高等学校数学系列教材

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

哈尔滨工程大学应用数学系/编　施久玉/主审

哈尔滨工程大学出版社

概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics

哈尔滨工程大学应用数学系 编
施久玉 主审

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/哈尔滨工程大学应用数学系编.
哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005
ISBN 7-81073-518-7

Ⅰ.概… Ⅱ.哈… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 070134 号

内容简介

本书是按照教育部审定的高等工业学校《概率论与数理统计课程基本要求》编写的。包括概率论与数理统计两部分。主要内容:随机事件及其概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验。各章均附有习题,书末有参考答案。本书可作为高等学校教材,也可供科技工作者、工程技术人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈尔滨工程大学11号楼
发行部电话(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 8.75 字数 222 千字
2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—4 000 册
定价:14.00 元

前　　言

本书是按照21世纪新形势下教材改革的精神,根据“教育部高等院校工科数学教学大纲”的要求编写的。

本书分两部分,概率论部分(第1章至第5章)作为基础理论知识,是全书的重点;数理统计部分(第6章至第8章)介绍了常用的统计推断的基本方法:参数估计和假设检验。

本书在编写过程中,总结了多年的教学经验和实践,注意到了时代的特点,本着加强基础、强化应用、整体优化的原则,力争做到科学性、系统性和可行性相统一,传授数学知识和培养数学素养相统一,先进性与适用性相统一。同时,本书吸取了国内外同类教材的优点,力求通俗易懂,易教易学。本书配备例题全面,习题丰富(适量英文),习题分A、B两类。书的最后给出了习题参考答案或提示,以供读者参考。本书可作为高等院校非数学类理工科各专业《概率论与数理统计》课程教材或教学参考书。

本书由哈尔滨工程大学应用数学系陈林珠(第1章)、王锋(第2章)、沈艳(第3、4章)、张晓威(第5章)、施久玉(第6、7、8章)编写,在编写过程中请于涛修改了第7、8章,郑晓阳修改了第3章。全书由施久玉教授统稿和主审。

本书的编写得到了哈尔滨工程大学应用数学系广大教师的关心和热情支持,编者在此表示衷心的感谢。由于水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

编　者

2005年7月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在现实世界中发生的千姿百态的现象,概括起来无非是两类现象:一类是在一定条件下必然出现(或恒不出现)的现象,例如在标准大气压下,水加热到 100℃ 时必定沸腾,三角形内角和为 180° 等等,我们称这种现象为**确定性现象**.读者可以从物理学、化学等其他学科中举出许多这样的实例.但在许多问题中往往还有另外一类情况,要得到预定结果的条件比较复杂,不可能完全确切地测定这些条件,当条件具有微小变化时,就会影响到结果的发生与否.例如船舶在海洋中航行时,由于受到海洋波浪的影响而产生各种各样的摇摆(纵摇、横摇)以及高低起伏,又如掷一枚硬币,结果可能出现正面,也可能出现反面,其结果呈现不确定性,我们称这类现象为**随机现象**.

实践证明,研究了大量的同类随机现象后,通常总揭露出一种完全确定的规律性,也就是大量随机现象所特有的一种规律性.例如掷一枚硬币,如果硬币是匀称的,当抛掷次数少时,正面、反面的出现没有明显的规律性,随着抛掷次数的增加就会发现,正面出现的次数占总数的 50% 左右.又如在射击中,当射击次数不大时,靶上命中点的分布是完全没有规则的,杂乱无章的,没有什么显著的规律性;当射击次数增加时,分布就开始呈现规律性,射击次数越多,规律性越明显.也就是说,个别随机现象虽然是无规律的,但大量性质相同的随机现象总存在着统计规律性.概率论与数理统计就是一门从数量方面研究随机现象客观规律性的学科,它经逐步发展,形成了数学的一个分支.由于随机现象是普遍存在的,这就使概率论与数理统计的理论与方法具有极为普遍的意义,就决定了概率论与数理统计在数学领域、应用领域中所处的重要地位与

作用以及广阔的发展前景.

我们必须指出,随机性现象与确定性现象之间,必然性与偶然性之间并没有不可逾越的鸿沟."那些被断定为必然的东西,是由种种纯粹的偶然构成的,而被认为是偶然的东西,则是一种有必然性隐藏在里面的形式①."事实上,宇宙中没有哪一件客观现象的发生不带有某种程度的随机因素,因而任何确定性现象也不可避免地有随机误差产生.只是在许多实际问题中,为了处理问题的方便,在所要求的精确度范围内,忽略掉了那些造成随机误差的次要因素,而只考虑起主要和基本作用的那些因素.也就是说,先找出那些对现象起决定性作用的最主要和最基本的条件,然后利用数学工具(例如高等数学,线性代数等)建立数学模型,把它解出来,找出在这组基本条件下的现象所具有的主要规律.例如过去在船舶设计时,就是根据流体力学的原理列出微分方程,求出船舶在航行中所受的阻力,它的航行规律.这种做法是以牺牲精确度为代价的.在某些精确度要求较高的问题中,必须将一些随机的次要因素也考虑在内.这样一来,由于众多的因素,使得研究确定性现象的那些数学工具就不够用了.又如社会系统的确定性模型必定要假设人类没有自由意志,但是,几乎没有人愿意接受这种观点,因而必须采用概率论与数理统计的方法.概率论与数理统计的方法可以提供更好的数学模型.

随着我国现代化建设的跨跃式发展及科学技术愈来愈高的要求,概率论与数理统计的理论与方法的应用范围愈来愈广泛,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门,如适航性、可靠性工程、气象、水文、地震预报、自动控制、通讯工程、管理工程、金融工程等等.另一方面,概率论与数理统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透,产生了许多边缘性的应用学科,如信息论、计量经济学等.正如一位著名作家所表

① 恩格斯著《费尔巴哈与德国古典哲学的终结》.

述的:概率论和统计学转变了我们关于自然、心智和社会的看法,这些转变是意义深远而且范围广阔的,既改变着权力的结构,也改变着知识的结构,这些转变使现代科学成形.

1.1 样本空间 随机事件

1.1.1 随机试验

为了方便和确切地研究随机现象,我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验,并用字母 E 表示.以下是几个试验的例子.

例 1 E_1:掷一颗骰子,记录其出现的点数.

E_2:掷一颗骰子,记录其出现的为偶数的点数.

E_3:在某批产品中任选一件,检验其是否合格.

E_4:记录某客车站一天的售票营业额.

以上试验所具有的共同特点是:

(1) 可以在相同条件下重复进行的试验;

(2) 在进行一次试验之前,不能事先确定试验的哪个结果会出现;

(3) 试验的全部可能的结果是明确的.

我们称具有上述三个特点的试验为**随机试验**(random experiment),简称为试验.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

1.1.2 样本空间

某种试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**(sample space).样本空间的元素,即 E 的每个结果称为**样本点**(sample point),记为 e.样本空间简记为 $S = S(e)$.

下面给出例 1 中每个试验的样本空间:

$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$;

$S_2 = \{2,4,6\}$;

$S_3 = \{$合格,不合格$\}$;

$S_4 = \{e \mid e \geqslant 0\}$.

样本空间中的样本点可以是有限多个,也可以是无穷多个;样本空间中的样本点可以是数也可以不是数.样本空间中的样本点取决于试验的目的,也就是说,由于试验目的的不同,样本空间中的样本点也就不同.如试验 E_1 和 E_2,同是掷骰子,由于观察的目的不同,所以样本空间 S_1 和 S_2 也不同.但是,无论怎样构造样本空间,作为样本空间中的样本点,必须具备两条基本属性:(1) **互斥性**:无论哪两个样本点都不会在同一次试验中出现;(2) **完备性**:每次试验一定会出现某一个样本点.

1.1.3 随机事件

在进行试验时,人们常关心的是满足某种条件的样本点的集合.例如,若规定某一客运站的售票营业额少于300元为亏损,则人们关心的为不小于300元的样本点的集合 A.显然 A 是试验 E_4 的样本空间 S_4 的一个子集,即

$$A = \{e \mid e \geqslant 300\}$$

我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**(random event)(在一次试验中,可能发生,也可能不发生的事情),简称为**事件**.事件是概率论中最基本的概念.今后用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示事件.因此,某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 e 发生,记为 $e \in A$.在上例中,如某天的营业额为500元,则事件 A 发生.

特别地,由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**(basic event).例如试验 E_1 中有6个基本事件 $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点,在每次试验中它总是发生,称为**必然事件**(certain event).空集中不包含任何样本点,空集也是样本空间的一个子集,它在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**

(impossible event),用$\varnothing$表示.我们知道,必然事件S与不可能事件$\varnothing$都不是随机事件,因为作为试验的结果,它们都是确定的,并不具有随机性.但是为了今后讨论问题方便,我们也将它们当作随机事件来处理.

1.1.4 事件间的关系与事件的运算

由于随机事件是样本空间的一个子集,而且样本空间中可以定义不止一个事件,那么分析它们之间的关系不但有助于我们深刻地认识事件的本质,而且还可以简化一些复杂事件的概率的计算.既然事件是一个集合,那么我们可以借助集合论中集合之间的关系以及集合的运算来研究事件间的关系与事件间的运算.

设试验E的样本空间为S;$A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots,n)$是$E$的事件.

1. 若事件A发生,必然导致事件B的发生,则称事件B包含事件A,记作$A\subset B$.若$A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A与B**相等**.记作$A=B$.易知:若$A=B,B=C$,则$A=C$.

2. 事件$A\cup B=\{e|e\in A$或$e\in B\}$称为事件A与B的**和事件**.当事件A、B中至少有一个发生时,事件$A\cup B$发生.$A\cup B$也记作$A+B$.

对任一事件A,有$A\cup S=S,A\cup\varnothing=A$.

类似地,当n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个事件发生时,称和事件$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$发生.$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示"可列无穷多个事件$A_i$中至少有一个事件发生".

3. 事件$A\cap B=\{e|e\in A$且$e\in B\}$称为事件A与B的**积事件**.当事件A与B都发生时,积事件$A\cap B$发生.$A\cap B$也记作AB.

对任一事件A,有$A\cap S=A,A\cap\varnothing=\varnothing$.

类似地,当n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$都发生时,称积事件$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$发生.$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示"可列无穷多个事件

A_i 同时发生".

4. 事件 $A - B = \{e \mid e \in A$ 且 $e \overline{\in} B\}$ 称为事件 A 与 B 的**差事件**. 当事件 A 发生而事件 B 不发生时,事件 $A - B$ 发生.

对任一事件 A,有 $A - A = \varnothing, A - \varnothing = A, A - S = \varnothing$.

5. 事件 A、B,若 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与 B 为**互不相容事件**或**互斥事件**(mutually exclusive event). n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 被称为互不相容的,是指其中任意两个事件都是互不相容的,即 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

6. 事件 A、B,若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$,就是说不论试验结果如何,事件 A 与 B 中必有且仅有一个事件发生,则称事件 A 与 B 为**互补事件**,也称互为**对立事件**(complementary event). A 的对立事件记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A} = B$. 显然 $\overline{A} = S - A$.

注意:对立事件 A 与 $\overline{A}$ 必为互不相容(互斥)事件,但互不相容事件不一定是对立事件.

用文氏图(Venn diagram)图 1 - 1 ~ 图 1 - 6 可直观地表示以上诸事件的关系,其中矩形面积为样本空间 S;圆形面积 A、B 分别表示事件 A、B;阴影部分则分别表示和、积、差等事件.

容易验证以下事件的运算律.

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(De · Morgan) 律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

对差事件运算 $A - B = A\overline{B} = A - AB$

例 2 掷一颗骰子. 设事件 A_1 为掷出的点数是奇数点, A_2 为掷出的是偶数点, A_3 为掷出的是小于 4 的偶数点,则有

$A_1 \cup A_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$;

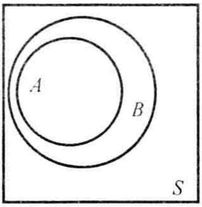

图 1－1　$A \subset B$

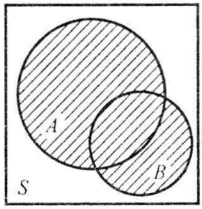

图 1－2　$A \cup B$

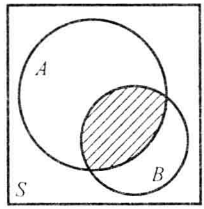

图 1－3　$A \cap B$

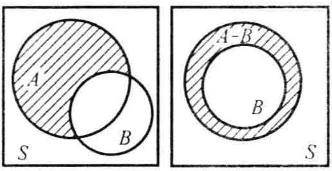

图 1－4　$A - B$

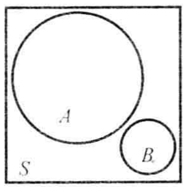

图1－5　$A \cap B = \varnothing$

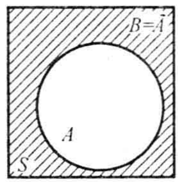

图1－6　$\bar{A} = S - A$

$A_1 A_2 = \varnothing$;

$A_2 A_3 = \{2\}$;

$A_2 - A_3 = A_2 \overline{A}_3 = \{4,6\}$;

$\overline{A_1 \cup A_3} = \overline{A}_1 \overline{A}_3 = \{4,6\}$.

例 3　如图 1－7 所示的电路中，以 A 表示“信号灯亮”这一事件，以 B、C、D 分别表示“电路接点 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 闭合”事件.

易知 $BC \subset A$，$BD \subset A$ 且 $BC \cup BD = A$，而 $\overline{B}A = \varnothing$，即事件 $\overline{B}$ 与事件 A 互不相容.

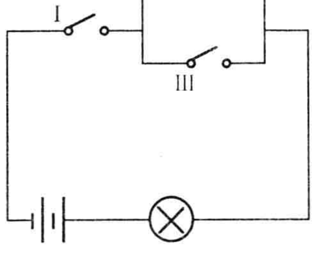

图 1－7

例 4　化简下列事件：

(1) $AB \cup A\bar{B}$;

(2) $A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$.

解 (1) $AB \cup A\bar{B} = A(B \cup \bar{B}) = AS = A$;

$$\begin{aligned}(2)\ A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B} &= (A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B}) \cup (\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}) \\ &= \bar{B}(A \cup \bar{A}) \cup \bar{A}(B \cup \bar{B}) \\ &= \bar{B}S \cup \bar{A}S = \bar{B} \cup \bar{A} = \overline{AB}.\end{aligned}$$

1.2 频率与概率

1.2.1 频率

由随机事件的特性可知,在一次试验中,它可能发生也可能不发生(除必然事件和不可能事件外).我们希望对某一事件出现的可能性的大小给出一个度量.这里首先引入频率的概念.

定义1 在相同条件下,随机事件 A 在进行 n 次重复试验中出现的次数,称为事件 A 发生的**频数**,记为 n_A.比值 $n_A/n = f_n(A)$ 称为事件 A 发生的**频率**(frequency).

频率有以下性质:

(1) 非负性:$0 \leqslant f_n(A)$;

(2) 规范性:$f_n(S) = 1$;

(3) 有限可加性:若 A,B 是互不相容的事件,则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

对于性质(1),因为 $n_A \geqslant 0$,故必有 $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n} \geqslant 0$;

对于性质(2),因为 S 是必然事件,故 $n_S = n$,从而

$$f_n(S) = \frac{n_S}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

对于性质(3),因为事件 A,B 不能同时发生,故 $n_{A \cup B} = n_A + n_B$,从而

$$f_n(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B)$$

由这三条最基本的性质易推知以下性质:

(4) $f_n(\varnothing) = 0$;

(5) 若 $A \subset B$,则 $f_n(A) \leqslant f_n(B)$,总有 $f_n(A) \leqslant 1$;

(6) 对有限个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$,有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小表示 A 发生的频繁程度.频率愈大,事件 A 发生愈频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大.因而,直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小.这样做是否合适?先看下面的例子.

例 1 考虑“抛硬币”这个试验,有学者将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次,各做 10 遍,记录的数据如下表所示(其正面为 H,n_H 表示 H 发生的频数,$f_n(H)$ 表示 H 发生的频率).

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

历史上曾有几位科学家做过这种试验,记录了如下表所示的数据.

实　验　者	n	n_H	$f_n(H)$
De. Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffou	4 040	2 048	0.506 9
K. Pearson	12 000	6 019	0.501 6
K. Pearson	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出:(1) 频率有随机波动性,即对于同样的 n,所得的 $f_n(H)$ 不尽相同;(2) 抛硬币次数 n 较小时,频率 $f_n(H)$ 随机波动的幅度较大,但随着 n 增大,频率 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动,而且逐渐稳定于 0.5.

例 2　考察英语中字母出现的频率. G. Dewey 统计了约 438 023 个字母得到下表.

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

字母使用频率的研究,对打字键盘设计、信息编码及密码破译等都是很有用的.

从上面两个例子中可以看出,当 n 较小时,频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大,因而,当 n 较小时用频率来表达事件发生的可能性的大小是不太合适的. 而当 n 逐渐增大时,频率