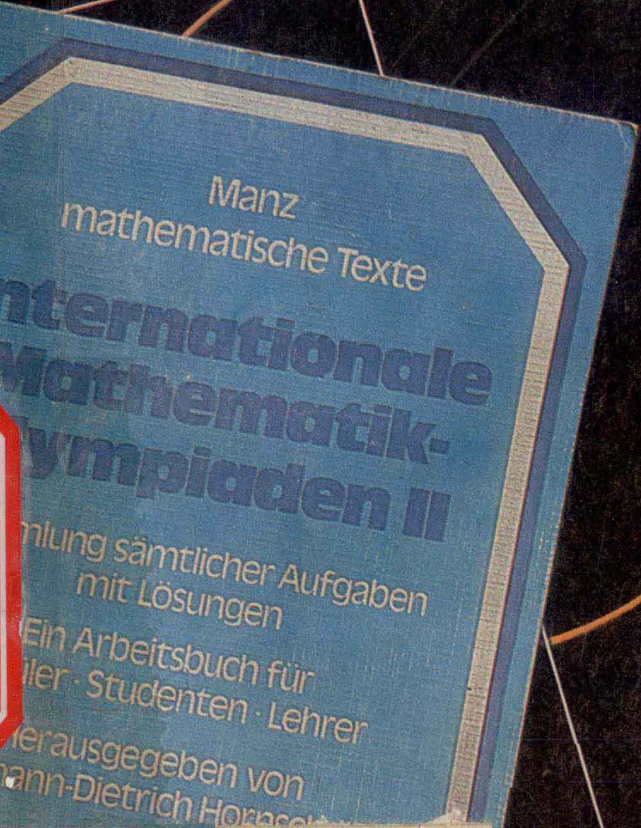
国际数学竞赛题解

〔德〕H.D.霍恩舒赫 编



国际数学竞赛题解

【中 学 生】

(1959—1978)

〔德〕H.D.霍恩舒赫 编

赵展岳 丁有豫 译

朱宝宸 校

吉林人民出版社

Internationale Mathematik— Olympiaden

译自德意志联邦共和国曼茨公司1977年版

国际数学竞赛题解

〔中 学 生〕

(1959—1978)

〔德〕H.D.霍恩舒赫 编

赵展岳 丁有豫 译

朱 宝 宸 校

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 8 ¼印张 167,000字

1979年5月第1版 1979年5月第一次印刷

印数：1—100,000册

书号：7091·1056 定价：0.69元

目　　次

第一届国际数学竞赛试题

在罗马尼亚

1959年

试题1 （波兰）

证明：分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数n皆不可约。

试题2 （罗马尼亚）

对于x的哪些实数值，下列等式成立：

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

这里仅取算术根。

试题3 （匈牙利）

设x为一角度（一实数），a，b和c为任意实数。实数$\cos x$满足二次方程

$$a\cdot\cos^2 x+b\cdot\cos x+c=0$$

求$\cos 2x$所满足的一个二次方程。

在 $a=4$，$b=2$ 和 $c=1$ 的情况下，将此二方程进行比较。

试题4 （匈牙利）

试作一直角三角形，其斜边 C 给定，且使 C 边上的中线为二直角边的几何中项。

试题5 （罗马尼亚）

在线段 AB 上，选一内点 M，然后，在 AB 的同一侧分别以 AM 和 MB 为边作正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$。$\odot P$ 和 $\odot Q$ 是这两个正方形的外接圆，它们交于 M 点和 N 点。过 AF 和过 BC 的二直线交于 N' 点。

a）证明：N 和 N' 重合。

b）证明：不论点 M 怎样选取，直线 MN 总通过一固定点 S。

c）当 M 在 A、B 之间变动时，确定线段 PQ 的中点之轨迹。

试题6① （捷克斯洛伐克）

给出相交于直线 p 的两个平面 P 和 Q。又在平面 P 和 Q 上分别给出不在直线 p 上的两点 A 和 C。试作一等腰梯形 $ABCD$（$AB\parallel CD$），使之能作一内切圆，并使点 B 在平面 P 内，点 D 在平面 Q 内。

---

① 本题的内容与图不全符，稍作改动。——译者

第一届国际数学竞赛题解

1959年

题解1

在所给分数中，分子大于分母。可将其改写，使之出现真分数

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$$

若所给分数可约，则此真分数也必可约，即 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 也必可约。但是

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$$

$\frac{1}{7n+1}$是不可约的，所以其余 n 个分数也不可约。

题解2

当 $x\geqslant\frac{1}{2}$时，下列等式成立：

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}+1\right|$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}-1\right|$$

这是因为，等式两边的平方相等且所有的根皆取正值。

现在我们考虑函数

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|)$$

它是对$x>\frac{1}{2}$定义的。

我们分别对$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$和$1\leqslant x<\infty$两种情况来讨论。

在第一种情况下

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1})]=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}$$

在第二种情况下

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1)$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{2x-1}$$

因此，总的结果是：

当$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$时，$y=\sqrt{2}$

当$1\leqslant x<\infty$时，$y=\sqrt{2}\sqrt{2x-1}$

故，现在本题的解答是

a）当$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$时，满足$y=\sqrt{2}$，

b）没有一个x值能满足$y=1$，因为函数y的最小值为$\sqrt{2}$，

c）当$\sqrt{2}\sqrt{2x-1}=2$，即$x=\dfrac{3}{2}$时，满足$y=2$。

题解3

我们将题中给出的等式写成下列形式：

$$a\cdot\cos^2 x + c = -b\cdot\cos x \tag{1}$$

于是，a, b, c和$\cos x$四个数显然也满足下列等式

$$a^2\cdot 4\cos^4 x + (4ac-2b^2)\cdot 2\cos^2 x + 4c^2 = 0 \tag{2}$$

将（1）式取平方并乘以4，就得出此式。$\cos x$和$\cos(2x)$之间的关系为

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \tag{3}$$

即

$$2\cos^2 x = \cos(2x) + 1 \tag{4}$$

将（4）式代入（2）式后，我们得到

$$a^2[\cos(2x)+1]^2 + (4ac-2b^2)[\cos(2x)+1] + 4c^2 = 0$$

按$\cos(2x)$的降幂排列成

$$a^2\cos^2(2x) + (2a^2+4ac-2b^2)\cos(2x) + (a^2+4ac-2b^2+4c^2) = 0$$

显然，这是$\cos(2x)$的一个二次方程。

在$a=4$，$b=2, c=-1$的情况下有

$$a^2=16$$

$$2a^2+4ac-2b^2 = 8$$

$$a^2+4ac-2b^2+4c^2 = -4$$

故，我们得到$\cos(2x)$所满足的方程

$$4\cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1 = 0$$

可见 $\cos(2x)$ 的方程和 $\cos x$ 的方程具有同样的系数。

题解4

作法（图 1）

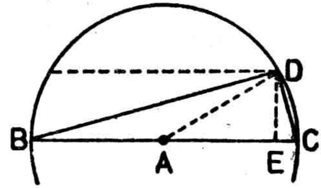


图 1

以 A 点为圆心，以半径 $r=\frac{C}{2}$ 作一圆弧，然后画一任意直径，与圆弧交于 B 点和 C 点。现在作一与 $\overline{BC}$ 的距离为 $\frac{C}{4}$ 的平行线，与圆弧交于 D。联结 BD 和 CD，则三角形 BCD 即为所求。

证（图 1）

因为 $\overline{AC}=\frac{C}{2}$，$\overline{DE}=\frac{C}{4}$，并且注意到：角 BDC 是直角。

$$\text{所以}\ \overline{BD}\cdot\overline{DC}=2S\triangle BCD=4S\triangle ACD$$
$$=\frac{4\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DE}}{2}=\frac{C^2}{4}$$

又因为 $\overline{AD}=\frac{C}{2}$，所以

$$\overline{AD}^2=\frac{C^2}{4}=\overline{BD}\cdot\overline{DC}$$

题解5

选取直角坐标系，使点 A，B 和 M 的坐标分别为：$(0;0)$，$(a;0)$ 和 $(m;0)$。

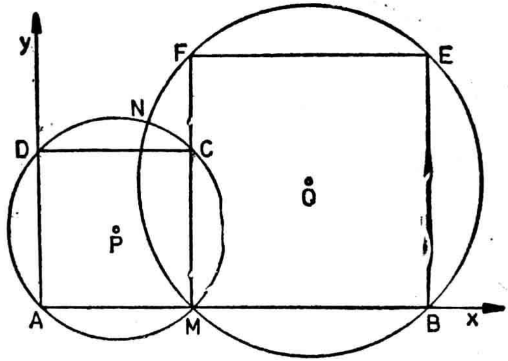


图 2

a）点P和点Q的坐标为$(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$ 和 $(\frac{a+m}{2}, \frac{a-m}{2})$，因此可建立⊙$P$和⊙$Q$的方程。

⊙P的方程为

$$(x-\frac{m}{2})^2+(y-\frac{m}{2})^2=\frac{1}{2}m^2$$

即

$$x^2-mx+y^2-my=0 \tag{1}$$

⊙Q的方程为

$$(x-\frac{a+m}{2})^2+(y-\frac{a-m}{2})^2=\frac{1}{2}(a-m)^2$$

即

$$x^2-(a+m)x+y^2-(a-m)y+am=0 \tag{2}$$

（1）式减去（2）式得

$$ax+(a-2m)y-am=0 \tag{3}$$

点M和点N的坐标满足方程（1）和（2），因此也满足方程(3)。

解方程(3)求出x，并将结果代入方程(1)中，则在乘以a^2后得到方程

$(2a^2-4am+4m^2)y^2-2am\ (a-m)y=0$，其解为

$$y_1=0 \tag{4}$$

和

$$y_2=\frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2} \tag{5}$$

由(4)式，(3)式以及由(5)式，(3)式分别得出：

$$x_1=m$$

和

$$x_2=\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2}$$

因此点M用$(x_1;\ y_1)$表示，点N用$(x_2;\ y_2)$表示。

显然，N点的坐标满足方程

$$(a-m)x-my=0$$

但是，这正是通过A和F之直线的方程。通过$B(a;\ 0)$和$C(m;\ m)$之直线的方程为

$$mx+(a-m)y-am=0$$

N点坐标显然满足此方程，即通过A和F的直线与通过B和C的直线交于$N'=N$。

b）因为点M和点N的坐标满足方程(3)，所以它表示通过M和N的直线。将它写成如下形式

$$a(x+y)=m(2y+a)$$

则可明显看出：点$(x;y)=(\frac{a}{2};\ -\frac{a}{2})$总满足此直线方程而与$m$（的值）无关。故，该点是所有的直线$MN$的公共点。

c）因为有

$$P=(\frac{m}{2};\ \frac{m}{2})$$

和

$$Q=(\frac{a+m}{2};\ \frac{a-m}{2})$$

所以线段PQ之中点具有如下坐标：

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a+m}{2}\right)$$

和

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a-m}{2}\right)$$

因此

$$(x;\ y)=(\frac{a+2m}{4};\ \frac{a}{4})$$

当m在区间$0<m<a$内变动时，PQ的中点在点$(\frac{a}{4};\ \frac{a}{4})$和$(\frac{3a}{4};\ \frac{a}{4})$之间的线段内变动。

此线段平行于AB，二者之间的距离为$\frac{a}{4}$，其长度为$\frac{a}{2}$。

题解6

本题不是总有解的，仅当A和C满足一定条件时才能解。

梯形及其内切圆位于平面$R = ABCD$内。

因为AB与CD平行，所以此二线段也平行于直线p，因此R也平行于p。R平面内与p平行的直线p'确定AB和CD的方向。假定p'通过A点，则点B必在p'上。点D必在通过C而平行于p'的直线上。

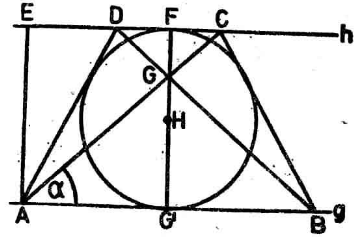


图 3

现在，本题的解归结为完成下述作图：

作出一直线g及其上一点A。再作出一条平行于g而距离为AE的直线h及其上一点C。作一梯形$ABCD$，使B在g上，D在h上，并能作一内切圆。

作法（图 3）

首先从A点向h作一垂线，得垂足E。用圆规量取线段EC，并以A为心作一圆弧。假定此圆弧与直线h交于D点；现在平分DC得点F。从F向g作垂线，与AC交于G点。连结D与G，得点B。最后，作线段$G'F$的中心H。于是，以H为心，半径为$\frac{\overline{AE}}{2}$的圆就是梯形$ABCD$的内切圆。

证（图 3）

根据外切四边形定理，只需证明：对边之和相等。即

$$2\overline{AD}=2\overline{EC}=2\overline{EF}+2\overline{FC}=2\overline{AG'}+2\overline{DF}$$
$$=\overline{AB}+\overline{DC}$$

因此，梯形 $ABCD$ 是某圆的外切四边形。但因上述以H为心的圆与梯形各边相切，故梯形 $ABCD$ 正是此圆的外切四边形。

由图看出，仅当$\alpha\leqslant 45°$时，才能完成此作图。

第二届国际数学竞赛试题

在罗马尼亚

1960年

试题1 （保加利亚）

试求满足下列条件的所有三位数

它能被11正除，且除得之商等于原数中各数字的平方和。

试题2 （匈牙利）

变量x取何值时，下列不等式成立

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$$

试题3 （罗马尼亚）

已知直角三角形ABC，其斜边BC被分为n等分，n为奇数。A点对包含斜边中点的那一小段的视角为α。h为直角三角形的高，a为斜边，试证下式成立

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

试题4 （匈牙利）

已知 h_a, h_b, s_a,求作三角形 ABC（h_a 和 h_b 是 a 边和 b 边上的高，s_a 是 a 边的中线）。

试题5 （捷克斯洛伐克）

给出一立方体 $ABCDA'B'C'D'$。

a）假定 x 为线段 AC 上的任意点，y 为线段 $B'D'$ 上的任意点，试确定线段 xy 中点的轨迹。

b）试确定线段 xy 上点 Z 的轨迹，Z 满足关系式：$\overline{zy}=2\overline{xz}$。

试题6 （保加利亚）

已知一圆锥，此圆锥的内切球及球的外切圆柱；此圆柱的底面与圆锥底面位于同一平面内。

V_1 为圆锥体积，V_2 为圆柱体积。

a）证明：等式 $V_1=V_2$ 不可能成立；

b）确定使 $V_1=KV_2$ 成立的最小数值 K，并对这种情况作出圆锥的顶角。

试题7 （德意志民主共和国）

一等腰梯形，其两底边为 a 和 b，高为 h。

a）在对称轴上求一点 P，使得它对两腰的视角为直角。

b）求 P 点到两底边的距离。

c）在什么条件下能够作出 P 点（讨论可能的情况）？