王喜林 主编

重点 难点 疑点

ZHONGDIAN
NANDIAN
YIDIAN
XUEXISHOUCE

学习手册

几何

初一

东北师范大学出版社

重点难点疑点学习手册

几　　何

初　一

王喜林　主编

东北师范大学出版社

（吉）新登字 12 号

主编：王喜林
编者：王玉林 霍学起 翟永江

重点难点疑点学习手册
几　何
JI HE
初　一
王喜林　主编

责任编辑：王　慧　封面设计：李冰彬　责任校对：于雷　曲玲玲

东北师范大学出版社出版　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街 110 号）　东北师范大学出版社激光照排中心制版
（邮政编码：130024）　东北师范大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32　1996 年 5 月第 1 版
印张：4.75　1996 年 5 月第 1 次印刷
字数：100 千　印数：00 001—10 000 册

ISBN 7－5602－1812－1
G·889
本册定价：5.00 元
全套定价：25.00 元

出版说明

为了帮助广大师生更好地把握教材，准确、扎实地掌握教材中的重点，化解难点，消除疑点，培养学生的学习能力，发展其思维能力，提高其素质，我们组织部分省、市、县的教研员和第一线的特级、高级教师编写了这套丛书。

这套丛书共38册，覆盖了初中和高中语文、英语、历史、代数、几何、物理、化学诸科课程。

这套丛书严格依据国家教委制定的《全日制中学各科教学大纲》和全国统一教材编写。对重点、难点的确定，既考虑到大纲和教材的要求，又考虑到教学的实际情况，同时又使之形成一定的系统。对重点、难点的解析力求准确、清晰、简明、透彻。疑点主要是从启发学生思维，培养学生的质疑问难精神出发提出的，问题新颖，答疑注重比较和引申，拨云见日。

这套丛书编写的指导思想是突出其实用性，强调其科学性、针对性和新颖性。

书中除“重点、难点、疑点”及其解析外，还设有“典型例题解析”、“典型错解剖析”、“反馈练习”、“综合测试题”、“参考答案”等部分。

“重点、难点、疑点解析”针对教材中的重点、难点及学生学习过程中的疑点进行提炼并详细地解释、

说明。

“典型例题解析”围绕重点、难点选择有代表性的典型题为例子进行具体分析，以加深对重点、难点的理解，并指明思路，教给方法，培养学习能力。

“典型错解剖析”针对学生学习中常见的错误、易混淆的知识，通过剖析典型错例，明确错误根源，以防患于未然。

“反馈练习”按章节或单元进行编写，突出重点、适当加些难点内容，题型新颖多样，既便于阶段反馈检测，又有利于提高学生的分析问题、解决问题的能力。

“综合测试题”基本上按每个学期一套编拟，既突出重点，又考虑覆盖面，可作为检测和反馈所学知识之用。

在保持整套丛书体例基本一致的前提下，根据各科教材体系和实际情况，对上述各部分适当地进行了某些局部调整。

东北师范大学出版社

目　录

第一章　线段　角

一、直线　射线　线段

【重点、难点、疑点解析】

重　点

1. 直　线

(1) 直线的意义：

① 直线的形象：拉紧的线、纸的折痕、笔直的公路等.

② 直线形象的直观描写“直线是向两方无限延伸着的”这种描述就告诉我们直线是没有尽头的（无端点）.

③ 凡是具有直线的性质（包括无尽头、笔直的等）的对象，就可以看成是直线，否则就不是直线.

(2) 直线的表示方法：

① 用两个大写字母表示，如直线 AB.

② 用一个小写字母表示，如直线 l.

(3) 直线的基本性质：经过两点有一条直线，并且只有一条直线.

①“有”字指经过两点有一条直线，这表明直线的存在性.

②“只有”二字说明该直线不能少于一条，也不能多于一条，只能有一条，这表明它的唯一性.

2. 线　段

(1) 线段的概念和表示方法.

① 直线上两个点和它们之间的部分叫做线段，这两个点叫做线段的端点. 线段有两个端点，有长短.

② 表示法
- (A) 用表示它的两个端点的两个大写字母表示.
  如线段 AB 或线段 BA.
- (B) 用一个小写字母表示，如线段 a.

(2) 线段的基本性质（公理）

所有连接两点的线中，线段最短.

或简单地说：两点之间，线段最短.

这个性质的正确性为人类长期的生活实践和生产实践所证实，被人们公认，我们把它作为公理.

3. 训练几何语言、计算、画图是今后学好几何的关键.

例如，线段的延长线，射线的反向延长线，线段的和、差、倍、分等概念及运算、画法，我们都应掌握.

难　点

1. 直线概念的理解

(1) 直线是从客观事物中抽象出来的概念，即直线表示一根拉紧的线.

(2) 直线只有位置，没有粗细. 例如，当太阳、地球、月亮在一条线上时，就出现了日蚀或月蚀，这一条直线就是从位置说明的.

(3) 直线没有尽头，是向两方无限延伸的.

(4) 直线是原始概念，所以只给予直观认识，不必下定义.

2. 两点的距离的理解

连结两点的线段的长度叫做两点的距离.

(1) 因为两点之间线段最短，所以两点间的距离就规定为连结两点的线段的长度；如果这两点连接其它的线，它就不是最短的，而且连接的线不同，长度也不同，距离就不唯一.

(2) “线段”是图形，“距离”是指连结两点的线段的长度，因而不能把距离说成“连结两点的线段”.

疑　点

1. 为什么平面内两条直线只有两种位置关系：平行、相交？

过去曾有人认为，平面内两条直线应有三种位置关系，即平行、重合、相交. 这种认识是不正确的.

(1) 在几何课本里“两条直线”都是指两条不重合的直线；“两个点”是指两个不同点. 如果把重合也看成直线的一种位置关系，就违背了直线公理，就会出现过两点有无数条直线.

(2) 重合的直线（或点）可以认为是同一条直线（或同一点），因此平面内两条直线只有两种位置关系，平行和相交.

2. 为什么不用线段或射线的概念来定义直线？

(1) 因为教材是采取以直线为原始概念，然后以直线为基础定义射线和线段，这体现从整体到部分，由一般到特殊的认识规律.

(2) 如果现在以射线或线段的概念来定义直线，违背一般到特殊的认识规律，易犯循环定义的错误. 因此不能用线段或射线的概念来定义直线.

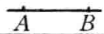
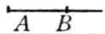
【典型例题解析】

例 1 试述直线、射线、线段的联系及区别？

分析　本题应从有关概念、读法、性质等方面进行对比，以寻求它们的联系和区别，使问题回答得全面准确.

解答　三者的联系是：直线、射线、线段是整体与部分的关系. 射线和线段都是直线的一部分，它们都是由无数点构成的，把线段向两方延长，或把射线反向延长就得到直线.

三者的区别如下表

	直　线	射　线	线　段
图　例			
端　点	无端点，在两个方向上无限伸展	一个端点，在另一个方向上无限伸展	两个端点
字母表示位置	直线上任意两点	一个端点和射线上任意一点	两个端点
长　度	无长度	无长度	可度量长度
表示法	直线 AB（字母无序）	射线 AB（字母有序）	线段 AB（字母无序）
读　法	直线 AB 或直线 BA	射线 AB（A 为端点）	线段 AB 或线段 BA
作　法	过 A、B 两点作直线 AB 或过 B、A 两点作直线 BA	以 A 为端点作射线 AB 或以 B 为端点作射线 BA	连结 A、B

例 2 如图 1－1 所示，已知线段 AD 上两点 B、C，其中 $AD=18\text{cm}$，$BC=5\text{cm}$，E、F 分别为 AB、CD 的中点．求：（1）$AB+CD$ 的长度；（2）E、F 之间的距离．

分析　本题已给了图形，考虑这类题都是从线段运算的特征入手，找出和未知数的关系，问题很容易解决．

图 1－1

解　（1）$AB+CD=AD-BC=18-5$

$=13$（cm）

（2）$\because AE=EB=\frac{1}{2}AB$

$DF=CF=\frac{1}{2}CD$

$\therefore EF=EB+BC+CF=\frac{1}{2}AB+BC+\frac{1}{2}CD$

$=\frac{1}{2}(AB+CD)+BC$

$=\frac{1}{2}\times 13+5$

$=11.5$（cm）

例 3 同一直线上有 A、B、C、D 四点，已知：$AD=\frac{5}{9}DB$，$AC=\frac{9}{5}CB$，且 $CD=4\text{cm}$，求 AB 的长．

分析　根据题意可知 CD 的长度是确定的，而 A、B 两点的位置分三种情况：

（1）如图 1－2 所示，点 C、D 在线段 AB 内部；

（2）如图 1－3 所示，点 A、B 在线段 CD 内部；

（3）如图 1－4 所示，点 B 在线段 CD 内部，点 A 在线段 CD 的延长线上．

因此本题应分不同情况求解，防止遗漏现象.

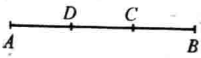


图 1 - 2

图 1 - 3

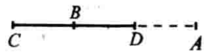


图 1 - 4

解 （1）$\because AD=\frac{5}{9}DB \quad \therefore AD=\frac{5}{9}(AB-AD)$

$\because AC=\frac{9}{5}CB \quad \therefore AC=\frac{9}{5}(AB-AC)$

整理后得方程组$\begin{cases} AC=\frac{9}{14}AB \\ AD=\frac{5}{14}AB \end{cases}$

$\because CD=AC-AD=\frac{4}{14}AB=4$

$\therefore AB=14$（cm）

（2）由 $AD=\frac{5}{9}DB$ 　可得 $AD=\frac{5}{9}$（$AD+AB$）

$AC=\frac{9}{5}CB$ 　可得 $AC=\frac{9}{5}$（$AC-AB$）

整理后得方程组$\begin{cases} AD=\frac{5}{4}AB \\ AC=\frac{9}{4}AB \end{cases}$

$\because CD=AC+AD=\frac{14}{4}AB=4$

$\therefore AB=\frac{16}{14}=1\frac{1}{7}$（cm）

（3）由 $AD=\frac{5}{9}DB$ 　可得 $AD=\frac{5}{9}$（$AB-AD$）

$\because AC=\frac{9}{5}CB \qquad \therefore AC=\frac{9}{5}(AC-AB)$

整理后得方程组$\begin{cases} AC=\frac{9}{4}AB \\ AD=\frac{5}{14}AB \end{cases}$

$\because CD=AC-AD=\frac{53}{28}AB=4$

$\therefore AB=\frac{112}{53}=2\frac{6}{53}$ (cm)

剖析 (1) 从运算过程中不难发现，DB 可用 $AB-AD$（或 $AB+AD$），CB 可用 $AB-AC$（或 $AC-AB$）来代换，这样把要求的 AB 这条线段的长度作为一个未知量参加运算，然后根据不同图形，或 $AC-AD$，或 $AC+AD$ 从而得出已知量 CD，求得 AB 的长度. 这种题目的整体考虑问题，进行恰当代换转化，是求线段长度的一种常用方法.

(2) 根据题目的要求，什么情况下要分别求解，什么情况下无需分别求解，要辨别清楚，避免犯遗漏或重复计算的错误.

例 4 平面上有 10 个点（其中任意三点不在同一直线上），问最多可确定多少条直线.

分析一 因为两点确定一条直线，不在同一条直线上的三点可确定 3 条直线，4 个点（任意三点不共线）可确定 6 条直线，5 个点（任意 3 点不共线）可确定 10 条直线……这样可发现如下规律：

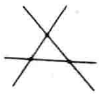
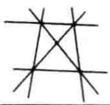
这样便可得到本题的解答：

就是 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$（条）

分析二 设 10 个点分别为 A_1、A_2、A_3……A_{10}，

点出发与其它 9 个点分别作直线，可得到 9 条直线，依次类

推，直到从 A_{10} 点出发与其它各点作直线能得到 9 条直线，但每个点所作的直线最后都重复了一次．（如 A_1A_2 与 A_2A_1 是同一条直线等等）这样也可得到这题的解答：即 $10\times9\div2=45$（条）

点的个数	图　形	直线条数	规　律
2		1	每增加 1 个
3		3	点可作的直线条数是前一次的点的个数加上前一次点数所确定直线的条数.
4		6	

剖析　(1) 因为 1 个点不能确定直线，所以要从 2 个点开始，它的一般公式可以这样叙述：平面上有 n（$n\geqslant2$）个点（其中三点不在同一直线上），则最多可确定直线的条数为 $1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

（条）（$n\geqslant2$）　①

这个式①的结果是怎样得到的呢？计算如下：

$1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)$ ②

把②式的连加式的顺序倒过来写：

$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+4+3+2+1$ ③

$(②+③)\div2=\frac{1}{2}(\underbrace{n+n+n+\cdots\cdots+n}_{(n-1)个})=\frac{1}{2}n(n-1)$

$(n\geqslant2)$

（2）由于直线没有方向性，线段也没有方向，因此计算线段的条数也可用这种方法.（即这个公式）

例如：平面上有 8 个点，每两点连成一条线段，最多可连成多少条. 本例可用公式：$\frac{1}{2}n\ (n-1)\ =\frac{1}{2}\times 8\times\ (8-1)\ =28$（条）. 当然直线与线段确定的条件有所不同，经过两点只能确定一条直线，而经过两点线段的条数是无法确定的. 因此涉及到线段可不考虑三点是否共线的问题.

（3）对于过两点的射线也是确定的，不过它有相反的两个方向，因此对于给 n 个点可确定射线的条数可叙述为，平面上有 n（$n\geqslant 2$）个点，三点不共线，则最多可确定射线的条数是 $n\ (n-1)$ 条（$n\geqslant 2$）.

例如：平面内有 3 个点，问可确定多少条射线.

可用公式 $n(n-1)=3\times(3-1)=6$(条)

如图 1 - 5 所示，这 6 条射线为射线 AB、BA、AC、CA、BC、CB.

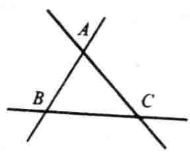


图 1 - 5

例 5 如图 1 - 6 所示，如果在一直线上顺次有四个点 A、B、C、D，则下列等式成立的是（　　）.

A. $AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD$

B. $AD\cdot BC-AB\cdot CD=AC\cdot BD$

C. $AB\cdot BC+AC\cdot CD=AC\cdot BD$

D. $AB\cdot BC-AC\cdot CD=AC\cdot BD$

分析 题中选择的四个关系中，以线段的和、差、积形式出现的等式，且线段有重合部分，这时不妨把重合部分分离开来，把几何关系转化为代数等式，然后来求解.

本题可设 $AB=a$　$BC=b$　$CD=c$

则 $AD \cdot BC + AB \cdot CD$

$= (a+b+c) \cdot b + a \cdot c$

$= ab + b^2 + bc + ac$

$= b(a+b) + c(a+b)$

$= (a+b)(b+c)$

$= AC \cdot BD$

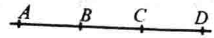


图 1 - 6

故选 A.

关于 B、C、D 通过运算会发现都不成立.

剖析　(1) 几何关系式转化成代数关系式是求线段的和、差、倍、分以及验试等式、不等式常用的方法，因此我们要掌握这种方法.

(2) 本题的正确结论是一个著名的尤拉 (Euler) 定理.

例 6　已知：线段 a、b、c ($a>b$)，画一条线段等于 $3a-2b+c$

画　法

1. 如图 1 - 7 所示，画线段 $AB=3a$.

2. 在线段 AB 上截取 $AC=2b$.

3. 在线段 AB 的延长线上截取 $BD=c$，线段 CD 就是所求的线段，即 $CD=3a-2b+c$.

剖析　对于这类较综合的画图题，要特别注意画图的顺序和所求的线段，否则图形很容易画错.

这部分作图常用的画图语句一般有：

(1) 过点×和点×作直线××；

(2) 以点×为端点作射线××；

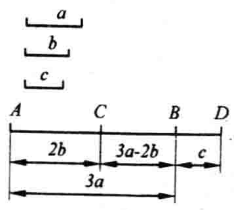


图 1 - 7

(3) 连结××两点（就是画出以点×和点×为端点的线段）；

(4) 延长线段××到×点，使××=××或××=n××；

(5) 延长××交××于×点；

(6) 延长线段××；

(7) 反向延长线段××；

(8) 反向延长射线××；

(9) 取线段××的中点×；

(10) 画线段××使它等于 $a \pm b$.

【典型错解剖析】

例 (1) 延长直线 AB 到 C；

(2) 延长射线 OA 到 C；

(3) 经过两点有且只有一条线段；

(4) 画出 A、B 两点的距离.

分析　上面的说法都是错误的.

① 由于直线本身就是向两旁无限延伸的，因此直线不存在延长线，同样射线也不存在着延长线，故命题 (1)、(2) 都是错误的.

② 经过两点间的线段不一定就是一条. 例如图 1-8 所示，经过 A、B 两点的线段有 CD、CE 等还可以画出若干条，因此(3)是错误的.

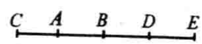


图 1-8

③ 线段和距离是两个不同的概念，两点的距离是指这两点间线段的长度，因此距离不是画出来的，而是量出来的，故命题 (4) 是错误的.