高等数学(一)微积分

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

滕桂兰 郭洪芝/主编

(公共课程)

版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

高等数学（一）

（微积分）

主　编　滕桂兰　郭洪芝
副主编　张津萍　薛　晖

东方出版社

责任编辑:任　方
封面设计:田　健
责任校对:高雪莲
组　　稿:李三三

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·1,微积分
滕桂兰　郭洪芝　主编
北京:东方出版社,2000.12
ISBN 7－5060－1416－5
Ⅰ.高…
Ⅱ.①滕…②郭…
Ⅲ.①高等数学－高等教育－自学考试－自学参考资料②微积分－高等教育－自学考试－自学参考资料
Ⅳ.013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 78390 号

东方出版社出版发行
100706　北京朝阳门内大街 166 号
化学工业出版社印刷厂印刷

开本:880×1230 毫米　1/32　印张:9.5　字数:200 千字
版次:2000 年 12 月第一版　2000 年 12 月第一次印刷
印数:1－10000 册
定价:12.00 元

说　　明

本书是全国高等教育自学考试大纲、教材的配套辅导用书。

编写依据：

1. 全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学（一）自学考试大纲》；

2. 指定教材《高等数学（一）》（高汝熹主编，武汉大学出版社出版）。

本书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索，按指定教材分章辅导，除协助应试者对考核知识要点和解题要点作高度概括外，主要针对考核重点和难点按照实际考题类型配备大量的练习题（含参考答案）及综合测试题，旨在帮助应试者迅速而全面地掌握本课程的内容，熟悉应试题型，掌握应试中所必需的技巧，取得理想的应试效果。

本书亦是编者长期从事该课程教学、多年从事该课程自学考试辅导的经验的结晶，相信本书的出版，对广大考生学习本课程具有切实的指导意义。

限于编者的学识与水平，疏漏之处敬请批评指正。

编　者

2000 年 10 月

目　　录

第一章　函数及其图形

基本要求

1. 了解集合的概念及其表示方法.

2. 理解函数的概念,会求函数的定义域和函数值域.

3. 理解反函数的概念,会求给定函数的反函数,知道函数与其反函数之间的关系.

4. 熟练掌握基本初等函数的定义、性质及其图形;理解复合函数的定义,能正确分析复合函数的复合过程.

例题及例题分析

一、单项选择题

1. 下列集合中为空集的是(　　).

(A) $\{\varnothing\}$　　(B) $\{0\}$

(C) 0　　(D) $\{x|x^2+1=0, x\in R\}$

解　选(D)

因为(A)、(B)分别是由空集和数零组成的集合,因此是非空集合;0是一个数,不是集合,故(C)也不是空集.

2. 设 $A=\{x|x^2-x-6>0\}$, $B=\{x|x-1\leqslant 1\}$,则 $A\cap B=$(　　).

(A) $\{x|x>3\}$　　(B) $\{x|x<-2\}$

(C) $\{x|-2<x\leqslant 1\}$　　(D) $\{x|x\leqslant 1\}$

解　选(B)

由　$x^2-x-6>0$ 得 $x>3$ 或 $x<-2$,故 $A=\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$;由 $x-1\leqslant 1$ 得 $x\leqslant 2$,故 $B=\{x|x\leqslant 2\}$,所以 $A\cap B=\{x|x<-2\}$.

3. 满足绝对值不等式 $|x|>|x-2|$ 的所有 x 的集合是(　　).

(A) $\{x|x>1\}$　　(B) $\{x|x<1\}$

(C) $\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$　(D) $\{x \mid x > 2\}$

解　选(A)

由 $|x| > |x-2|$ 得 $|x|^2 > |x-2|^2$,即 $x^2 > (x-2)^2$ 解之得 $x > 1$.

4. 函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} + \lg(3x-8)$ 的定义域是(　　).

(A) $(-\infty, -2) \cup (\dfrac{8}{3}, +\infty)$

(B) $(\dfrac{8}{3}, +\infty)$

(C) $(3, +\infty)$

(D) $(-\infty, -2)$

解　选(C)

由 $x^2 - x - 6 > 0$ 得 $x > 3$ 或 $x < -2$;由 $3x - 8 > 0$ 得 $x > \dfrac{8}{3}$.

所以函数的定义域为 $(3, +\infty)$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 2 & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$,则 $f(x-2)$ 的定义域是(　　).

(A) $[-1,3]$　(B) $(-1,3]$

(C) $[1,5]$　(D) $(1,5]$

解　选(D)

因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,3]$,故有 $-1 < x-2 \leqslant 3$,即 $1 < x \leqslant 5$.　所以 $f(x-2)$ 的定义域为 $(1,5]$.

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$,则函数 $F(x) = f(x+2) + f(2x)$ 的定义域是(　　).

(A) $[-3,0]$　(B) $[-3,1]$

(C) $[-\dfrac{1}{2},1]$　(D) $[-\dfrac{1}{2},0]$

解　选(D)

因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$,故有

$$\begin{cases} -1 \leqslant x+2 \leqslant 2 \\ -1 \leqslant 2x \leqslant 2 \end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

因此，$F(x)$ 的定义域为$[-\frac{1}{2},0]$.

7. 设 $y=f(\lg x)$ 的定义域为$[\frac{1}{2},2]$，则 $y=f(x)$ 的定义域是( ).

(A)$[\frac{1}{2},2]$　　(B)$[\sqrt{10},100]$

(C)$[-\lg 2,\lg 2]$　　(D)$[0,1]$

解　选(C)

求 $f(x)$ 的定义域，即求 $\lg x$ 在$[\frac{1}{2},2]$上的值域．又 $\lg x$ 为单调增函数，$\lg x$ 在$[\frac{1}{2},2]$的值域为$[\lg\frac{1}{2},\lg 2]$，即$[-\lg 2,\lg 2]$.

8. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f(\frac{1}{f(x)})=$( ).

(A) $\frac{1}{2+x^2}$　　(B) $\frac{1}{1+(1+x^2)^2}$

(C)$1+x^2$　　(D)$1+(1+x^2)^2$

解　选(B)

因$\frac{1}{f(x)}=1+x^2$,

所以 $f(\frac{1}{f(x)})=f(1+x^2)=\frac{1}{1+(1+x^2)^2}$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\leqslant 2\\ 1 & |x|>2\end{cases}$，　则 $f(f(x))=$( ).

(A)2　　(B)1　　(C)$f(x)$　　(D)$(f(x))^2$

解　选(A)

由假设 $f(f(x))=\begin{cases}2 & |f(x)|\leqslant 2\\ 1 & |f(x)|>2\end{cases}$,

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant 2$，故有 $f(f(x))=2$.

10. 设 $f(1-2x)=1-\frac{2}{x}$，则 $f(x)=$( ).

(A)$1+\frac{4}{1-x}$　　(B)$1-\frac{4}{1-x}$

(C)$1-\dfrac{2}{1-2x}$　　(D)$1+\dfrac{2}{1-2x}$

解　选(B)

令 $1-2x=t, x=\dfrac{1-t}{2}$,由 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$ 得

$f(t)=1-\dfrac{2}{\dfrac{1-t}{2}}=1-\dfrac{4}{1-t}$,故　$f(x)=1-\dfrac{4}{1-x}$.

11. 设 $f(\sin\dfrac{x}{2})=1+\cos x$,　则 $f(\cos\dfrac{x}{2})=($　　$)$

(A)$1-\cos x$　　(B)$-\cos x$

(C)$1+\cos x$　　(D)$1-\sin x$

解　选(A)

$f(\sin\dfrac{x}{2})=1+1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$,所以 $f(x)=2-2x^2$.

从而 $f(\cos\dfrac{x}{2})=2-2\cos^2\dfrac{x}{2}=2-(1+\cos x)=1-\cos x$.

12. 下列各对函数中,是相同函数的是(　　).

(A) $f_1(x)=x\sqrt{x-1}$,　$f_2(x)=\sqrt{x^4-x^2}$

(B) $f_1(x)=\arcsin(\sin x), f_2(x)=x$

(C) $f_1(x)=\ln x^2, f_2(x)=2\ln x$

(D) $f_1(x)=1-\cos 2x, f_2(x)=2\sin^2 x$

解　选(D)

因(A)、(C)中两函数的定义域不同,(B)中两函数的对应规律不同. 例如 $f_1(\dfrac{3\pi}{2})=-\dfrac{\pi}{2}, f_2(\dfrac{3\pi}{2})=\dfrac{3\pi}{2}$.

13. 函数 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2$ 的反函数是(　　).

(A)$y=4^{2x-1}$　　(B)$y=4x-1$

(C)$y=2^{x-1}$　　(D)$y=4^{x-1}$

解　选(A)

由 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2=\log_4 2\sqrt{x}$　得　$2\sqrt{x}=4^y$,

故　$x = 4^{2y-1}$，即所求函数的反函数是 $y = 4^{2x-1}$.

14. 设 $-\frac{1}{2} < x < 0$，则 $y = \lg(1+x) + \lg(1-x)$ 的反函数是（　　）.

(A) $y = \sqrt{1-10^x}$，　$(-\infty, 0)$

(B) $y = -\sqrt{1-10^x}$，　$(-\infty, 0)$

(C) $y = \sqrt{1-10^x}$，　$(\lg\frac{3}{4}, 0)$

(D) $y = -\sqrt{1-10^x}$，　$(\lg\frac{3}{4}, 0)$

解　选(D)

由 $y = \lg(1+x) + \lg(1-x) = \lg(1-x^2)$ 得

$1 - x^2 = 10^y$.

因为当 $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ 时，$y \in (\lg\frac{3}{4}, 0)$. 所以

$$x = -\sqrt{1-10^y}.$$

故所求反函数为 $y = -\sqrt{1-10^x}$，　$(\lg\frac{3}{4}, 0)$.

15. 设 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$，则 $f^{-1}(\frac{1}{2}) = $（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解　选(D)

设 $f^{-1}(\frac{1}{2}) = l$，　则 $f(l) = \frac{1}{2}$. 即

$\frac{l-1}{l+1} = \frac{1}{2}$，　解得 $l = 3$.

16. 函数 $y = \begin{cases} x^2 & -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2 - 4 & 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$ 的反函数是（　　）.

(A) $y = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ \sqrt{x+4} & 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

(B) $y=\begin{cases}-\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x+4} & -4<x<0\end{cases}$

(C) $y=\begin{cases}-\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ -\sqrt{x+4} & -4\leqslant x<0\end{cases}$

(D) $y=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ -\sqrt{4+x} & -4\leqslant x<0\end{cases}$

解　选(B)

因为当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=x^2$，$x=-\sqrt{y}$，$0\leqslant y\leqslant 4$；

当 $0<x\leqslant 2$ 时，$y=x^2-4$，$x=\sqrt{y+4}$，$-4<y<0$.

故所求反函数为 $y=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ \sqrt{x+4}, & -4<x<0.\end{cases}$

17. 设 $f(x)=\lg x$，函数 $g(x)$ 的反函数为 $g^{-1}(x)=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，则 $f[g(x)]=$(　　).

(A) $\lg\dfrac{2+y}{2-y}$　　(B) $\lg\dfrac{x+2}{x-2}$

(C) $\lg\dfrac{2+x}{2-x}$　　(D) $\lg\dfrac{x-2}{x+2}$

解　选(C)

令 $g^{-1}(x)=y$，则 $y=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，解此方程得 $x=\dfrac{2+y}{2-y}$.

所以 $g(x)=\dfrac{2+x}{2-x}$，从而 $f[g(x)]=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$.

18. 下列各组函数中，能够构成复合函数的是(　　).

(A) $y=\ln u, u=-x^2-1$

(B) $y=3^u, u=\sqrt{x}$

(C) $y=\arccos u, u=2+x^2$

(D) $y=\sqrt{u}, u=2x-x^2-3$

解　选(B)

因为 $D_y=(-\infty,+\infty)$，$R_u=[0,\infty]$，且 $D_y\cap R_u\neq\varnothing$.

所以(B)中两个函数能构成复合函数

$$y = 3^{\sqrt{x}}, x \in [0, +\infty).$$

19. 设 $g(x) = 1 - 2x$，$f[g(x)] = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$，则 $f(\dfrac{1}{2}) = ($　　$)$.

(A)15　　(B) $\dfrac{15}{16}$　　(C)3　　(D) $\dfrac{1}{3}$

解　选(A)

$$f(\frac{1}{2}) = f[g(\frac{1}{4})] = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 15.$$

20. 设函数 $f(x) = \dfrac{x(e^x - 1)}{e^x + 1}$，则该函数是(　　).

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 单调函数

解　选(B)

因为 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，且

$$f(-x) = \frac{-x(e^{-x} - 1)}{e^{-x} + 1} = \frac{-x\dfrac{1 - e^x}{e^x}}{\dfrac{1 + e^x}{e^x}}$$

$$= \frac{x(e^x - 1)}{e^x + 1} = f(x).$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

21. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内有定义且为奇函数，若当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，$f(x) = x(x - 1)$，则当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$f(x) = ($　　$)$.

(A) $-x(x + 1)$　　(B) $x(x - 1)$

(C) $x(-x + 1)$　　(D) $x(x + 1)$

解　选(A)

因为 $f(x)$ 为奇函数，故当 $x > 0$ 时，

$f(x) = -f(-x) = -[-x(-x - 1)] = -x(x + 1)$.

22. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上有定义，若 $f(x)$ 为奇

函数，$g(x)$ 为偶函数，则 $g[f(x)]$ 为(　　)．

(A) 奇函数　　　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　　　(D) 有界函数

解　选(B)

因为 $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$，故 $g[f(x)]$ 为偶函数．

23. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上是单调增函数，那么 $f(-\pi)$ 和 $f(\log_{\frac{1}{2}}8)$ 的大小关系是(　　)．

(A) $f(-\pi)<f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　　　(B) $f(-\pi)=f(\log_{\frac{1}{2}}8)$

(C) $f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　　　(D) 不能确定

解　选(C)

因为 $f(x)$ 为偶函数且在 $[0,4]$ 上是单调增函数，故 $f(x)$ 在 $[-4,0]$ 上是单调减函数．又 $\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-3>-\pi$，所以　$f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$．

24. 下列函数中为周期函数的是(　　)．

(A) $y=\sin x^2$　　　　(B) $y=\arcsin 2x$

(C) $y=x|\sin x|$　　　　(D) $y=\operatorname{tg}(3x-2)$

解　选(D)

因为 $\operatorname{tg}[3(x+\frac{\pi}{3})-2]=\operatorname{tg}(3x+\pi-2)=\operatorname{tg}[(3x-2)+\pi]=\operatorname{tg}(3x-2)$，所以 $y=\operatorname{tg}(3x-2)$ 是以 $\frac{\pi}{3}$ 为周期的周期函数．

25. 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的奇函数，且 $f(-1)=-1$　则 $f(7)=$(　　)．

(A) 1　　　　(B) -1

(C) 2　　　　(D) -2

解　选(A)

因为 $f(7)=f(1+2\cdot 3)=f(1)=-f(-1)=1$．

26. 下列函数中在给定的区间上为有界函数的是(　　)．

(A) $y=\sec x$, $[0,\pi]$　　(B) $y=\operatorname{tg}x$, $(-\frac{\pi}{2},0)$

(C) $y=\frac{1}{x}$, $(\frac{1}{10},1)$　　(D) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$, $(0,1)$

解　选(C)

因为 $y=\frac{1}{x}$ 在$(\frac{1}{10},1)$内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0.1^+}\frac{1}{x}=10$，

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$，故 $y=\frac{1}{x}$ 在$(\frac{1}{10},1)$内为有界函数.

练　习　一

单项选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid(3^x-1)(x-1)=0\}$，则下列集合与 A 相同的是(　　).

(A) $\{x\mid x^2-1=0\}$　　(B) $\{x\mid x(x^2-1)=0\}$

(C) $\{x\mid x(x-1)=0\}$　　(D) $\{x\mid(x-1)\sin x=0\}$

2. 设集合 $A=\{x\,\big|\,|x|>|x-2|\}$，$B=\{x\mid x^2-1>0\}$，则下述关系成立的是(　　).

(A) $A\supset B$　　(B) $B\supset A$

(C) $A=B$　　(D) $A\cap B=\varnothing$

3. 函数 $y=\arcsin\ln x+\sqrt{1-x}$ 的定义域是(　　).

(A) $[e^{-1},e]$　　(B) $[1,e]$

(C) $[e^{-1},1]\cup[1,e]$　　(D) $[e^{-1},1]$

4. 设函数 $f(x+a)$ 的定义域为$[0,a]$，则 $f(x)$ 的定义域为(　　).

(A) $[a,2a]$　　(B) $[-a,0]$

(C) $[-2a,-a]$　　(D) $[0,a]$

5. 函数 $f(x)=\begin{cases}x & |x|\leqslant 1\\ \sin x & 1<|x|\leqslant 4\end{cases}$，则 $f(x^2)$ 的定义域为(　　).

(A)〔$-4,4$〕　　(B)〔$-1,1$〕

(C)〔$1,4$〕　　(D)〔$-2,2$〕

6. 设 $f(x-2)=x^2+1$,则 $f(x+1)=$(　　).

(A)x^2+2x+2　　(B)x^2-2x+2

(C)$x^2+6x+10$　　(D)$x^2-6x+10$

7. 如果函数 $g(x)=\cos x$,则 $g(-\cos 0)=$(　　).

(A) -1　(B)$\cos 1$　(C)1　(D) $-\cos 1$

8. 设 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 与 $g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(x)=$(　　).

(A) $\dfrac{1+x}{2-x}$　(B) $\dfrac{2-x}{1+x}$　(C) $\dfrac{x+1}{2x-1}$　(D) $\dfrac{2x-1}{x+1}$

9. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义,则下列函数为奇函数的是(　　).

(A)$x|f(x)|$　　(B) $-x|f(x)|$

(C)$|f(x)|\sin x$　　(D)$xf(x^2)+x^3$

10. 在 R 上,下列函数为周期函数的是(　　).

(A)$\sin 3x$　　(B)$\cos x^2$

(C)$x\sin x$　　(D) $|x|\cos x$

11. 函数 $y=\operatorname{arctg}x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是(　　).

(A) 无界函数　　(B) 有界函数

(C) 偶函数　　(D) 周期函数

12. 函数 $y=\sin\ln\sqrt{1+x}$ 是(　　).

(A) 基本初等函数　　(B) 分段函数

(C) 复合函数　　(D) 单调函数

13. 下列函数为基本初等函数的是(　　).

(A)$y=2x+\operatorname{tg}x$　　(B)$y=\sqrt[3]{x^2}$

(C)$y=1+|x|$　　(D)$y=\ln(1+x^2)$

14. 若 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$,则 $f(x)=$(　　).

(A)x^2　(B)e^x　(C)$\ln x$　(D)$\sin x$