平面有向几何学

●喻德生 著

科学出版社

平面有向几何学

喻德生 著

科学出版社
北京

内容简介

本书主要以平面有向度量为研究对象，以平面有向度量定值法为研究方法，构造平面有向度量的定值定理，创立平面有向几何学的知识体系. 内容主要包括两点间有向距离、点到直线间有向距离公式及应用，二次曲线中有向距离的定值定理及应用，多边形、分点多边形和线型三角形有向面积公式及应用，内(外)多边形、垂足多边形、各类二次曲线切多边形和一般圆锥曲线外切多边形中有向面积的定值定理及应用等. 它对开拓数学的研究领域，揭示事物之间本质的联系，探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义；对丰富几何学各学科、以及相关数学学科的教学内容，促进大、中学数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义；此外，有向几何学的研究成果和研究方法，对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

本书可供数学研究工作者、大学和中学数学教师、大学数学专业学生和研究生以及高中生阅读，可以作为平面有向几何学和中学数学竞赛的教材，也可供相关学科专业师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

平面有向几何学/喻德生著. —北京：科学出版社，2014.3

ISBN 978-7-03-040153-3

Ⅰ.①平… Ⅱ.①喻… Ⅲ.①平面几何 Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 046672 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：何艳萍

责任印制：赵德静／封面设计：王　浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16

2014 年 3 月第一次印刷　印张：23 3/4

字数：461 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

“有向”是自然科学中的一个十分重要而又应用非常广泛的概念. 我们经常遇到的有向数学模型无外乎如下两类:

一是“泛物”的有向性. 如微积分学中的左右极限、左右连续、左右导数等用到的量的有向性, 定积分中用到的线段 (即区间) 的有向性, 对坐标的曲线积分用到的曲线的有向性, 对坐标的曲面积分用到的曲面的有向性等, 这些都是有向性的例子. 尽管这里的问题很不相同, 但是它们都只有正、负两个方向, 因此称为“泛物”的有向性. 然而, 这里的有向性没有可加性, 不便运算.

二是“泛向”的有向量, 亦即我们在数学与物理中广泛使用的向量. 我们知道, 这里的向量有无穷多个方向, 而且两个方向不同的向量相加通常得到一个方向不同的向量. 因此, 我们称为“泛向”的有向量. 这种“泛向”的有向数学模型, 对我们来说方向太多, 不便应用.

然而, 正是由于“泛向”有向量的可加性与“泛物”有向性的二值性, 启示我们研究一种既有二值有向性又有可加性的几何量. 一维空间的有向距离, 二维空间的有向面积, 三维空间乃至一般的 N 维空间的有向体积等, 都是这种几何量的例子. 一般地, 我们把带有方向的度量称为有向度量.

“有向度量”并不是数学中一个全新的概念, 各种有向度量的概念散见于一些数学文献中. 但是, 有向度量的概念并未发展成为数学中的一个重要概念. 有向度量的应用仅仅局限于其“有向性”, 而极少触及其“可加性”. 要使有向度量的概念变得更加有用, 要发现各种有向度量的规律性, 使有向度量的知识系统化, 就必须对有向度量进行深入的研究, 创立一门独立的几何学 —— 有向几何学. 为此, 必须明确有向几何学的研究对象, 确立有向几何学的研究方法, 构建有向几何学的知识体系. 这对开拓数学研究的领域, 揭示事物之间本质的联系, 探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义; 对丰富几何学各学科以及相关数学学科, 特别是数学分析、高等代数等学科的教学内容, 促进高等学校数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义; 此外, 有向几何学的研究成果和研究方法, 对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

就我们所知, 著名数学家希尔伯特在他的数学名著《直观几何》中, 利用三角形的有向面积证明了一个简单的几何问题, 这是历史上较早的使用有向面积证题的例子. 20 世纪 50~60 年代, 著名数学家 Wilhelm Blaschke 在他的《圆与球》中, 利用有向面积深入地讨论了圆的极小性问题, 这是历史上比较系统地使用有向面积法

解决问题的例子. 但是, 有向面积法并未发展成一种普遍使用而又十分有效的方法.

20 世纪 80~90 年代, 我国著名数学家吴文俊院士和张景中院士, 开创了数学机械化的研究, 而计算机中使用的距离和面积都是有向的, 因此数学机械化的研究拓广了有向距离和有向面积应用的范围. 特别是张景中院士十分注重面积关系在数学机器证明中的作用, 指出面积关系是 "数学中的一个重要关系", 并利用面积关系创立了一种可读的数学机器证明方法 —— 即所谓的消点法, 也称为面积法.

近年来, 我们在分析与借鉴上述两种思想方法的基础上, 发展了一种研究有向几何问题的方法, 即所谓的有向度量定值法. 除上述提到的两个原因外, 我们也受到如下两种数学思想方法的影响.

一是数学建模的思想方法. 我们知道, 一个数学模型通常不是一个简单的数学结论. 它往往包含一个或多个参数, 只要给定参数的一个值, 就可以得出一个相应的结论. 这与经典几何学中一个一个的、较少体现知识之间联系的结论形成了鲜明的对照. 因此, 我们自然会问, 几何学中能建立涵盖面如此广泛的结论吗? 这样, 寻找几何学中联系不同结论的参数, 进行几何学中的数学建模, 就成为我们研究有向几何问题的一个重点.

二是函数论中的连续与不动点的思想方法. 我们知道, 经典几何学中的结论通常是离散的, 一个结论就要给出一个证明, 比较麻烦. 我们能否引进一个连续变化的量, 使得对于变量的每一个值, 某个几何量或某几个几何量之间的关系始终是不变的. 这样, 构造几何量之间的定值模型就成为我们研究有向几何问题的一个突破口.

尽管几何定值问题的研究较早, 一些方面的研究也比较深入, 但有向度量定值问题的研究尚处于起步阶段. 近年来, 我们研究了有向距离、有向面积定值的一些问题, 得到了一些比较好的结果, 并揭示了这些结果与一些著名的几何结论之间的联系. 不仅使很多著名的几何定理 ——Euler 定理、Pappus 定理、Pappus 公式、蝴蝶定理、Servois 定理、中线定理、Harcourt 定理、Carnot 定理、Brahmagupta 定理、切线与辅助圆定理、Anthemius 定理、焦点和切线的 Apollonius 定理、Zerr 定理、配极定理、Salmon 定理、二次曲线的 Pappus 定理、两直线上的 Pappus 定理、Desarques 定理、Ceva 定理、等截共轭点定理、共轭直径的 Apollonius 定理、正弦及余弦差角公式、Weitzentock 不等式、默比乌斯定理、Monge 公式、Gauss 五边形公式、Erdos-Mordell 不等式、Gauss 定理、Gergonne 定理、梯形的施泰纳定理、拿破仑三角形定理、Cesaro 定理、三角形的中垂线定理、Simson 定理、三角形的共点线定理、完全四边形的 Simson 线定理、高线定理、Neuberg 定理、共点线的施泰纳定理、Zvonko Cerin's 定理、双重透视定理、三重透视定理、Pappus 重心定理、角平分线定理和一大批数学竞赛题在有向度量的思想方法下得到了推广或证明, 有向度量如 Menelans 定理、Newton 定理、Brianchon 定理等结论之间的内

在联系. 显示出有向面积定值法的新颖性、综合性、有效性和简洁性. 特别是三角形、四边形和在二次曲线外切多边形中有向面积定值问题的研究, 涵盖面广、内容丰富、结论优美, 并引起了国内外数学界的关注.

打个比方说, 如果我们把经典的几何定理看成是一颗颗的珍珠, 那么几何有向度量的定值定理就像一条条的项链, 把一些看似没有联系的若干几何定理串连起来, 形成一个完美的整体. 因此, 几何有向度量的定值定理更能体现事物之间的联系, 揭示事物的本质.

在这些研究的基础上, 我们一方面不仅可以继续深入研究平面有向度量定值问题, 而且可以系统地总结已有的结果, 对有向几何学 (平面部分) 的研究对象、研究方法、研究内容进行纵深的阐述, 构建平面有向几何学的知识体系; 另一方面, 也可以把平面有向度量定值法推广到一般的 N 维空间中去, 从而研究一般 N 维空间中有向度量的定值问题. 本书仅仅是上述构想的一个尝试, 希望起到抛砖引玉的作用.

本书得到南昌航空大学科研成果专项资助基金和国家自然科学基金 (No:11261040) 的资助, 得到中国科学院张景中院士和中国科学技术大学博士生导师、湖州师范学院特聘教授刘太顺先生的大力推荐, 在此表示衷心感谢!

同时, 也感谢南昌航空大学数学与信息科学学院领导和袁达明副教授、科学出版社陈玉琢编辑的关心与帮助, 感谢我的导师、江西师范大学教授林金榕先生的指引以及我的硕士研究生漆志鹏、师晶、梁学礼、陈佳英、程程、刘烨、徐英博、刘朝霞、江卯、汪晶等参与本书编写有关的工作.

由于笔者阅历、水平有限, 书中可能出现疏漏、甚至错误, 敬请国内外同仁和读者不吝批评指正.

作 者

2013 年 7 月

目　　录

第 1 章　两点间的有向距离及其应用

1.1　两点间的有向距离公式

两点间的有向距离, 就是最简单的一维图形——线段的有向距离. 从几何上来看, 点是最简单的图形——零维的图形, 因此两点的距离可以看成是两个零维图形之间的有向距离.

两点间的有向距离不仅与点, 而且与点的先后次序有关, 因此必须把两点相同但首尾不同的线段 P_1P_2, P_2P_1 区别开来.

本节首先给出两点间的有向距离的概念、有向距离公式与性质, 再介绍有向距离的一些结论和有向距离的简单应用, 包括 Chasle's 定理、Euler 定理、Pappus 定理、线段调和分割定理、Stewart 定理、Pappus 公式等的证明或推广.

1.1.1　两点间有向距离的概念、性质与公式

定义 1.1.1　设 P_1, P_2 是 u 轴上的两点, P_1, P_2 间的距离为 $d_{P_1P_2}$, 则线段 P_1P_2 的有向距离, 也就是点 P_1 到 p_2 间的有向距离定义为

$$D_{P_1P_2} = \pm d_{P_1P_2},$$

其中, 当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 u 轴的正向相同时, 取 "+" 号, 相反时取 "−" 号.

特别, 当 P_1, P_2 重合时, 我们把点看成是线段的特殊情形, 并规定其距离为零.

显然, $D_{P_1P_2} = -D_{P_2P_1}$.

定理 1.1.1　设 P_1, P_2 是 x 轴上的两点, 它们坐标分别为 x_1, x_2, 则线段 P_1P_2 的有向距离为

$$D_{P_1P_2} = x_2 - x_1. \tag{1.1.1}$$

证明　如图 1.1.1 所示. 因为 P_1, P_2 两点间的距离 $d_{P_1P_2} = |x_2 - x_1|$, 所以 $D_{P_1P_2} = \pm|x_2 - x_1|$.

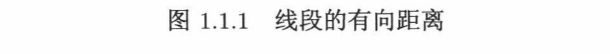

图 1.1.1　线段的有向距离

当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 x 轴的正向相同时, $x_2 > x_1$, 故 $D_{P_1P_2} = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$; 当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 x 轴的正向相反时, $x_2 < x_1$, 故 $D_{P_1P_2} = -|x_2 - x_1| =$

$-(x_1 - x_2) = x_2 - x_1$; 当 P_1, P_2 重合时, $x_1 = x_2$, 故 $D_{P_1P_2} = 0$. 从而式 (1.1.1) 成立.

定理 1.1.2　设 $P_1, P_2; Q_1, Q_2$ 是 x 轴上的四点, 它们坐标分别为 $x_1, x_2; x_1', x_2'$, 则

$$D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = k(x_2' - x_1').$$

证明　由定理 1.1.1 即得.

1.1.2　两点间有向距离的基本结论

定理 1.1.3　设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是一直线上的 n 个点, 则

$$D_{P_1P_2} + D_{P_2P_3} + \cdots + D_{P_{n-1}P_n} = D_{P_1P_n}.$$

证明　设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的坐标分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则由定理 1.1.1 得

$$D_{P_1P_2} = x_2 - x_1, D_{P_2P_3} = x_3 - x_2, \cdots, D_{P_{n-1}P_n} = x_n - x_{n-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}&D_{P_1P_2} + D_{P_2P_3} + \cdots + D_{P_{n-1}P_n}\\=&(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_1 = D_{P_1P_n}.\end{aligned}$$

注 1.1.1　当 $n = 3$ 时, 定理 1.1.3 即为著名的 Chasle's 定理.

定理 1.1.4(Euler 定理)　设 P_1, P_2, P_3, P_4 是一直线上的四点, 则

$$D_{P_1P_2} \cdot D_{P_3P_4} + D_{P_1P_4} \cdot D_{P_2P_3} = D_{P_1P_3} \cdot D_{P_2P_4}.$$

证明　设 P_1, P_2, P_3, P_4 的坐标分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, 则

$$\begin{aligned}&D_{P_1P_2} \cdot D_{P_3P_4} + D_{P_1P_4} \cdot D_{P_2P_3}\\=&(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_4 - x_1)(x_3 - x_2)\\=&x_1x_2 + x_3x_4 - x_2x_3 - x_1x_4\\=&(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) = D_{P_1P_3} \cdot D_{P_2P_4}.\end{aligned}$$

注 1.1.2　定理 1.1.4 可以看成是托勒密定理中圆变成直线的特殊情形.

定理 1.1.5(Pappus 定理)[1]　(1) 设 A, B, C, D 是一条直线上的四点, 则

$$D_{DA}^2 \cdot D_{BC} + D_{DB}^2 \cdot D_{CA} + D_{DC}^2 \cdot D_{AB} + D_{BC} \cdot D_{CA} \cdot D_{AB} = 0;$$

(2) 设 M, N 分别是分有向线段 AB 成定比 $m : n, m : (-n)(m > n > 0)$ 的内分点和外分点, O 为 MN 的中点, 则

$$D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}.$$

证明 (1) 如图 1.1.2 所示. 以 D 为坐标原点建立坐标轴, 并设 A, B, C 的坐标分别为 x_1, x_2, x_3.

图 1.1.2 直线上任意的四点

于是

$$\begin{aligned}
&D_{DA}^2 \cdot D_{BC} + D_{DB}^2 \cdot D_{CA} + D_{DC}^2 \cdot D_{AB} + D_{BC} \cdot D_{CA} \cdot D_{AB} \\
=&x_1^2(x_3 - x_2) + x_2^2(x_1 - x_3) + x_3^2(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\
=&(x_1 - x_2)(x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2) + (x_2 - x_1)(x_1x_3 - x_1x_2 + x_2x_3) = 0.
\end{aligned}$$

(2) 如图 1.1.3 所示. 以 O 为坐标原点建立坐标轴, 并设 A, B, M, N 的坐标分别为 $x_1, x_2, x, -x$.

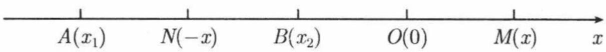

图 1.1.3 线段的定比分点

于是由

$$\frac{D_{AM}}{D_{MB}} = \frac{m}{n} = -\frac{D_{AN}}{D_{NB}},$$

得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = -\frac{-x - x_1}{x_2 + x} = \frac{x + x_1}{x_2 + x},$$

从而

$$(x - x_1)(x_2 + x) = (x_2 - x)(x + x_1) \Rightarrow x^2 = x_1x_2 \Rightarrow D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}.$$

定理 1.1.6 设 M, N 分别是有向线段 AB 及其延长线上的点. (1) 若点对 M, N 调和分割点对 A, B, 且 $D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$, 则 O 为 MN 的中点; (2) 若 O 为 MN 的中点, 且 $D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$, 则点对 M, N 调和分割点对 A, B.

证明 如图 1.1.4 所示. 以 AB 的中点 G 为原点, AB 所在直线建立坐标轴, 并设点 A, B, M, N, O 的坐标分别为 $-x_1, x_1, x_2, x, x'$.

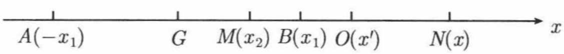

图 1.1.4 线段的调和分割

(1) 由 M, N 调和分割点对 A, B, 即 $\dfrac{D_{AM}}{D_{MB}} = -\dfrac{D_{AN}}{D_{NB}}$, 以及有向距离公式得

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1 - x_2} = -\frac{x + x_1}{x_1 - x} \Rightarrow x = \frac{x_1^2}{x_2},$$

因此 MN 中点的坐标为 $x' = \dfrac{x + x_2}{2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2}$.

又由 $D_{OM}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$ 得

$$(x_2 - x')^2 = (-x_1 - x')(x_1 - x') \Rightarrow x' = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2},$$

因为 O 的坐标与 MN 中点的坐标相同, 所以 O 是 MN 中点.

(2) 由 $D_{OM}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$ 得

$$(x_2 - x')^2 = (-x_1 - x')(x_1 - x') \Rightarrow x' = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2}.$$

又因为 O 是 MN 中点, 所以

$$\frac{x_2 + x}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2} \Rightarrow x = \frac{x_1^2}{x_2}.$$

于是

$$\frac{D_{AM}}{D_{MB}} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 - x_2}, \quad \frac{D_{AN}}{D_{NB}} = \frac{x_1^2/x_2 + x_1}{x_1 - x_1^2/x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{D_{AM}}{D_{MB}} = -\frac{D_{AN}}{D_{NB}},$$

即点对 M, N 调和分割点对 A, B.

定理 1.1.7 设 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 所在直线上任意一点, 则

$$D_{AB}^2 \cdot D_{PC} + D_{CA}^2 \cdot D_{PB} - D_{PA}^2 \cdot D_{BC} + D_{BC}D_{PC}D_{PB} = 0(\text{为定值}). \tag{1.1.2}$$

证明 如图 1.1.5 所示. 取 B 为坐标原点, BC 为 x 建立直角坐标系. 设 A, C, P 的坐标分别为 $(a, b), (c, 0), (x, 0)$, 则

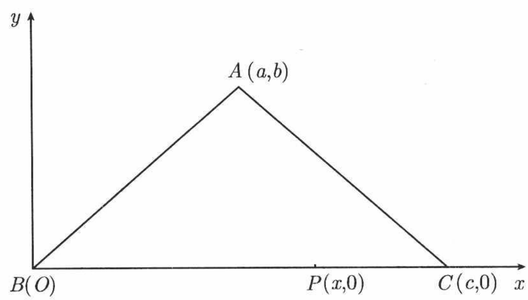

图 1.1.5 三角形 BC 边所在直线上任意一点

$$D_{AB}^2 = a^2 + b^2, D_{CA}^2 = (c-a)^2 + b^2, D_{PA}^2 = (a-x)^2 + b^2,$$
$$D_{PC} = c - x, D_{BC} = c, D_{PB} = x.$$

于是

$$\begin{aligned}
&D_{AB}^2 \cdot D_{PC} + D_{CA}^2 \cdot D_{PB} - D_{PA}^2 \cdot D_{BC} + D_{BC}D_{PC}D_{PB} \\
=&(a^2+b^2)(c-x) + [(c-a)^2+b^2]x - [(a-x)^2+b^2]c + c(c-x)x \\
=&cx^2 + [(c-a)^2 + b^2 - (a^2+b^2) + 2ac]x + [(a^2+b^2)c - (a^2+b^2)c] + c(c-x)x = 0.
\end{aligned}$$

注 1.1.3 当 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点时, 定理 1.7 即为 Stewart 定理[1].

推论 1.1.1(Pappus 公式) 设 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点, 则

$$D_{AB}^2 + D_{CA}^2 = 2(D_{MA}^2 + D_{MB}^2).$$

证明 在式 (1.1.2) 中令 P 为 BC 的中点 M, 并将 $D_{BM} = D_{MC} = \dfrac{1}{2}D_{BC}$ 代入式 (1.1.2) 即得.

1.2 两点间有向距离公式在几何证明中的应用

本节主要讨论两点间有向距离公式在几何证明中的应用. 首先给出过平面四边形对角线交点直线的一个性质及推论; 其次给出平行于椭圆半轴直线的一个性质及推论, 从而推出著名的蝴蝶定理; 最后给出著名的欧拉定理、Servois 定理和一些数学竞赛题等的推广或证明.

1.2.1 过平面四边形对角线交点直线的性质与应用

定理 1.2.1 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是平面四边形 (不必是凸的), 过对角线 P_1P_3, P_2P_4 交点 O 的直线 l 与各边 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ 的交点依次为 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, 则

$$\sum_{i=1}^{4}(-1)^i\frac{1}{D_{OQ_i}} = \frac{1}{D_{OQ_1}} + \frac{1}{D_{OQ_3}} - \frac{1}{D_{OQ_2}} - \frac{1}{D_{OQ_4}} = 0.$$

证明 如图 1.2.1 所示. 以 O 为坐标原点, l 为横轴建立坐标系. 设 $P_1P_2P_3P_4$ 的顶点坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3, 4)$. 于是由 P_1, O, P_3 和 P_2, O, P_4 共线, 可得

$$y_3 = \frac{x_3y_1}{x_1}, \quad y_4 = \frac{x_4y_2}{x_2}.$$