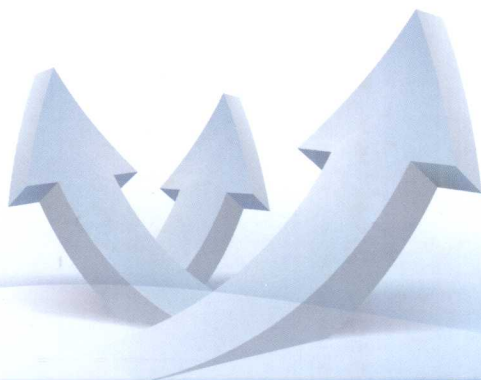


GENERALIZED DYNAMIC INPUT-OUTPUT PRINCIPLE



GENERALIZED
DYNAMIC INPUT-OUTPUT PRINCIPLE

广义动态投入产出原理

冯光明 著



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

014033380

F223
32

广义动态投入产出原理

冯光明 著



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

·北京·



北航

C1721889

F223
32

01033380

图书在版编目(CIP)数据

广义动态投入产出原理/冯光明著.

北京:中国经济出版社,2014.1

ISBN 978-7-5136-2907-2

I. 广… II. ①冯… III. ①投入产出模型—动态模型—研究 IV. ①F223

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第260065号

责任编辑 涂 晟
责任审读 霍宏涛
责任印制 马小宾
封面设计 华子图文设计公司

出版发行 中国经济出版社
印刷者 北京科信印刷有限公司
经销者 各地新华书店
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 16.5
字 数 370千字
版 次 2014年1月第1版
印 次 2014年1月第1次
书 号 ISBN 978-7-5136-2907-2/F·9927
定 价 59.00元

中国经济出版社 网址 www.economyph.com 社址 北京市西城区百万庄北街3号 邮编 100037

本版图书如存在印装质量问题,请与本社发行中心联系调换(联系电话:010-68319116)

版权所有 盗版必究(举报电话:010-68359418 010-68319282)

国家版权局反盗版举报中心(举报电话:12390) 服务热线:010-68344225 88386794

序

当你打开本书，看见那些数据和表格，你可能会觉得枯燥无味、兴趣索然；但是，当你理解了这些数据和表格时，你顿时会发现，呈现在面前的是一个前所未有的世界！正如一个名人所说：一张表，一个世界。

在经济学说史上，最先试图用一张表来诠释经济运行的人，无疑是重农学派的魁奈(F. Quesnay)。魁奈的《经济表》有“原表”、“略表”，即“经济表范式”。“原表”作于1758年。在《经济表》中，魁奈试图说明社会总资本的再生产和流通过程。

能够成功地运用一张表描述经济世界的人，是诺贝尔奖金获得者美籍俄罗斯经济学家瓦西里·列昂惕夫(W. Leontief)。1936年列昂惕夫发表了“美国经济制度中投入产出的数量关系”一文，标志着投入产出分析的诞生。1942—1944年，列昂惕夫指导并参与编制了美国1939年的投入产出表，并运用该表成功预测了战后钢铁工业生产和就业情况。其后，美国官方又先后编制了从1947年至1972年等众多年份的投入产出表。从20世纪50年代开始，投入产出分析先后传入西欧、日本、苏联和东欧，以及亚非拉许多发展中国家。

一张又一张的投入产出表，像经纬分明的数字地图，记录了世界各国在某一年份或者某一时段国民经济发展的脉络。但是，不同年份的投入产出表，只能孤立、静止地表述某个时点或者某个时段国民经济发展的状况，并不能揭示各个时点的投入产出表之间存在着何种内在与必然的联系。

1948年戴维·哈京斯(D. Harkins)提出了以微分方程组形式表述的投入产出动态模型。1953年列昂惕夫在哈京斯等人的研究基础上，系统地研究和提出了动态投入产出模型，把动态模型分为封闭式和开放式两种形式。1958年多夫曼(R. Dorfman)、萨缪尔逊(P. A. Samuelson)和索洛(R. M. Solow)结合线性规划对投入产出结构进行动态分析，并提出了所谓快车道定理。1970年列昂惕夫发表了著名的“动态逆矩阵”一文。但是，只要对投入产出的结构分析局限在自然时间序列的基础上，就难以达到理论预测与实际发生事件在时间步长及时点上不一致的难题，从而不具备预测未来事件所必要的必然再现性特征。

马赫认为，时间和空间的量度与物质运动有关。休谟认为，空间和广延不是别的，而是按一定次序分布的可见对象充满空间，而时间总是由能够变化的对象出现可觉察的变化而被发现。人的时间和空间观念来自于印象与观念的排列方式。休谟举例并认

为，长笛上演奏的五个音符给我们一个时间的印象，但时间的印象不是第六个印象加到其他五个之上的。因此，时空观念仅仅是由一定方式排列的、不同的具体知觉抽象出来的一般抽象观念。

对于马赫和休谟的哲学思想及其学术体系，经典作家已经作出了全面而深刻的评述。但是，马赫与休谟关于时间和空间观念的历史进步意义，是对牛顿绝对静止时空观的否定与批判。作为佐证的是，由于受到马赫与休谟关于时间和空间观念的启发，1905年爱因斯坦运用洛仑兹变换推出了光速不变和相对性原理，创立了狭义相对论。在相对论中，时间与空间构成了不可分割的四维时空，质量和能量是与运动状态相联系，动量和能量实现了统一。由此给人们的启发是：不存在绝对静止的参照物，时间的测量也是随参照系不同而各异。

本书采取的“生产功能结构分类法”，源于对人类历史上劳动资料发展演变的考证，是在比较研究人与生产工具之间功能分工历史演变中，抽象出具有共性特征并予以归纳的结果。因此，按照生产功能结构分类法进行部门分类，一开始就以超出自然时间步长的跨度，摆脱了固定不变的自然时间步长及其序列的束缚，进而使投入产出的动态结构分析，建立在人与生产工具及其相互之间生产功能所具有共性的律动或演变的基础上。关于这一点，务请读者格外注意，即使是形式看似相同的公式，在广义动态投入产出系统中可能会具有不同的含义。

众所周知，庞特尼雅金的最大化原理和贝尔曼的动态规划方法，是现代最优控制理论的基石。本书尝试运用庞特尼雅金最大化原理作为一阶条件，通过构造现值哈密顿函数，构造并求解对应的雅可比矩阵，求取以非齐次微分方程组特解与通解形式，所构成广义非线性动态投入产出模型的庞特尼雅金最大值解，并推广到多种类型并存的情形。由于属于首次尝试性的探索，其中难免会有不足以至谬误之处，恳请学术界的各位前辈与同行不吝赐教！

“秋水文章不染尘”，通常形容一种理论著作具有直达宇宙奥秘的穿透力。这是一代又一代不知疲倦的探索者们所向往和追求的目标，本人愧不能至，但心向往之。总之，本书虽是千虑之一得，但仍属管中窥豹，希望作为引玉之砖，以求取各位前辈与同行的指教！

冯光明

2013年11月30日

目 录

第一章 投入产出理论的渊源与沿革	1
一、投入产出理论的由来	1
二、思想渊源与理论发展	2
第二章 静态投入产出模型	4
一、实物形态投入产出模型	4
二、价值形态投入产出模型	8
第三章 固定资产投入产出模型	16
一、劳动资料占用模型	16
二、固定资产投资模型	22
第四章 线性动态投入产出模型	30
一、连续型线性动态投入产出模型	30
二、离散型动态投入产出模型	33
第五章 广义再生产论	37
一、分类法的比较	37
二、劳动资料演变的历史证据	40
三、生产力的基本类型及其结构变动	53
四、分工与生产组织的历史演变	55
五、广义再生产模型	93
第六章 广义线性动态投入产出模型	102
一、简化的差分方程式线性动态投入产出模型	102

二、广义逆矩阵	104
三、劳动资料的基本类型与更替	106
四、生产工具的劳动功能化规律	108
五、各个类型社会产品结构的发展与更替	113
六、广义线性动态投入产出模型	124
第七章 不同类型并存的广义线性动态投入产出模型	135
一、两种类型并存的两个部门线性动态投入产出模型	135
二、两个部门使用同一类型劳动资料进行生产的情形	137
三、两个部门使用两种类型劳动资料进行生产的情形	139
四、多个部门使用多种类型劳动资料进行生产的情形	142
第八章 变分法	145
一、古典变分法	145
二、欧拉方程与无约束条件的泛函极值	148
三、泛函极值的定性与检验	150
四、李雅普诺夫稳定性分析	153
第九章 最优控制理论	163
一、有约束的多变量泛函极值	163
二、拉格朗日乘数	164
三、卡罗需-库恩-塔克条件	167
四、哈密顿函数	169
五、庞特尼雅金的最大值原理	172
六、极大值原理的几种具体形式	179
七、离散时间动态系统的最小值原理	194
第十章 动态规划的基本理论与模型	198
一、多阶段决策问题	198
二、基本概念、范畴与符号	200
三、最优性原理和基本方程	201
四、哈密顿-雅可比-贝尔曼方程	207
五、树型动态规划	211
六、创新：一个前途命运多舛的决策树	212

第十一章 广义非线性动态投入产出模型	218
一、几点假设	218
二、模型的提出	218
三、一阶非线性连续型动态投入产出模型的构建	219
四、非线性连续型动态投入产出模型的连续性	219
五、生产要素的替代性问题	220
六、劳动资料或固定资产矩阵的构建	220
七、最终净产品结构系数与劳动力系数	221
八、总产出价格模型	222
九、模型的外生变量	222
十、劳动工时投入向量相关的因素	222
十一、广义非线性动态投入产出模型	224
十二、求取广义非线性动态投入产出模型的庞特尼雅金最大值解	226
十三、广义非线性动态投入产出模型中两种类型并存的情形	239
参考文献	245
重要术语索引	247

第一章 投入产出理论的渊源与沿革

一、投入产出理论的由来

投入产出分析,又称部门联系平衡法,或称产业关联分析,最早由美籍俄罗斯经济学家瓦西里·列昂惕夫^①(W. Leontief)提出。主要通过编制投入产出表及建立相应的数学模型来反映经济系统各个部门之间的联系。

列昂惕夫于1931年开始研究投入产出分析。他利用美国国情普查资料,编制了美国1919年和1929年的投入产出表,把国民经济划分为42个部门,分析美国的经济结构和经济均衡问题。1936年他在《经济与统计评论》第8期上发表“美国经济制度中投入产出的数量关系”一文,标志着投入产出分析的诞生。1941年他发表了《美国经济结构(1919—1929)》一书,比较系统地总结了研究成果,阐述了投入产出分析的基本原理及其发展。

投入产出分析的思想渊源,可追溯到法国重农学派魁奈(F. Quesnay)的《经济表》。在资产阶级古典经济学中,魁奈的《经济表》是第一次描述了社会总产品生产和流通的图解,或多或少对列昂惕夫的早期研究思想产生启发和影响。但是,使列昂惕夫提出投入产出分析的直接启发,则是里昂·瓦尔拉斯(Leon Walras)的“全面均衡论”。19世纪后半期,瑞士洛桑大学教授瓦尔拉斯运用联立方程体系表示各个经济变量之间的相互依存关系,用以说明无数市场上各种商品和各种生产要素劳务的供求及其价格在均衡点上的相互决定。这一理论中关于经济活动之间相互依存性的观点,构成列昂惕夫后来提出投入产出分析的理论基石。列昂惕夫将瓦尔拉斯烦琐的联立方程体系加以简化,从而提出了他的投入产出模型。因此,列昂惕夫曾多次申明,投入产出分析是“全部相互依存(general interdependent)这一古典理论的具体延伸”^②。

投入产出分析产生于20世纪30年代。1929年资本主义世界经济危机的爆发。使关于资本主义市场经济能够自行调节、保持均衡发展的传统资产阶级经济学理论宣告破产。这一冲击在资产阶级经济学中产生了两种结果,一方面是凯恩斯主义的出现,主张国家干预经济,刺激投资和消费,扩大有效需求,以便减少失业和预防经济危机的发生,后来发展为资产阶级经济学的主流派。另一方面是在原来数理经济学的基础上,一些经济学家力图运用数学方法和统计资料,对资本主义经济数量关系进行分析、研究和预测,以便预测和防止经济危机的发生,形成了投入产出分析和经济计量学。

投入产出分析最早的实际应用是在20世纪40年代。1941年美国劳工部统计局开展关

① 列昂惕夫:美国著名的经济学家,1973年诺贝尔经济学奖金获得者,原籍俄国,1906年8月5日出生于俄国彼得堡,曾任美国哈佛大学经济学教授,纽约大学经济分析研究所所长等职。

② 瓦西里·列昂惕夫.投入产出经济学(中译本)[M].北京:商务印书馆,1980:1.

于第二次世界大战结束后就业情况的研究,在列昂惕夫的指导下,于1942—1944年编制了美国1939年的投入产出表,并运用该表资料预测战后钢铁工业生产和就业情况。这次预测成功,使投入产出分析受到美国政府和经济学界的重视。随后,美国官方又先后编制了1947年、1958年、1961年、1963年、1966年、1972年等年份的投入产出表。从20世纪50年代开始,投入产出分析先后传入西欧、日本、前苏联和东欧,以及亚非拉的许多发展中国家。

二、思想渊源与理论发展

(一)投入产出分析的思想渊源

投入产出分析的思想渊源,可以追溯到法国重农学派魁奈的《经济表》。在《经济表》中,魁奈第一次描述了假想农业国中的生产阶级、非生产阶级和地主阶级之间,以农产品为中心的社会总产品生产和流通的图解,试图证实只有农业才是一切财富的源泉这一重农主义理论。正如列昂惕夫回顾他本人早年从事经济研究工作的情形时所说,重农学派的思想曾对投入产出分析的早期研究思想产生过启发作用。

众所周知,马克思在《资本论》中把社会生产划分为生产资料生产和消费资料生产的两大部类生产,把商品价值分为 $C+V+M$,考察了社会总资本的再生产及其流通过程,阐明了两大部类之间和它们内部各部分之间价值补偿和实物补偿的内在联系,对简单再生产和扩大再生产的实现条件进行了公式化的表述。这些思想对列昂惕夫的早期研究思想或多或少产生过启发影响。

19世纪后半叶,瑞士洛桑大学教授瓦尔拉斯在《纯粹经济学纲要》中,提出了“全面均衡论”。他认为,国民经济是由居民和企业所组成的,居民将自己所拥有的劳动力和资本提供给企业,从而从企业取得所需的消费品;企业从居民购买劳动力和借贷资本,从生产原材料的企业购买原材料而进行生产活动,并将其产品提供给居民。这样,通过各种市场,消费品、劳动力、资本和原材料等生产要素在居民和各企业之间实现循环。瓦尔拉斯从市场上各种商品的供给、需求和价格是相互影响、相互依存的前提出发,运用联立方程体系表示各种变量之间的相互依存关系,以便解释市场上各种商品、劳务、资本和其他生产要素的供求及其价格在均衡点上相互决定的原因。但是,对于拥有众多人口的国家或世界来说,这种理论上几乎包罗无遗的联立方程数目则接近于无限,使其应用于实际问题的解答则成为不可能。

1931年列昂惕夫开始分析美国的经济结构和经济均衡问题,将瓦尔拉斯的全面均衡体系改造为切实可行的体系而进行简化,把联立方程数目减少到可计量的程度,由此产生了投入产出分析。首先,用生产要素之间相互不可替代和具有固定系数的生产函数,取代了生产要素之间可替代的生产函数,从而使国民经济变为可用线性联立方程体系表示的简化形式。其次,采用了简化的假定,即用某一年度的观察值来确定联立方程式中的参数。通过这样的假定,列昂惕夫排除了价格对各个经济主体优化行为的影响,使瓦尔拉斯极其烦琐的联立方程体系得以简化,使全面均衡体系成功地实现了计量化,从而使投入产出分析作为极其特殊的全面均衡理论而诞生了。

(二)投入产出的理论发展

最初的投入产出模型较为简单,主要包括棋盘式的投入产出表和线性方程式体系两个部分。投入产出模型包括一个中间产品的流量矩阵,右边连结一个最终需求向量,垂直方向连结一个原始投入或增加价值的向量。如果已经给出最终需求向量,则可利用列昂惕夫逆矩阵 $(I-A)^{-1}$,将最终需求转换成产出总量;其劳动投入也可利用此矩阵,求出单位产品总成本即价格。

20世纪40年代末和50年代初,戴维·哈京斯(D. Hakins)、乔治斯库·罗金(N. Georgescu Roegen)、霍利(J. Holley)和瓦西里·列昂惕夫先后提出了动态投入产出模型。1948年戴维·哈京斯提出了以微分方程组形式表述的投入产出动态模型。1953年列昂惕夫在哈京斯等人的研究基础上,系统地研究和提出了动态投入产出模型,把动态模型分为封闭式和开放式两种形式。动态模型的构成,是在静态模型的基础上增加一列产量变化向量乘上资本系数矩阵,将投资和积累作为下期对本期生产增量的函数,从而作为模型的内生变量由模型本身的求解而导出,因此,动态模型实际上分析了在某一时段上经济系统各部门间投入产出的数量依存关系。

1958年多夫曼(R. Dorfman)、萨缪尔逊(P. A. Samuelson)和索洛(R. M. Solow)结合线性规划对投入产出结构进行动态分析,并提出了所谓快车道定理。1970年列昂惕夫发表了著名的“动态逆矩阵”一文,为解决动态投入产出模型中生产和投资的直接消耗系数求逆问题,作出了有力的推进。

20世纪70年代以来,众多学者从各自的研究领域,运用各种分析方法和手段,如计量经济学、控制论和运筹学等,提出了各种动态投入产出模型。但是,目前,动态模型基本上处于理论探索阶段,一些动态模型至今无法或尚未用经验的统计资料进行计量,其实际应用尚有待于进一步的发展和完善。

思考题

为什么说列昂惕夫的投入产出分析是一种特殊的全面均衡理论?

第二章 静态投入产出模型

现代国民经济中的任何一个部门,只要从事生产活动,就必须在生产过程中使用从其他部门购进的原材料、半成品以及由居民和其他部门(或国外)提供的生产要素(劳动、资产设备和进口原材料等),并将其生产的产品或劳务作为最终产品提供给最终消费者,或者作为中间产品提供给其他部门,这样,各部门之间就存在着一定的数量依存关系。投入产出表,就是全面反映一定时期内国民经济中各种投入物来源以及各部门产品去向的一种表格,是国民经济产品循环的一种会计记录。编制投入产出表可根据研究目的而采取不同的方法。

按照时间概念,可以分为静态投入产出模型和动态投入产出模型。

静态投入产出模型主要研究某一个时点或者时段各个产业部门之间的相互联系问题;按照不同的计量单位,可以分为实物型和价值型两种。

一、实物形态投入产出模型

静态产品投入产出模型是投入产出分析的基本形式,因此,要掌握投入产出原理,必须首先了解静态产品投入产出表。

(一)静态产品投入产出表

在实物投入产出表中,是以产品来进行分类的,其计量单位则是以实物单位来计量的。简化的实物形态投入产出表如表 2-1 所示:

表 2-1 简化的实物形态投入产出表

投入产出		中间产品				最终产品	总计
		1	2	...	n		
物 质 消 耗	1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}	y_1	Q_1
	2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}	y_2	Q_2
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
	n	q_{n1}	q_{n2}	...	q_{nn}	y_n	Q_n
劳动		q_{n1}	q_{n2}	...	q_{nn}	—	—

对投入产出表的解释是,从列的方向看,反映了各类产品生产上要消耗其他产品(包括消耗本部门自产产品)的数量。但是,由于列向各类产品的计量单位不一致,故不能进行运算。因此,实物投入产出模型只有行模型,而没有列模型。从行的方向看,反映各类产品的

分配使用情况,其中一部分作为中间产品供其他产品生产中使用消耗,另一部分则作为最终产品供投资和消费使用,两部分相加就是一定时期内各类产品的生产总量。

在表 2-1 中,如果用 i 表示投入产出表的行,用 j 表示投入产出表的列。表中 q_{ij} 表示第 i 种产品对第 j 种产品的中间投入量,并包含第 i 种产品对本部门内部的投入量;或是第 j 种产品在生产过程中对第 i 种产品的直接消耗量,并包含 j 产品对本部门内部的消耗量。

由此汇合,其一,第 i 种产品对各种产品的投入之和,等于第 i 种产品的中间产品合计。其二,第 i 种产品提供的各项最终产品之和,等于其最终产品合计。其三,第 i 种产品的中间产品合计与最终产品合计的代数和等于其总产品,即:

$$\text{中间产品} + \text{最终产品} = \text{总产品}$$

这里所说的中间产品,是指一定时期内在生产过程中生产性消耗各种列名的实物产品,即作为劳动对象的部分。最终产品是指一定时期内不需要在本国作进一步加工的产品,包括全部消费品与作为劳动资料的产品。具体地说,是用于个人与社会消费的产品、用于固定资产积累与流动资产积累的产品、用于固定资产更新的产品,以及用于出口的产品。

按照投入产出表的每一行可以建立一个方程,用符号表示就有:

$$\begin{aligned} q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1n} + y_1 &= Q_1 \\ q_{21} + q_{22} + \cdots + q_{2n} + y_2 &= Q_2 \\ &\dots\dots\dots \\ q_{n1} + q_{n2} + \cdots + q_{nn} + y_n &= Q_n \end{aligned} \quad (2-1)$$

亦可将上述方程式写成:

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} + y_i = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2-2)$$

这样就建立起由线性方程组构成的数学模型,就是投入产出数学模型。

(二)直接消耗系数

所谓直接消耗系数,其定义为:每生产单位 j 产品需要消耗 i 产品的数量。直接消耗系数通常称为投入系数或技术系数,一般用 a_{ij} 表示。因此,某一产品的直接消耗系数可由该种产品的总产量去除直接消耗各个产品的数量进行计算。

直接消耗系数的计算公式是:

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2-3)$$

直接消耗系数是静态产品投入产出模型的核心概念,不仅记录了国民经济各部门间不断流动的产品与劳务的轨迹,而且反映了各部门间产品的直接数量依存关系。但是,列昂惕夫在全部均衡模型计量化中,大胆地忽略了反映各部门各自投入产出关系大相径庭的生产函数,采取简明的方法假定产品和劳动在产品部门间的流量 q_{ij} 与产出量 Q_j 之间存在着线性关系,并在生产技术不变的情况下,这一系数固定不变,从而使这一定义具有其与生俱来的局限性。

(三)直接消耗系数矩阵

对于表(2-1)中的 n 种产品,对应有 $n \times n$ 个直接消耗系数,将其按下标顺序排列成矩阵,称为直接消耗系数矩阵,记为 A 。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

由直接消耗系数的定义可知,直接消耗系数矩阵中的元素必须是非负的。

(四)引入直接消耗系数矩阵的实物型投入产出模型

把 $q_{ij} = a_{ij}Q_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 代入方程式(2-2),得

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}Q_j + y_i = Q_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2-5)$$

上式如果写成矩阵形式则有:

$$AQ + Y = Q \quad (2-6)$$

式中: A 为直接消耗系数矩阵;

$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$ ——总产品列向量;

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ——最终产品列向量

其中,上标“T”为矩阵转置符号。

为了能够更为准确而直观地理解投入产出分析,其后将结合投入产出表、投入产出系数表、逆矩阵和均衡产出解的二维图形等,简明而确切地阐述投入产出模型的主要内容。下面先举一个简单的例子。

假设社会经济由农业、工业作为两个内生的部门与消费最终产品的居民消费部门所构成。在此,农业部门仅生产大米,工业部门仅生产纺织品。居民消费部门为两个生产部门提供劳动。表 2-2 就是体现这一经济在一定时期内实物形态的投入产出表,为了计算方便,表中模拟了较为简单的假设数字。即农业部门共生产大米 200 万吨,其中,作为中间产品提供给本部门内部消耗 60 万吨,工业部门 50 万吨,作为最终产品供应给居民部门消费 90 万吨;同样,工业部门纺织布匹 100 万平方米,其中,作为中间产品提供农业部门 25 万平方米,工业部门内部消耗 15 万平方米,销售给居民消费部门 60 万平方米。另外,居民部门为农业、工业部门提供的劳动量分别是 120(千人·天)和 80(千人·天),全部社会经济需要投入 200(千人·天)的劳动。

表 2-2 投入产出表(实物单位)

	农业	工业	居民消费	总生产量
农业	60	50	90	200(万吨)
工业	25	15	60	100(万 m ²)
劳动	120	80	0	200(千人天)

以表 2-2 为内容,按照(2-3)式计算出投入系数表(见表 2-3),具体计算如下:农业部门每生产大米 1 万吨,部门内部需要消耗大米 $60/200=0.30$ 万吨,需要投入布匹 $24/200=0.12$ 万 m^2 ,需投入劳动 $120/200=0.60$ (千人·天);工业部门纺织布匹每 1 万 m^2 ,需要消费大米 $50/100=0.50$ 万吨,部门内部消耗布匹 $16/100=0.16$ 万 m^2 , $80/100=0.8$ (千人·天)。

表 2-3 投入系数表

	农业	工业
农业	0.30	0.50
工业	0.12	0.16
劳动	0.60	0.80

现将(2-6)式合并同类项,经整理可得

$$(I-A)Q = y \quad (2-7)$$

式中, I 是单位矩阵,并与 A 阵同阶。其中

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}$$

在矩阵 $(I-A)$ 中,从列来看,说明了单位实物产品投入与产出的关系。如用“负”号表示投入,用“正”号表示产出,则矩阵中每一列的含义说明,为生产一个单位各种产品,需要消耗(投入)其它产品(包括自身)的数量。由于 $a_n < 1$, 则 $1-a_n > 0$, 所以主对角线上的元素均是正数,表示各种产品扣除自身消耗后的净产出。而主对角线以外的元素为负或零,表示单位产品的投入。同时,此矩阵的“行”则没有经济含义,因为每一行的元素不能运算。

显而易见,式(2-7)建立了总产品与最终产品之间的联系。也就是说,已知各种产品的总产量,则通过(2-7)式就可计算出一定生产技术结构下,各种产品用于最终产品的数量。

当然,如果矩阵 $(I-A)$ 存在逆矩阵 $(I-A)^{-1}$,还可以建立最终产品与总产品之间的联系,即将(2-7)改写成:

$$Q = (I-A)^{-1}Y \quad (2-8)$$

这样,人们对各种产品的最终使用提出需求数量,即在已知 Y 的情形下可以通过式(2-8)求解 Q 。

(五)完全消耗系数

在生产过程中,任何产品除了各种直接消耗关系外,还有各种间接消耗关系。完全消耗系数是包括所有直接消耗和间接消耗的全面描述。所谓完全消耗系数,是指每生产单位 j 种(部门)最终产品需要直接与间接消耗 i 种(部门)产品的数量。一般用 b_{ij} 来表示,用 B 来表示完全消耗系数矩阵。

在直接消耗系数矩阵 A 为已知的条件下,假设各部门都生产一个单位的产品,需要直接消耗各部门的产品为 $X^{(0)}=AI$, 其中 I 为单位矩阵,表示各部门均生产一个单位产品。计算一次间接消耗时,应为 $X^{(1)}=AX^{(0)}=A^2I$ 。二次间接消耗为 $X^{(2)}=AX^{(1)}=A^3I$ 。计算 $(k-1)$ 次的间接消耗为 $X^{(k-1)}=A^kI$ 。当 $k \rightarrow \infty$ 时,完全消耗系数矩阵为

$$B = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k \quad (2-9)$$

(2-9)式中,当直接消耗系数 a_{ij} 具有 $\sum a_{ij}$ 的性质时, A 总有一种范数小于 1,根据矩阵范数的性质,可知 $A^k \rightarrow 0$ 。则(2-9)式可变为:

$$B + I = I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k = (I - A)^{-1} \quad (2-10)$$

在此,矩阵幂级数 $I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{k-1}$ 就相当于列昂惕夫逆矩阵 $(I - A)^{-1}$ 。可证明如下:

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I - A^k$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $A^k \rightarrow 0$, 而

$$I - A^k \rightarrow I$$

$$\therefore (I - A) \cdot (I - A)^{-1} = I$$

$$\therefore (I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \rightarrow (I - A)^{-1}$$

当 $k \rightarrow \infty$, $\lim A^k = 0$ 时,上述级数收敛,故有

$$\text{当 } k \rightarrow \infty, \lim(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \rightarrow (I - A)^{-1}$$

将(2-10)式整理后,得

$$B = (I - A)^{-1} - I \quad (2-11)$$

(2-11)上式表明,增加一个单位 j 部门最终产品,所需要完全消耗 i 部门产品的数量。并且在完全消耗系数矩阵与逆系数矩阵之间仅相差一个单位矩阵。

整理(2-11)式,有

$$(B + I) = (I - A)^{-1}$$

$$(B + I)(I - A) = I$$

$$B(I - A) + (I - A) = I$$

$$B = A + BA$$

(2-12)

这就是完全消耗系数的计算公式

实物型投入产出模型,建立了各类产品的生产和分配使用之间的静态平衡关系。在模型中,直接消耗系数矩阵 A 反映了生产过程的技术结构。模型通过列昂捷夫矩阵 $(I - A)$ 建立了总产品与最终产品之间的关系,通过列昂捷夫逆矩阵 $(I - A)^{-1}$ 建立了最终产品与总产品之间的关系。

二、价值形态投入产出模型

价值形态投入产出表,是根据国民经济各部门本期生产活动的产品与服务的分配去向和消耗来源,排列而成的一张棋盘式平衡表。

在价值投入产出表中,将国民经济分成若干部门,是以货币为计量单位的。价值投入产出表行的方向,是反映各部门产品的实物运动过程;而列的方向则反映各部门产品的价值形成过程。简化价值投入产出表形式如表 2-4 所示:

表 2-4 简化价值投入产出表

分配去向 投入来源		中间产品				最终产品 y_i	总产品 X_i
		部门 1	部门 2	...	部门 n		
物 质 消 耗	部门 1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	X_1
	部门 2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	X_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	部门 n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	X_n
净产值	劳动报酬 v_i	v_1	v_2	...	v_n		
	纯收入 m_i	m_1	m_2	...	m_n		
	总产出	X_1	X_2	...	X_n		

(一)按列建立的价值模型

按列的方向建立模型,是依据表 2-4 中竖表而建立的,描述各部门生产中的各种消耗、净产值与总产值之间的平衡关系。根据(2-4)表的列基本平衡关系式,有
物资消耗+净产值=总产值,即

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} + N_j = X_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2-13)$$

式中 N_j 为 j 部门净产值(新创造价值)。

引入直接消耗系数于上式,则得

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_j + N_j = X_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2-14)$$

式中 $\sum a_{ij}$ 表示生产单位 j 部门产品的物资消耗系数。

(二)按行建立的价值模型

从行的方向建立价值模型的过程,亦是反映各部门产品生产和分配使用的情况,建立最终产品与总产品之间的平衡关系。具体过程如下:中间产品+最终产品=总产品。即

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + Y_1 &= X_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + Y_2 &= X_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + Y_n &= X_n \end{aligned} \quad (2-15)$$

将以价值形式表示的各部门直接消耗系数 a_{ij} 代入上式,则得