3) $y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+4}$；　　(4) $y = \dfrac{1}{|x| - x}$． (-∞,0)

[-4,-1)∪(-1,1)∪(1,+∞)

2．设 $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x < 0 \\ x - 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(\frac{1}{2})$．
=2　=-1　=-1/2

3．设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，$f(1) = 2$，$f(x+y) = f(x)f(y)$，求 $f(1999)$． $=2^{1999}$

4．判断下列函数的奇偶性．

(1) $y = x + x^9 + 5$； 非奇非偶　　(2) $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$； 奇

(3) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$； 偶　　(4) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$． 奇

5．设函数 $f(x)$ 定义在 $[-a, a]$ 上，证明：(1) $f(x) + f(-x)$ 为偶函数；(2) $f(x) - f(-x)$ 为奇函数．

解：由题意可知 a>0

6．设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$，$g(x) = 1 + x^2$，求 $f(f(x))$，$f(g(x))$，$g(f(x))$，$g(g(x))$．

$\dfrac{x+1}{x+2}$　$\dfrac{1}{x^2+2}$　$\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}$　x^4+2x^2+2

7．下列函数是由哪些函数复合而成？

(1) $y = e^{\sin x^2}$；　　(2) $y = \sqrt{\log_a(1+x^2)}$；

(3) $y = \left(\arctan \dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$；　　(4) $y = f(\cos(ax+b))$；

(5) $y = 2^{\sin^2 \frac{1}{x}}$；　　(6) $y = (1 + \arcsin x)^{-1}$．

8．试证明双曲函数公式．

§1.2　极限

【学习要点和要求】　理解函数极限、无穷小量的概念；掌握极限的性质和运算法则；熟记两个重要极限，并会利用重要极限计算某些函数的极限．

极限方法是由求某些实际问题的精确解答而产生的．我国魏晋时期的数学家刘徽为