炫风丛书

XUANFENGCONGSHU

高等数学

全程学习指导与习题精解

（同济六版）

滕兴虎　毛　磊　张晓蓉
陆小庆　刘希强　颜　超　编著

GAODENG SHUXUE

QUANCHENG XUEXIZHIDAO YU XITIJINGJIE

知识要点归纳　　课后习题解答

典型例题精解　　考研真题分析

南京出版传媒集团
南京出版社

旋风丛书

XUANFENGCONGSHU

高等数学

全程学习指导与习题精解

（同济六版）

滕兴虎　毛　磊　张晓蓉
陆小庆　刘希强　颜　超　编著

南京出版传媒集团
南京出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导与习题精解 / 滕兴虎等编著. — 南京 : 南京出版社

(炫风丛书)

ISBN 978-7-5533-0012-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①滕… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 317895 号

书　　名：高等数学全程学习指导与习题精解(同济六版)

作　　者：滕兴虎　毛　磊　张晓蓉　陆小庆　刘希强　颜　超

出版发行：南京出版传媒集团

南　京　出　版　社

社址：南京市老虎桥 18-1 号　邮编：210018

网址：http://www.njcbs.com 淘宝网店：http://njpress.taobao.com

电子信箱：njcbs1988@163.com

联系电话：025-83283871、83283864(营销)　025-83283883(编务)

出 版 人：朱同芳

责任编辑：吕　睿　赵育春

特邀编辑：李　香

装帧设计：张　淼

责任印制：陈南柯

排　　版：南京新洲印刷有限公司

印　　刷：南京新洲印刷有限公司

开　　本：880mm×1230mm　1/32

印　　张：22

字　　数：900 千字

版　　次：2014 年 1 月第 1 版

印　　次：2014 年 1 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5533-0012-2

定　　价：29.90 元

营销分类：教育

序

随着我国经济体制和教育体制改革的不断深入,高等教育进入了持续快速发展的轨道。从1999年我国实施高校扩招计划至今,高等教育已基本实现了由精英化向大众化的转变。根据教育部的统计,2012年我国普通高校毕业生人数达到680万人,比上年增加20万,而10年前的2002年我国高校毕业生人数仅为135万人。目前高校的在读学生数已高达1300多万人。然而,伴随而来的是每年有相当数量的大学生退学的情况。国内的一项研究表明,退学大学生中32.2%是因为学业成绩达不到学校规定的要求。出现这样的现象,原因是多方面的:一是大学专业课程多,每个学生每学期都要面对10门左右内容各不相同的课程;二是每节课的信息量大,知识点多,学习要求高;三是高中和大学老师的教学方法差别很大,学生按以前的惯例学习,普遍感到比较吃力。再加上大学教材的内容翔实而繁复,缺少对知识点的简明讲解和系统梳理,更缺乏对考点的梯度训练和全真考查。

另外,现代社会对高层次人才的需求更加迫切,每年毕业几百万大学生的现状也推高了人才市场的用人标准。大学本科教育的"集体贬值",引爆了新一轮的考研热。有数据显示,2012年全国研究生入学考试吸引了165.6万名考生参加,比2011年增加14.5万人,再创历史新高。由于考研人数急剧增加,考研竞争愈加激烈,凡是有志于此的大学生越发要取得更加优异的成绩,以确保在考研竞争中掌握主动权。

为了帮助莘莘学子,全面把握教材内容,有效提高学习成绩,我们联手相关高校的专家教授,精心组织出版了这套高校热门专业经典教材学

习辅导丛书。这套书涉及的学科有数学、物理、化学、生物以及力学、材料、电子技术、电气工程等，基本上覆盖了高校热门专业的全部基础学科和主干课程。丛书注重对教材知识点的梳理，注重对课后习题的讲解，注重对考点训练的设计，力图帮助读者拓展知识，发散思维，点拨思路，触类旁通，有效提高学习效率，着力减轻学业负担，全面强化应试能力。既为专业课程学习提供同步辅导，又为考研复习提供实际帮助。

为广大读者提供优质服务是我们出版人的职责所在。如果本丛书的出版能得到广大读者的认可，那将是我们莫大的荣幸。

编　者

目　录

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　定积分的应用

第七章　微分方程

第八章　向量代数与空间解析几何

第九章　多元函数微分法及其应用

第十章　重积分

第十一章　曲线积分与曲面积分

第十二章　无穷级数

第一章
函数与极限

基本要求、重点与难点

基本要求：

(1) 理解函数及其定义域、值域、图形等概念，掌握函数的表示法.了解函数的有界性、单调性和奇偶性；

(2) 理解复合函数、反函数和分段函数的概念；

(3) 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念.掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

(4) 会建立简单应用问题中的函数关系式；

(5) 了解数列与函数极限的概念和性质，理解左、右极限的概念及极限存在与左、右极限之间的关系；

(6) 了解无穷小的概念和性质，了解无穷大与无穷小之间的关系，掌握无穷小阶的比较方法；

(7) 了解函数连续(在一点 x_0 处连续以及连续函数)的概念，理解左、右连续的概念以及函数连续与左、右连续之间的关系，掌握讨论分段函数连续性的方法；

(8) 了解函数间断的概念，掌握函数间断点的分类，会判断函数的间断点；

(9) 理解闭区间上连续函数的性质，会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题；

(10) 熟练掌握极限的四则运算法和两个重要极限，掌握极限的两个存在准则，能熟练运用极限的四则运算、两个重要极限、极限的存在准则以及无穷小的性质、等价无穷小代换、函数的连续性等方法求极限.

重点：

(1) 复合函数的定义域；

(2) 函数的基本性质；

(3) 求函数的复合及反函数；

(4) 建立简单应用问题的函数关系式；

(5) 求极限；

(6) 讨论函数的连续性；

(7) 间断点的分类；

(8) 闭区间上连续函数的性质.

难点：

(1) 抽象函数的表达式；

(2) 分段函数的复合及反函数的求法；
(3) 极限的概念；
(4) 求极限的各种方法的应用；
(5) 闭区间上连续函数性质的应用.

主要概念与公式

特殊数集

名　称	表　示
自然数集	$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$
整数集	$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}$
有理数集	$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbf{Z},q\neq0,\text{且 }p、q\text{ 互质}\right\}$
正实数集	$\mathbf{R}^{+}=\{x\mid x\in\mathbf{R},x>0\}$
去零实数集	$\mathbf{R}^{*}=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq0\}$
复数集	$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,\ b\in\mathbf{R},\ \mathrm{i}^2=-1\}$

集合运算公式

运　算	公　式
并　集	$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$
交　集	$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$
差　集	$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$
余　集	$A^c=\{x\mid x\in I\text{ 且 }x\notin A\}$
直　积	$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$

区间与邻域

名　称	表　示
开区间	$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$
闭区间	$[a,b]=\{a\leqslant x\leqslant b\}$
左开右闭区间	$(a,b]=\{a<x\leqslant b\}$
点 a 的 δ 邻域	$\bigcup(a,\delta)=\{x\mid\mid x-a\mid<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$
点 a 的去心邻域	$\mathring{\bigcup}(a,\delta)=\{x\mid 0<\mid x-a\mid<\delta\}=\{x\mid(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\}$
点 a 的左 δ 邻域	$\bigcup_{-}(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a\}$
点 a 的右 δ 邻域	$\bigcup_{+}(a,\delta)=\{x\mid a<x<a+\delta\}$

映射及相关定义

名　称	定　义
映　射	给定两个非空集合,如果存在一个法则 T,使得任意 $x\in X$,按法则 T 使存在唯一的元素 y 与之对应,则称 T 为从 X 到 Y 的一个映射,记作 $T:X\to Y$. 其中 x 称为原像,y 为像. 集合 X 称映射 T 的定义域. X 的所有元素的像的集合称映射 T 的值域
满　射	若 $T(X)=Y$,则称 T 为从 X 到 Y 的满射
单　射	若任 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$,则 T 为从 X 到 Y 的单射
双　射	若 T 是从 X 到 Y 的满射且又是单射,则 T 为双射
复合映射	若映射 $T_1:X\to Y_1$, $T_2:Y_2\to Z$,且 $T_1(x)\subset Y_2$,则 $T_2\circ T_1:X\to Z,(T_2\circ T_1)(x)=T_2(T_1(x))$,称为由 T_1,T_2 构成的复合映射

函数及相关定义

名　称	定　义
函　数	设数集 $D\in\mathbf{R}$,则 D 到 $\mathbf{R}$ 的映射 f 称为定义在 D 上的一元函数,记为 $y=f(x)$, $x\in D$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,$\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为值域
函数的图形	点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形
反函数	若函数 $f:D\to f(D)$ 为单射,则称其逆函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为 f 的反函数,f^{-1} 的对应法则由 f 来决定,即若 D 与 $f(D)$ 之间是一一对应的,则 x 也是 y 的函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此反函数也记作 $y=f^{-1}(x)$
复合函数	若函数 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域,则在函数 $g(x)$ 的定义域上可确定一个函数 $y=f(g(x))$,称其为 g 与 f 复合函数,记作 $y=f(g(x))$ 或 $y=f\circ g$
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数

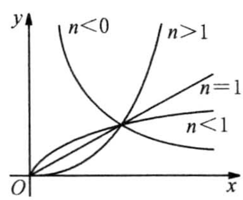
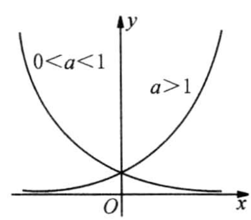
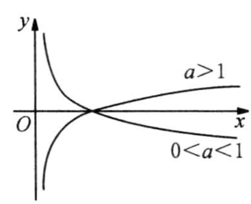
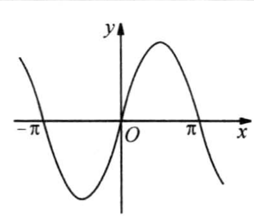
函数的几种特性

性　质	定　义
奇偶性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,任意 $x,-x\in D$,有 $f(-x)=f(x)(f(-x)=-f(x))$,则称 $f(x)$ 为 D 上的偶(奇)函数
单调性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义,若任 $x_1,x_2\in D$,由 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(单调减少)的
周期性	$f(x)$ 在 D 上定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使任 $x\in D$,均有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数,通常把满足关系式的最小正数 T 称为最小正周期,简称周期
有界性	$f(x)$ 在 D 上定义,若存在 $M>0$,使任 $x\in D$,有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界
无界性	$f(x)$ 在 D 上定义,若任意 $M>0$,均存在 $x_0\in D$,使 $\lvert f(x_0)\rvert\geqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界

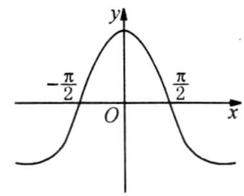
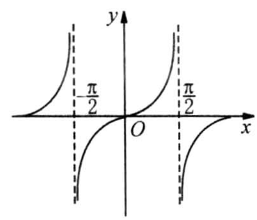
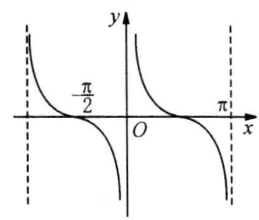
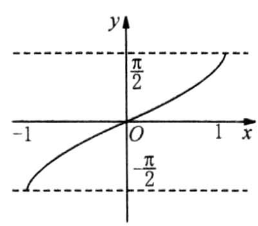
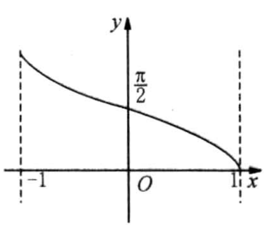
函数的运算

运　算	定　义
和	$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in D$
差	$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ x\in D$
积	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in D$
商	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ x\in D$ 且 $g(x)\neq 0$

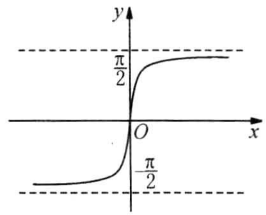
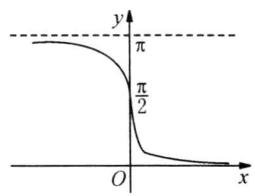
基本初等函数

名　称	定义域及性质	图例
幂函数	$y=x^n$ $n>0$ 时，函数 x^n 在 $(0,+\infty)$ 严格递增 $n<0$ 时，函数 x^n 在 $(0,+\infty)$ 严格递减 $y=x^n$ 与 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^x,(a>0,\ a\neq 1)$ $a>1$ 时，函数 a^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格递增 $0<a<1$ 时，函数 a^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格递减	
对数函数	$y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数	
三角函数	正弦函数　$y=\sin x,x\in\mathbf{R}$	

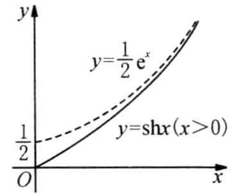
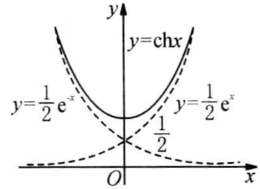
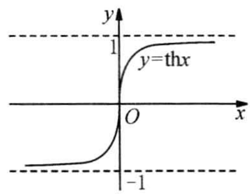
（续　表）

名　称	定义域及性质	
三角函数	余弦函数　$y=\cos x, x\in\mathbf{R}$	
	正切函数 $y=\tan x$，$\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right)$	
	余切函数 $y=\cot x$，$(x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z})$	
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$，$\left(-1\leqslant x\leqslant 1, -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\pi)$	

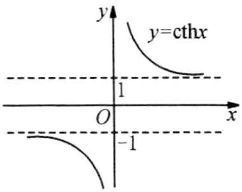
(续　表)

名　称	定义域及性质	
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$， $\left(-\infty<x<+\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$， $(-\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi)$	

双曲函数

名　称	定　义	图　形
双曲正弦	$y=\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 奇函数	
双曲余弦	$y=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 偶函数	
双曲正切	$y=\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ 奇函数	

(续 表)

<table>
<tr><th>名 称</th><th>定 义</th><th>图 形</th></tr>
<tr><td>双曲余切</td><td>$y=\mathrm{cth}x=\dfrac{1}{\mathrm{th}x}=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$
奇函数</td><td>
</td></tr>
<tr><td>反双曲正弦</td><td>$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$</td><td rowspan="3">图略</td></tr>
<tr><td>反双曲余弦</td><td>$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$</td></tr>
<tr><td>反双曲正切</td><td>$y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$</td></tr>
</table>

数列极限的定义

<table>
<tr><th colspan="2">分 类</th><th>定 义</th></tr>
<tr><td rowspan="2">数列极限</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(有限)</td><td>$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$</td><td>$\forall M>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n|>M$</td></tr>
</table>

数列收敛的性质

<table>
<tr><td>唯一性</td><td>若$\{x_n\}$收敛,则其极限必唯一</td></tr>
<tr><td>有界性</td><td>若$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$有界(反之不真)</td></tr>
<tr><td>保号性</td><td>若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,其中$A>0$(或$A<0$),则存在$N>0$,当$n>N$时恒有$x_n>0$(或$x_n<0$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">保序性</td><td>若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,且当$n$充分大时有$x_n\leqslant y_n$($x_n<y_n$)则$A\leqslant B$</td></tr>
<tr><td>注:反之,若$A\leqslant B$,未必有$x_n\leqslant y_n$成立.</td></tr>
<tr><td>子数列收敛定理</td><td>数列$\{x_n\}$收敛到A的充要条件是$\{x_n\}$的任一子列也收敛且收敛到A</td></tr>
</table>

函数极限的定义

分类		定义
函数极限	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$($x_0$, A 有限)	$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ 时,有 $\mid f(x) - A \mid < \varepsilon$
	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (x_0 有限)	$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ 时,有 $\mid f(x) - A \mid > M$
	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ (A 有限)	$\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$,当 $\mid x \mid > X$ 时,有 $\mid f(x) - A \mid < \varepsilon$
	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$	$\forall M > 0$, $\exists X > 0$,当 $\mid x \mid > X$ 时,有 $\mid f(x) \mid > M$
单侧极限	左极限 $f(x_0 - 0) = A$(x_0, A 有限)	$f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时,有 $\mid f(x) - A \mid < \varepsilon$
	右极限 $f(x_0 + 0) = A$(x_0, A 有限)	$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,有 $\mid f(x) - A \mid < \varepsilon$
注		$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$

函数极限的性质

唯一性	若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则极限值唯一
局部有限性	若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则存在 $M > 0$ 及 $\delta > 0$,当 $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ 时,有 $\mid f(x) \mid \leqslant M$
局部保号性	若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,其中 $A > 0$(或 $A < 0$),则存在 $\delta > 0$,当 $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ 时,有 $f(x) > 0$(或($f(x) < 0$))
保序性	设在 x_0 的某空心邻域内,$f(x) \leqslant g(x)$(或 $f(x) < g(x)$),且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,则 $A \leqslant B$
归并原则	若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 定义域内以 x_0 为极限的数列,$x_n \neq x_0$,则 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

无穷小量与无穷大量的定义与性质

分类	定义	性质
无穷小量	若变量 $\alpha(x)$ 在 $x \to x_0$(或 ∞)时,极限为0,则称 $\alpha(x)$ 为 $x \to x_0$(或 ∞)时的无穷小量,记作 $\alpha(x) = o(1)(x \to x_o$(或 ∞))	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ 其中 $\alpha(x) = o(1)(x \to x_0)$