普通高等教育“十二五”规划教材

组合数学

Combinatorics

杨雅琴 李秋月 马腾宇 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育“十二五”规划教材

组合数学

杨雅琴　李秋月　马腾宇　编著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

组合数学起源于数学游戏,棋盘上的麦粒和Hanoi塔问题就是经典的有关组合数学的游戏(本书4.1节中对这两个游戏进行了简单介绍)。随着科学研究的不断发展和科学技术的不断进步,组合数学在科学、技术、生产、管理方面的应用越来越广泛、深入,在航天、医学、生物学、金融学、图形处理等领域的前沿阵地发挥着越来越重要的作用。

本书作者多年教学和研究成果的基础上结合组合数学的基本理论,系统地介绍了组合计数、组合设计以及相关数学理论。全书分为11章,介绍了简单排列组合与多重集的简单排列组合、鸽巢原理和Ramsey(拉姆齐)定理、容斥原理、生成函数、递推方程、特殊计数、Burnside(伯恩赛德)定理和Pólya(波利亚)定理、图论、区组设计、编码理论等内容。

本书可以作为数学、计算机科学、密码学或其他相关专业研究生和本科生学习组合数学的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/杨雅琴,李秋月,马腾宇编著.—北京:国防工业出版社,2013.8

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-118-08922-6

Ⅰ.①组... Ⅱ.①杨... ②李... ③马... Ⅲ.①组合数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第196442号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 14 **字数** 346千字

2013年8月第1版第1次印刷 **印数** 1—2500册 **定价** 48.00元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

有人认为离散数学就是组合数学,其实广义的组合数学称为离散数学。离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的学科,是现代数学的一个重要分支。离散数学的主要内容有传统的逻辑学、集合论(包括函数)、数理逻辑、算法设计、组合数学、图论、代数结构(包括代数系统,群、环、域等)等内容。离散数学包含组合数学。组合数学主要研究满足一定条件的组合模型的存在、计数以及构造等方面的问题。组合数学的主要内容有组合计数、组合设计、组合矩阵、组合优化等内容。

组合数学在国外早已成为十分重要的学科,美国政府在 Rutgers 大学成立了离散数学及理论计算机科学中心 DIMACS,进行组合数学及理论计算机科学的研究。日本的 NEC 公司在美国设立了研究中心,理论计算机科学和组合数学已是他们重要的研究课题。美国的 Sandia 国家实验室有一个专门研究组合数学和计算机科学的机构,主要从事组合编码理论和密码学的研究,在美国政府以及国际学术界都具有很高的地位。欧洲也在积极发展组合数学。英国、法国、德国、荷兰、丹麦、奥地利、瑞典、意大利、西班牙等国家都建立了各种形式的组合数学研究中心。近几年,南美国家也在积极推动组合数学的研究。澳大利亚、新西兰也组建了很强的组合数学研究机构(摘自百度百科)。我国组合数学的研究也不断前进,1997 年,我国在南开大学创建了南开大学组合数学中心;2010 年 10 月,浙江师范大学离散数学研究中心成立。随着科学研究的不断发展和科学技术的不断进步,组合数学在科学、技术、生产、管理方面的应用越来越广泛、深入,在航天、医学、生物学、金融学、图形处理等领域的前沿阵地发挥着越来越重要的作用。

组合数学起源于数学游戏,棋盘上的麦粒和 Hanoi 塔问题就是经典的有关组合数学的游戏。组合数学来源于生活也服务于生活。中国邮递员问题、分配问题、着色问题、稳定婚姻问题等都是组合数学研究的问题。

全书内容分为 11 章,介绍了简单排列组合与多重集的简单排列组合、鸽巢原理和 Ramsey(拉姆齐)定理、容斥原理、生成函数、递推方程、特殊计数、Burnside(伯恩赛德)定理和 Pólya(波利亚)定理、图论、区组设计、编码理论等内容。

本书分三个部分:

第一篇计数篇。主要介绍组合计数的基本理论,包括鸽巢原理和 Ramsey(拉姆齐)定理、容斥定理、生成函数、递推方程、特殊计数、Burnside(伯恩赛德)定理和 Pólya(波利亚)定理等内容。

第二篇图论篇。主要介绍图论的主要理论,包括图同构的判定、欧拉图、Hamilton 图的判别、树、最短路径的求法等内容,介绍用矩阵思想研究图的方法。

第三篇组合设计篇。简要介绍区组设计和编码的一些理论，包括 BIBD 设计方法、斯坦纳三元系、信息熵、离散信息编码等内容。

本书编写分工如下：杨雅琴编写了绪论和第一篇，马腾宇编写了第二篇，李秋月编写了第三篇。

本书可以作为数学、计算机科学、密码学或其他相关专业研究生和本科生学习组合数学的教材或参考书。

目 录

第二篇 图论篇

第三篇 区组设计篇

绪　论

组合数学、离散数学和图论是互相交叉的三门学科。组合数学是离散计数为主的学科，主要研究各科离散形式的计数方法、递推关系、图的各种边与点的关系、集合点匹配、优化设计等问题。离散数学主要以逻辑推导的方式，研究集合之间、点与集合之间、图形中点与边之间、边与边之间、点与点之间的逻辑关系。图论是广泛地研究有关图的问题，所以一般组合数学的图书中都有图的介绍，图论中也运用组合计数的方法研究图的相关问题。离散数学中也常有组合数学的理论，这三门学科相辅相成、共同发展。

近年来，有关组合数学相关领域问题的研究成果越来越多，2010 年，我国东南大学学生刘路破解了组合数学中国际数学难题“西塔潘猜想”震惊国际。现在，国内外的许多专家学者正在研究组合数学理论的同时也在研究其应用问题。

我国古代就有许多学者研究组合数学中的一些问题。古代的河图就是三阶幻方，在唐代孔颖达的《正义》中记载：“《河图》有九篇，《洛书》有六篇”。《河图》即八卦，《洛书》为九筹，如图 0－1 所示。

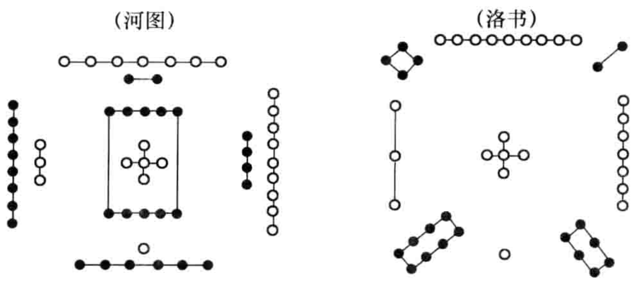

图 0－1　《河图》和《洛书》

河图和洛书都是以图形（绘画）的形示表示自然数之间的最基本和、差运算关系。河图中数字的关系是

	2 7	
8 3	10 5	4 9
	6 1	

即 $8+2=10=3+7$；$6+4=10=1+9$；$8-3=7-2=9-4=5$；$6-4=2=8-6$；$9-8=1$ 等最基本的和、差运算关系。洛书所展示的数字之间的关系正是三阶幻方（九宫格）的思想，横、竖、斜各方向的三个数之和都为 15。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

在我国的古代有许多数学家对数进行研究，北宋时期数学家贾宪（约 11 世纪前半叶）在其所著的著作中提到了“开方作法本源”图后被杨辉（南宋数学家）在其《详解九章算法》中扩展成“杨辉三角形”（详见数学辞海·第六卷）。贾宪的“开方作法本源”图比“帕斯卡三角形”（“帕斯卡三角形”是法国科学家帕斯卡（1623—1662）提出的）早 600 年。

组合数学（combinatorial mathematics）是研究组合模型的存在、计数以及构造等方面的问题，主要包括组合计数、组合设计、组合矩阵、组合优化等内容。组合数学与离散数学所研究的领域有许多相同或相近，离散数学注重过程的推导或形式，组合数学更注重理论在实际问题中的应用。

我国组合数学家陆家羲（1935—1983）在生前完成的《不相交的斯坦纳三元系大集》中给出了解决国际上组合设计领域中多年未解的难题。

1997 年，南开大学由陈永川教授和万哲先院士共同创建了南开大学组合数学中心，近年来，在组合数学、图论、组合最优化、组合设计等领域有很多很好的成果。

在国外，许久以前就有许多科学家研究组合数学，取得了非常多的成果，如阿基米德的手稿中记录了 Stomachion 的论文所解决的组合数学问题（破译阿基米德羊皮纸论文：组合数学鼻祖，2007 - 08 - 10 18:56:45 编辑：中国软件网）；欧拉（Euler）的七桥问题是世界著名的“哥尼斯堡七桥问题”；柯克曼女生问题等。

第一篇　计 数 篇

第 1 章　排列与组合

计数问题是组合数学中最基本的问题，也是生活中经常遇到的问题。例如，彩票中奖问题、串项链问题、圆桌排位问题等。

本章介绍基本的计数方法、重要的计数定理以及不同情况下的计数方法和结果。

1.1　加法法则和乘法法则

生活中经常会出现两种选择，一位学生到图书馆借书，图书馆中经济类图书有 200 本，但学校规定学生一次只能借 1 本，这样，这位学生就要有选择性地借书，那么，这位学生一共有 200 种借书的方法，这就是计数问题。下面介绍最基本的计数法则——加法法则和乘法法则。

我们将发生了或即将发生的事情称为事件。学生从图书馆借书就是一种事件，这种事件可能发生的结果有 200 种。

定理 1.1.1　加法法则

设事件 A 有 r_A 种可能发生的结果，事件 B 有 r_B 种可能发生的结果，则事件 A 或事件 B 可能发生，共有 $r_A + r_B$ 种结果。

例 1.1.1　学生到图书馆借 1 本经济或金融方面的图书，图书馆中有关经济方面的图书共有 200 本，有关金融方面的图书共有 100 本，这里的事件 A 为学生在图书馆借到 1 本经济方面的图书，事件 B 为学生在图书馆借到 1 本金融方面的图书，那么学生在图书馆借 1 本经济或金融方面的图书共有

$$200 + 100 = 300$$

种借书的结果。

定理 1.1.2　乘法法则

设事件 A 有 r_A 种可能发生的结果，事件 B 有 r_B 种可能发生的结果，则事件 A 和事件 B 同时发生，共有 $r_A \cdot r_B$ 种结果。

例 1.1.2　学生到图书馆借 1 本经济和 1 本金融方面的图书，图书馆中有关经济方面的图书共有 200 本，有关金融方面的图书共有 100 本，这里的事件 A 为学生在图书馆借到 1 本经济方面的图书，事件 B 为学生在图书馆借到 1 本金融方面的图书，那么学生在图书馆借 1 本经济和 1 本金融方面的图书共有

$$200 \times 100 = 20000$$

种借书的结果。

在生活中会经常遇到运用加法法则和乘法法则的事件。一个家庭在选择买台式电脑还是

买笔记本电脑问题上就会用到加法法则；一位旅游者要从 A 地经 B 地到达 C 地，从 A 地到 B 地有 r_M 种可以到达的方案，从 B 地到 C 地有 r_N 种可以到达的方案，那么，这位旅游者从 A 地经 B 地到达 C 地共有 $r_M \cdot r_N$ 种出行的方案。

以上给出的是两个事件的加法法则和乘法法则，下面给出 $n(n \in N)$ 个事件所满足的加法法则和乘法法则。

定理 1.1.3 设存在 $n(n \in N)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中事件 A_i 发生有 r_i 种可能发生的结果($i=1,2,\cdots,n$)，那么，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中只发生一种事件，共有

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

种可能出现的结果。

例 1.1.3 现在的手机市场中的手机品种可以说是品种繁多、琳琅满目，有位女士想买一部新手机，设事件 A_i 表示这位女士购买第 i 种品牌的手机，用 $|A_i|$ 表示这位女士购买第 i 种品牌的手机的结果数($i=1,2,\cdots,n$)，那么，这位女士购买手机共有

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

种结果。

定理 1.1.4 设存在 $n(n \in N)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中事件 A_i 发生有 r_i 种可能发生的结果($i=1,2,\cdots,n$)，那么，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，共有

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$$

种可能出现的结果。

例 1.1.4 人们在装修房屋的时候需要购买瓷砖、灯、床等物品，设事件 A_i 表示装修房屋时要购买第 i 种的物品，用 $|A_i|$ 表示装修房屋时要购买第 i 种的物品的结果数($i=1,2,\cdots,n$)，那么，装修房屋的时候需要购买物品共有

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

种结果。

1.2 排　列

1.2.1 简单排列

定义 1.2.1 在没有其他条件的情况下，从 n 个不同的元素中选取 r 个元素，并将其排成一排的方法称为 n 个不同的元素的 r 排列，记为 $P(n,r)$ 或 P_n^r。

当 $r=n$ 时，n 个不同的元素的 r 排列，就是 n 个不同的元素的 n 排列，称为 n 个不同的元素的全排列，记为 $P(n,n)$ 或 P_n^n；当 $r=1$ 时，有 $P(n,1)=P_n^1=n$；

当 $r>n$ 时，记 $P(n,r)=0$ 或 $P_n^r=0$。

例 1.2.1 从 6 个不同数 1,2,3,4,5,6 中选取两个数排成一排，共有 $P(6,2)$ 种方法，那么，$P(6,2)$ 的排列方法有

1,2； 2,1； 1,3； 3,1； 1,4； 4,1； 1,5； 5,1； 1,6； 6,1；
2,3； 3,2； 2,4； 4,2； 2,5； 5,2； 2,6； 6,2；
3,4； 4,3； 3,5； 5,3； 3,6； 6,3；
4,5； 5,4； 4,6； 6,4；

$$5,6;\quad 6,5$$

即 $10+8+6+4+2=30$ 种，所以，$P(6,2)=30$。

定理 1.2.1 在没有其他条件的情况下，从 n 个不同的元素中选取 r 个元素，并将其排成一排的方法数满足

$$P(n,r)=P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

证 设有 n 个不同的物品（球）$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 r 个标有标号的箱子 $K_1,K_2,\cdots,K_r$，从这 n 个不同的物品（球）中选取 r 个物品（球），并将其排成一排，相当于从 n 个不同的物品（球）中选取 r 个物品（球），放入这 r 个标有标号的箱子 $K_1,K_2,\cdots,K_r$ 中，这 r 个标有标号的箱子 $K_1,K_2,\cdots,K_r$ 中的每个箱子只能放入一个物品（球）（图 1－1）。

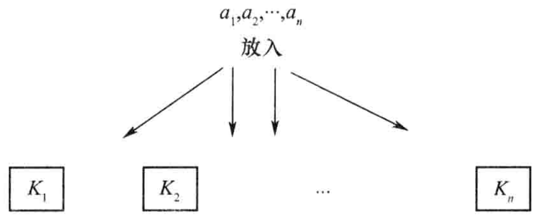

图 1－1

在标有标号 K_1 的箱子中放入 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中一个物品（球），有 n 种选法；在标有标号 K_2 的箱子中放入一个物品（球）有 $n-1$ 种选法；以此类推，在标有标号 K_r 的箱子中放入一个物品（球）有 $n-r+1$ 种选法，根据乘法法则，从 n 个不同的物品（球）中选取 r 个物品（球），放入这 r 个标有标号的箱子 $K_1,K_2,\cdots,K_r$ 中共有

$$P(n,r)=P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

种方法，所以，定理 1.2.1 成立。

当 $r=n$ 时，$P(n,n)=P_n^n=n!$。

例 1.2.2 从 6 个不同数 1,2,3,4,5,6 中选取两个数排成一排，共有 $P(6,2)$ 种方法，那么，有

$$P(6,2)=6\times 5=\frac{6!}{(6-4)!}=30$$

例 1.2.3 一副扑克纸牌共有 54 张，4 个人一起玩，其中的一个人有多少种不同的牌型？

解 一副扑克纸牌共有 54 张，4 个人一起玩，其中的一个人手中有

$$\frac{54}{4}=13$$

张牌，那么，某个人有

$$P(54,13)=\frac{54!}{(54-13)!}=\frac{54!}{41!}=6.9\times 10^{21}$$

种不同的牌型。

1.2.2 有条件的排列

现实生活中有关排列的问题有许多，简单的排列问题较少，而带有条件的排列却很多。

例 1.2.4 一个班级共 30 人,男生 18 人,女生 12 人,学校运动会上进行班级体操表演,学生需要排成一排,要求任意女生不能排到一起,求共有多少种排法?

解 本题 要求两个任意女生不能排到一起,那么,先将 18 名男生排成一排,共有 P_{18}^{18}种排法。这样,就有 19 个位置可以排列 12 名女生,从 19 个位置选取 12 个位置排女生有 P_{19}^{12}种排法。根据乘法法则,本题共有 $P_{18}^{18}P_{19}^{12}$种排法。

例 1.2.5 一个集合 A 包含元素 a,b,c,d,e,f,g 共 7 个字母 ,要从集合 A 中选取 5 个不同字母排成一列,且所选字母中要包含 ce 形式,求共有多少种排列的方法?

解 根据本题的要求,所选 7 个 字母中要有包含 ce 形式,相当于从 a,b,d,f,g 这 5 个字母中选取 3 个字母与 ce 这个两个字母构成的整体进行排列。

从 a,b,d,f,g 这 5 个字母中选取 3 个字母有 P_5^3 种排法;现在 ce 有 4 个位置可选,共有 4 种排法;

根据乘法法则,本题共有 $4P_5^3=4\times5\times4\times3=240$ 种排法。

例 1.2.6 一个集合 A 包含元素 a,b,c,d,e,f,g 共 7 个字母 ,要从集合 A 中选取 5 个不同字母排成一列,且所选字母中 c,e 一定不排在一起,求共有多少选取字母的方法?

解 由例 1.2.5 知,包含 ce 形式的排法有 $4P_5^3$ 种排法;包含 ec 形式的排法也有 $4P_5^3$ 种排法;那么,字母 c,e 一定不排在一起的排法为

$$\begin{aligned}
&P_7^5-2\times4P_5^3\\
&\quad=7\times6\times5\times4\times3-2\times4\times5\times4\times3\\
&\quad=2520-480\\
&\quad=2040
\end{aligned}$$

1.2.3 圆排列

生活中经常有这样的情况,几位好友一起出去吃饭,饭店只剩下一张圆桌可用,那么,这几位朋友有多少种坐法就是圆排列问题。世界上著名的圆桌会议就是其重要应用之一。公司要请重要客户吃饭,秘书在饭店订了一张圆桌,公司领导和重要客户的座位安排问题也是一种圆排列问题。

例 1.2.7 4 位朋友出去吃饭,饭店只剩下一张圆桌可用,那么,这 4 位朋友有多少种坐法?

解 将这 4 位朋友用 1,2,3,4 表示。4 个数字的全排列有 P_4^4 种;按顺时针方向,将具有相同坐法的排列构成一个集合,有

$$\begin{gathered}
\{1234,\ 2341,\ 3412,\ 4123\}\\
\{1342,\ 3421,\ 4213,\ 2134\}\\
\{1423,\ 4231,\ 2314,\ 3142\}\\
\{1432,\ 4321,\ 3214,\ 2143\}\\
\{2413,\ 4132,\ 1324,\ 3241\}\\
\{4312,\ 3124,\ 1243,\ 2431\}
\end{gathered}$$

所以,这 4 位朋友有$\frac{4!}{4}=3!\ =6$ 种坐法(图 1-2),即

$$1234;\ 1342;\ 1423;\ 1432;\ 2413;\ 4312$$

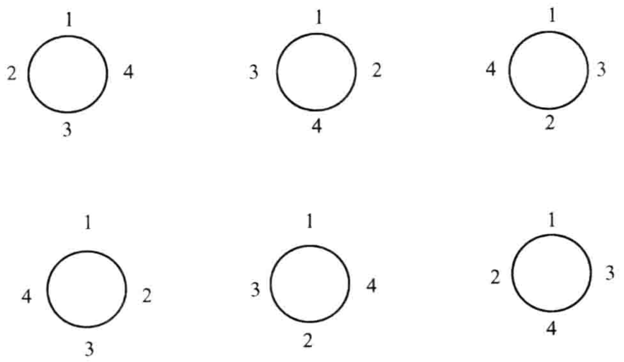

图 1－2

如果只考虑相邻的问题,则这 4 位朋友有$\frac{4!}{2\times4}=3$ 种坐法(图 1－3),即

$$1234;\ 1342;\ 1423$$

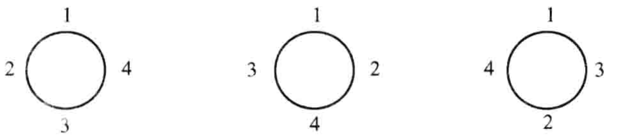

图 1－3

定义 1.2.2 从 n 个不同元素中不重复地选取 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个元素按一定顺序排在一个圆周上,称这种排列为从 n 个不同元素中选取 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个元素的圆排列。

定理 1.2.2 从 n 个不同元素中选取 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个元素的圆排列的个数为

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r\cdot(n-r)!}$$

当 $r=n$ 时,n 个不同元素的圆排列个数为 $(n-1)!$。

证 从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中不重复地选取 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个元素排成一排共有 P_n^r 种方法。

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意 r 个元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir}$ 有 r 个相同性质的排列,其中 $1\leqslant i\leqslant P_n^r$,所以,将这 P_n^r 种方法中具有相同性质的 r 个元素构成一个集合称为一类,则有$\frac{P(n,r)}{r}$类。

所以,从 n 个不同元素中选取 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个元素的圆排列的个数等于类数,即

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r\cdot(n-r)!}$$

当 $r=n$ 时,n 个不同元素的圆排列个数为$\frac{n!}{r\cdot(n-n)!}=(n-1)!$。

例 1.2.8 从包含元素 a,b,c,d,e,f,g 共 7 个字母的 集合 A 中不重复地选取 5 个字母的圆排列个数是多少?

解 由定理 1.2.2 知,从包含元素 a,b,c,d,e,f,g 共 7 个字母的 集合 A 中不重复地选取 5 个字母的圆排列个数是

$$\frac{P(7,5)}{5}=\frac{7!}{5\times(7-5)!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times2\times1}=7\times6\times4\times3=504$$

1.3 组　合

定义 1.3.1 在没有其他条件的情况下，从 n 个不同元素中不重复地选取 r 个元素的方法，称为 n 个元素的 r 组合，记为 $C(n,r)$ 或 C_n^r，也记为 $\binom{n}{r}$。

当 $r=n$ 时，$C(n,n)$ 表示从 n 个不同元素中不重复地选取 n 个元素，这种选取方法只有一种，所以，$C(n,n)=1$；

当 $r=0$ 时，$C(n,0)$ 表示从 n 个不同元素中不重复地选取 0 个元素，这种选取方法也只有一种，所以，$C(n,0)=1$；

当 $r>n$ 时，$C(n,r)$ 表示从 n 个不同元素中不重复地选取多于 n 的 r 个元素，这种选取方法不存在，所以，$C(n,r)=0$。

例 1.3.1 从 6 个不同的数 1,2,3,4,5,6 中选取 2 个不同的数，有

1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,3	2,4	2,5	2,6	
3,4	3,5	3,6		
4,5	4,6			
5,6				

共 $1+2+3+4+5=15$ 种选取的方法，则 $C(6,2)=15$。

定理 1.3.1 在没有其他条件的情况下，从 n 个不同元素中不重复地选取 r 个元素的方法的 n 个元素的 r 组合 $C(n,r)$ 或 C_n^r 满足

$$C(n,r)=C_n^r=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证 在没有其他条件的情况下，从 n 个不同元素中不重复地选取 r 个元素排成一排可以看成先从 n 个不同元素中不重复地选取 r 个元素再将这 r 个元素排成一排。

从 n 个不同元素中不重复地选取 r 个元素排成一排的排列数 $P(n,r)$ 等于先从 n 个不同元素中不重复地选取 r 个元素的组合数 $C(n,r)$ 乘以将这 r 个元素排成一排的全排数 $r!$。有

$$P(n,r)=C(n,r)r!$$

即

$$C(n,r)=C_n^r=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

例 1.3.1 中的组合数 $C(6,2)=\dfrac{P(6,2)}{2!}=\dfrac{6!}{2!\ (6-2)!}=\dfrac{6\times5}{2}=15$。

例 1.3.2 一个班级需要从 30 名男生中选取 15 人建立一支足球队，问有多少种选法？

解 这是一个很明显的简单组合问题，从 30 中选 15 的组合数为 $C(30,15)$。

定理 1.3.2 对于 n 个不同元素的 r 组合 $C(n,r)$ 或 C_n^r 满足

$$C(n,r)=C(n,n-r)$$