



志鸿优化设计丛书

丛书主编 任志鸿

高中新教材

优秀教案

GAOZHONG XINJIAOCAI YOUXIU JIAOAN

高二数学(下)



南方出版社



志鸿优化设计丛书

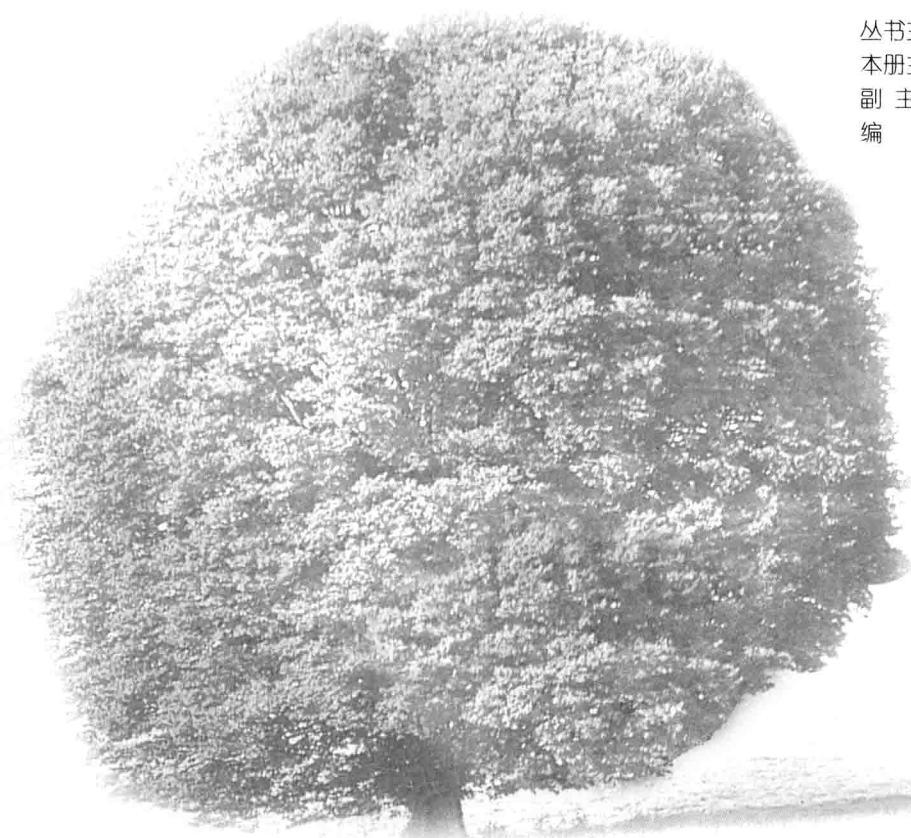
高中新教材

优秀教案

GAOZHONG XINJIAOCAI YOUXIU JIAOAN

高二数学(下)

丛书主编 任志鸿
本册主编 马庆福
副主编 马光才
编者 马庆福 李怀顺
薛晓飞 李斌
杨秀萍



南方出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新教材优秀教案·高二数学·下/任志鸿主编.-2版.-海口:
南方出版社,2002.12

(志鸿优化设计系列丛书)

ISBN 7 - 80660 - 743 - 9

I. 高... II. 任... III. 数学课-教案(教育)-高中 IV. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 105079 号

策 划:贾洪君

责任编辑:贾洪君

装帧设计:邢 丽

志鸿优化设计丛书

高中新教材优秀教案·数学(高二下)

任志鸿 主编

南方出版社 出版

(海南省海口市海府一横路 19 号华宇大厦 12 楼)

邮编:570203 电话:0898-65371546

邹平县博鸿印刷有限公司印刷

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

2004 年 10 月第 3 版 2004 年 10 月第 2 次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:16.75 字数:493 千字

定价:23.00 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)

前 言

Q I A N Y A N

实施素质教育的主渠道在课堂,而真正上好一节课必需要有一个设计科学、思路创新的好教案。

当今素质教育下的课程改革和教材变革带动了课堂教学改革,课堂教学改革的关键是课堂设计和教学过程的创新。过去的教师一言堂怎样转变成今天师生互动的大课堂,过去的以知识为中心怎样转换成今天的能力立意,过去的只强调学科观念怎样转变为今天的综合素质培养,过去的上课一支笔、一本书怎样转换成今天的多媒体,这些都是课堂教学改革面临的重要课题。为了帮助广大教师更好地掌握教学新理念,把握新教材,我们特组织了一批富有教学经验的专家、学者和一线优秀教师,依据教学大纲新要求编写了这套《高中新教材优秀教案》丛书。

本丛书在编写过程中,力求做到以下几点:

- 渗透先进的教育思想,充分展现现代化教学手段,提高课堂教学效率。整个教案体现教师的主导作用和学生的主体地位,立足以学生发展为中心,注重学生学习方式及思维能力的培养。
- 教材分析精辟、透彻,内容取舍精当,力求突出重点,突破难点。
- 依照新大纲要求,结合新教材特点,科学合理分配课时。
- 科学设计教学过程,优化 45 分钟全程,充分体现教学进程的导入、推进、高潮、结束几个阶段,重在教学思路的启发和教学方法的创新。
- 注重技能、技巧的传授,由课内到课外,由知识到能力,追求教学的艺术性和高水平。突出研究性、开放性课型的设计,引领课堂教学的革新。
- 展示了当前常用的各类先进教具的使用方法,提供了鲜活、详实的备课参考资料,体现了学科间交叉综合的思想。

本丛书主要设置以下栏目:

[从容说课]指出本章(课)节内容特色及章(课)节内容的重点、难点,并依据教材重点、难点的分布,阐明规律的总结和方法的突破,宏观上高效指导备课全程。

[教学目标]以教材的“节”或“课”为单位,简明扼要地概括性叙述。内容按文道统一的思想,包括德育和智育两大方面,使学生的学习有的放矢。

[教学重点] 准确简明地分条叙述各课(节)中要求学生掌握的重点知识和基本技能。

[教学难点] 选择学科知识中的难点问题,逐条叙述,以便学生理解和掌握。

[教学方法] 具体反映新的教学思想和独特的授课技巧,突出实用性和创新性。

[教具准备] 加强直观教学,启迪学生的形象思维。通过多媒体、CAI 课件的使用,加深学生对课本知识的记忆与理解。

[教学过程] 按课时编写,每一课时分“教学要点”“教学步骤”两部分。“教学要点”概述课堂教学进展情况,兼有教法及学法提示;“教学步骤”一般包括导入新课(导语设计)、推进(传授新知识)高潮(重点难点突破)、课堂小结、课堂练习(可随机安排)等五步。加强师生活动的设计,以师生互助探究为主。力求使知行合一,使课堂真正变为学堂。

[备课资料] 联系所讲授的内容,汇集生活现实、社会热点、科技前沿等领域与之相关的材料形成具有鲜明时代气息的教学资料。并设计开放型问题供学生讨论,设置探究性课题供学生研究或者科学设计能力训练题供学生课外练习。

本丛书按学科分为语文、数学、英语、物理、化学、历史、政治、地理、生物九册出版,具有较强的前瞻性、实用性和参考性。

我们愿以执著的追求与奉献,同至尊的同行们共同点亮神圣的教坛烛光。

编者

2004年11月

目 录

第九章 直线、平面、简单几何体	1
一 空间直线和平面	1
9.1 平面	1
9.2 空间直线	14
9.3 直线与平面平行的判定和性质	34
9.4 直线与平面垂直的判定和性质	47
9.5 两个平面平行的判定和性质	67
9.6 两个平面垂直的判定和性质	80
二 简单几何体	96
9.7 棱柱	96
9.8 棱锥	112
研究性学习课题:多面体欧拉定理的发现	130
9.9 球	137
小结与复习	154
第九章检测题	163
第十章 排列、组合和二项式定理	169
10.1 分类计数原理与分步计数原理	169
10.2 排列	177
10.3 组合	188
10.4 二项式定理	202
第十一章 概率	215
11.1 随机事件的概率	215
11.2 互斥事件有一个发生的概率	234
11.3 相互独立事件同时发生的概率	244
小结与复习	258
第十、十一章检测题	261

第九章 直线、平面、简单几何体



一 空间直线和平面

9.1 平面

课时安排

3 课时

从容说课

立体几何是在初中平面几何的基础上进行的,以空间图形的性质、画法、计算以及它们的应用为研究对象,以演绎法为研究方法,通过立体几何的教学,使学生的认识水平实现由二维空间向三维空间的转化,发展学生的空间想象能力,提高学生的逻辑思维能力和分析问题、解决问题的能力。

教学中既借助模型帮助学生克服学习平面图形时产生的思维定势影响,又紧密联系平面几何的知识消除学生的畏惧心理,增强学生学习立体几何的信心,教学时尽量应用生活中的实例加以分析研究,以进一步激发学生学习立体几何的兴趣。

本节是在学生对立体几何内容、知识结构及其研究方法等有了一定了解的基础上进行的,通过学习“平面”,由“平面”是可以无限延伸的,培养学生的空间想象力;由“平面”是空间图形的基本元素,培养学生“空间问题平面化”的观点;由点、直线、平面间的内在联系,培养学生运动变化的观点;由平面的三个基本性质的有关公理,提供了证明共面、共线、共点问题的方法,揭示了立体图形转化为平面图形的重要思想。

学生学习的重点是与平面的基本性质有关的公理、推论及其证明思路和解决共面、共线、共点问题的方法;难点是问题的证明过程及其书写格式。因此教学时应从实物演示中引导学生观察实验,搞清公理的条件与结论间的具体关系,且教师要作出示范,严谨规范证明过程格式。

第一课时

课 题

9.1.1 平面(一)

教学目标

(一)教学知识点

1. 平面的概念、平面的表示法.
2. 平面的基本性质.

(二)能力训练要求

1. 了解平面的概念,掌握平面的表示法.
2. 掌握平面的基本性质及它们的作用.
3. 会用文字语言、图形语言、符号语言表示点、线、面的位置关系.
4. 能够画出水平放置的平面的直观图.
5. 培养学生的空间想象能力.

(三)德育渗透目标

通过本节内容的学习,使学生认识我们所处的世界是一个三维空间,由此培养学生的辩证唯物主义世界观。

教学重点

1. 平面的概念.“平面”是教材中只作描述说明,而不定义的最原始的基本概念,应让学生结合实例弄清平面的含义,认真体会平面与平面无大小之分,无厚薄之别,仅有位置上的不同.
2. 会正确画图表示两相交平面的位置关系.
3. 平面的基本性质,要注意它们的条件、结论、作用、图形语言及符号语言,并熟记它们,达到能得心应手运用它们的程度.

教学难点

平面基本性质的掌握与运用.



教学方法

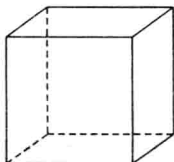
师生共同讨论法

这是立体几何的第一节课,也可叫做立体几何的起始课.要对这一学科的内容作一个大概的介绍,使学生一开始就对这门学科有一个初步的了解,为以后的学习打下思想基础.同时,通过师生的共同讨论,使学生体会到这门学科并不难学,克服畏难情绪,引起学生兴趣.

教具准备

1. 正方体或长方体模型一个.
2. 投影片七张.

第一张:下图(记作 9.1.1 A)



第二张:本课时教案第 2 页图(记作 9.1.1 B)

第三张:本课时教案第 3 页图(记作 9.1.1 C)

第四张:课本 P₆ 图 9—4(记作 9.1.1 D)

第五张:课本 P₆ 图 9—5(记作 9.1.1 E)

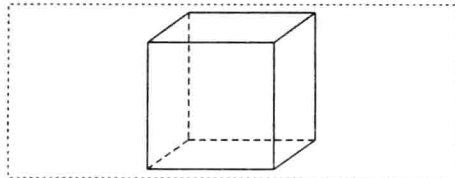
第六张:课本 P₆ 图 9—6(记作 9.1.1 F)

第七张:本课时教案后面的预习内容及提纲(记作 9.1.1 G)

教学过程

I. 课题导入

[师]同学们来看(打出投影片 9.1.1 A),这是什么图形?



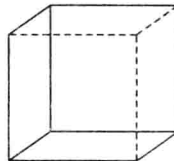
[生]长方体.

[师]我们看见了长方体的哪几个面?

[生]前面、上面和右面.

[师]好.再看这个图形(右图).

请注意我画的次序(先实线后虚线),同学们看,这是什么图形?



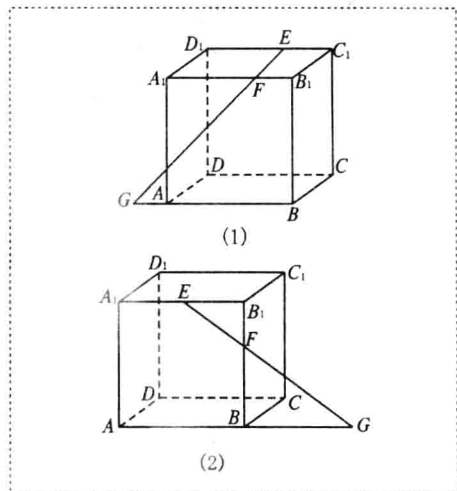
[生]长方体.

[师]对,也是长方体,那么看见的面不是和刚才的图一样?

[生]不一样.看见的是前面、左面和下面.

[师]答得好.这两个图形的区别只是三条虚线不同,但看上去位置却大不一样了.

[师]请判断下面的两个图形是否正确.(打出投影片 9.1.1 B)



图(1)中,点 E 、 F 分别在 C_1D_1 和 A_1B_1 上,直线 EF 交 BA 的延长线于点 G ;图(2)中,点 E 、 F 分别在 A_1B_1 和 B_1B 上,直线 EF 交 AB 的延长线于点 G .

大家看看,是图(1)中的直线 EF 交 BA 的延长线于点 G ,还是图(2)中的直线 EF 交 AB 的延长线于点 G ?

(生面面相觑)

[生甲]图(1)中的直线 EF 与 BA 的延长线不相交,图(2)中的直线 EF 与 AB 的延长线相交.

[师]为什么?

[生甲]图(2)中的 EF 与 AB 都在长方体的前面内,图(1)中的 EF 在长方体的上面, AB 在长方体的下面.

[师]这位同学回答得很好(取出实物模型,演示给学生看),从这个模型上可以更清楚地看到图(1)中的直线 EF 与 BA 的延长线不相交.

(从模型到图形初步培养学生的空间想象能力)

[师]图(1)、图(2)表示的正方体是一种空间图形,空间图形是立体几何研究的对象.平面图形是空间图形的一部分.



备课札记

立体几何是在平面几何的基础上进行研究的,研究的内容是:空间图形的画法、性质和计算;空间图形的大小、形状和位置关系,以及它们的应用。

初中的平面几何是很重视系统学习的,理论严谨、层次分明。到了高中,数学学习更加着重理性要求,立体几何也是如此,同样要用公理、定理、定义等等,把基本内容表达出来,从而体现立体几何的基本概念与方法。

空间图形中,最简单的图形就是点、线、面,其中点与线在平面几何中已经研究过,因此在立体几何中先介绍平面。

II. 新课讨论

[师]常见的桌面、黑板面、平静的水面、平整的地面等,都给我们以平面的印象。几何里所说的平面,就是从这样的一些物体中抽象出来的,但是,几何里的平面是向四周无限伸展的。

1. 平面的画法及表示

[师]在平面几何中,怎样画直线? 哪位同学来黑板上画出一条直线?

(一位学生上讲台在黑板上画出一条直线)

[师]这是一条直线吗?(学生茫然)这可以表示一条直线,实质上,我们画的只是直线的一部分,而要以想象——两头无限伸展,才能认为这是一条直线,否则,只能表示一条线段。

我们能否根据直线的画法,想出平面的画法来?

[生]画出平面的一部分,加以想象——四周无限扩展。

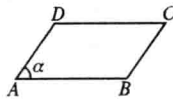
[师]谁来画一下?

(几位同学踊跃到黑板上画,画出来的有圆形、三角形、四边形、多边形及任意封闭图形)

[师]同学们所画的图可以表示平面吗?

[生]只要加以想象——四周无限扩展,都可以表示平面。

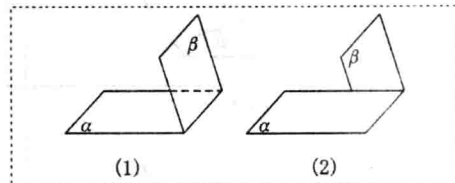
[师]很好!从大家的画法中,可以看出,平面的一部分,不像直线的一部分是唯一的,大家所画的加以想象,都可以表示平面。当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时,感到它们都很像平行四边形,因此通常我们用画平行四边形来表示平



边形的锐角画成 45° , 横边画成邻边的 2 倍长(如图)。

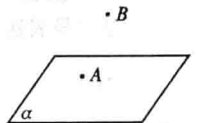
平面通常用一个希腊字母如 α, β, γ 等来表示,如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等,也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面 AC 、平面 BD 。今后一般用 A, B, C, \dots 表示点, a, b, c, \dots 表示线, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示平面。

几个平面画在一起,当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮部分的线段画成虚线或不画(打出投影片 9.1.1 C),这样看起来立体感强一些。



图(1)表示平面 β 在平面 α 的上面,图(2)表示平面 α 在平面 β 的前面。

(再用课本 P₄ 图 9-2 作说明)



[师]平面内有无数的点,平面可以认为是由它内部的所有点组成的点集,其中每个点都是它的元素。点 A 在平面 α 内,记作 $A \in \alpha$, 点 B 在平面 α 外,记作 $B \notin \alpha$ 。这里的平面是集合,点是元素。

2. 平面的基本性质

[师]平面几何中,直线的基本性质是什么?

[生]两点确定一条直线。

[师]好!照这样推想,平面的基本性质应该是几个点确定一个平面?(学生不知该怎样做答)正像平面的画法一样,平面的基本性质要比直线的基本性质复杂些。在生产与生活中,人们经过长期的观察与实践,总结出关于平面的三个基本性质,我们把它们当作公理,作为进一步推理的基础。所谓公理,就是大家公认的道理,就是不必证明而直接承认的真命题,它们是进一步推理的出发点和根据。

下面同学们打开课本 P₅, 请阅读一下平面基本性质的三个公理。

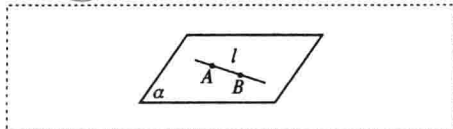
(学生阅读,教师将三个公理板书于黑板上)



[师]从集合的角度看,公理1就是说,如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集),那么这条直线就是这个平面的真子集。

直线是由无数个点组成的集合,点 P 在直线 l 上,记作 $P \in l$;点 P 在直线 l 外,记作 $P \notin l$;如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内,就说直线 l 在平面 α 内,或者说平面 α 经过直线 l ,记作 $l \subset \alpha$,否则就说直线 l 在平面 α 外,记作 $l \not\subset \alpha$ 。

公理1的图形如图(打出投影片 9.1.1 D)。



$$\text{符号表示为: } \left. \begin{array}{l} A \in l \\ B \in l \\ A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l \subset \alpha.$$

有一种等价的说法,即“直线 l 上所有的点都在平面 α 内”,可以说成“直线 l 上任一点 C 都在 α 内”,于是符号表达又可以记作

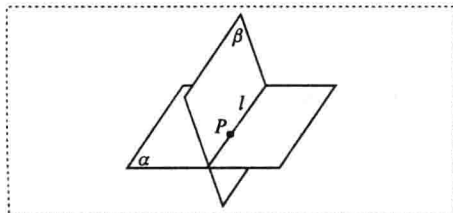
$$\left. \begin{array}{l} l \subset \alpha \\ \text{任一点 } C \in l \end{array} \right\} \Rightarrow C \in \alpha.$$

这种换一种说法的符号表示在实际问题中经常用到。

公理2是说,两个不重合的平面,只要它们有公共点,这两个平面就是相交的位置关系,交集是一条直线。

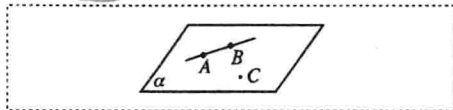
如果平面 α 和平面 β 有一条公共直线 l ,就说平面 α 和平面 β 相交,交线是 l ,记作 $\alpha \cap \beta = l$ 。

公理2的图形如图(打出投影片 9.1.1 E)。



$$\text{符号表示为 } P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = l, \\ P \in l. \end{array} \right.$$

公理3的图形如图(打出投影片 9.1.1 F)。



符号表示为 $C \notin \text{直线 } AB$

$$\Rightarrow \text{存在唯一的平面 } \alpha, \text{ 使得 } \left\{ \begin{array}{l} A \in \alpha, \\ B \in \alpha, \\ C \in \alpha. \end{array} \right.$$

注意:公理中“有且只有一个”的含义是:“有”,是说图形存在;“只有一个”,是说图形唯一;“有且只有一个平面”的意思是说“经过不在同一直线上的三个点的平面是有的,而且只有一个”,也即不共线的三点确定一个平面。

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”。

各个公理的作用:

公理1的作用有二:一是可以用来判定一条直线是否在平面内,即要判定直线在平面内,只需确定直线上有两个点在平面内即可;二是可以用来判定点在平面内,即如果直线在平面内,点在直线上,则点在平面内。

公理2的作用也有二:一是判定两个平面相交,即如果两个平面有一个公共点,那么这两个平面相交;二是判定点在直线上,即点若是某两个平面的公共点,那么该点就在这两个平面的交线上。

公理3是确定平面的依据。

III. 课堂练习

课本 P₂ 练习 1, 2, 4.

IV. 课时小结

通过本节课的学习,我们明确了立体几何研究的对象是空间图形;它是在平面几何的基础上研究的,主要研究空间图形的大小、形状和位置关系、画法、性质和计算及其应用。首先我们研究了平面的画法和基本性质,一般画平行四边形表示平面;平面的基本性质表示为三个公理,它们分别表示了点、线、面的最基本的关系。我们一定要掌握平面的基本性质,并且能熟练地用文字语言、图形语言、符号语言表示点、线、面及其关系。

V. 课后作业

(一)课本 P₈ 习题 9.1 1, 2(1), 3, 4.

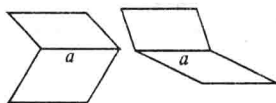
(二)1. 预习 P₆ ~ P₇ 三个推论及例题。

2. 预习提纲

(1)三个推论的文字语言、图形语言、符号语言各是怎样的。

(2)三个推论能否分别换一种表述方法?若能,试作表述。

(3)仿照推论1的证明方法,试证推论2、推论3。



(2)

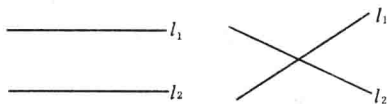
答案:略.

7. 两条直线划分平面有几种不同的划分方法? 请画图说明.

答案:有两种不同的划分方法.

当 $l_1 \parallel l_2$ 时, 两直线将平面划分成三部分; 当 l_1 与 l_2 相交时, 两直线将平面划分成四部分.

如图:



8. 点 P 在直线 l 上, 而直线 l 在平面 α 内, 用符号表示为..... ()

- A. $P \subset l \subset \alpha$
- B. $P \in l \in \alpha$
- C. $P \subset l \in \alpha$
- D. $P \in l \subset \alpha$

答案:D

9. 下列几种说法中, 正确的是... ()

- A. 四边形一定是平面图形
- B. 空间三个点确定一个平面
- C. 桌面是一个平面
- D. 三角形一定是平面图形

答案:D

10. “已知 $\alpha \cap \beta = l$, 若点 $P \in \alpha$ 且点 $P \in \beta$, 则 $P \in l$ ”. 用文字语言应叙述为_____.

答案:已知平面 α 与平面 β 相交于直线 l , 如果点 P 既在平面 α 内又在平面 β 内, 那么点 P 在直线 l 上

第二课时

课 题

9.1.2 平面(二)

教学目标

(一) 教学知识点

1. 平面基本性质的公理 3 的三个推论.
2. 平面的基本性质及其推论的作用.
3. 推论的图形语言、符号语言.
4. 性质与推论的简单应用.

(二) 能力训练要求

1. 掌握公理 3 的三个推论.

2. 会用图形语言、符号语言表示推论的文字语言.

3. 掌握平面的基本性质及其推论的作用.
4. 初步掌握推论与性质的简单应用.

(三) 德育渗透目标

使学生通过空间想象能力的初步训练, 加深对我们所处的三维空间的认识, 培养学生的辩证唯物主义世界观.

教学重点

平面基本性质公理 3 的三个推论, 在学习时要注意它们的条件、结论、作用、图形语言及符号语言, 并掌握熟记它们.

教学难点

三个推论的证明及性质、推论的简单应用.

教学方法

指导学生自学法

上节课我们学习了平面的基本性质——三个公理, 本节课所学的三个推论是在上节课公理的基础上推出的结论, 教师给予必要的点拨指导, 学生对推论的学习与掌握应该是没有问题的. 启发引导学生对推论的证明(也可根据学情让学生模仿证明), 既让学生尝试探索证明途径, 培养学生的逻辑推理能力, 又可突出学生的主体参与, 使学生体会到参与的乐趣, 学会自学的方法, 增强自己获取知识的能力. 至于公理与推论的简单应用, 教师应在方法上予以必不可少的指导.

教学过程

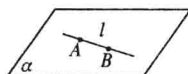
I. 复习回顾

[师]上节课我们学习了平面的基本性质——三个公理, 请同学们回忆一下, 三个公理的具体内容是什么?

[生甲]如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

[师]好! 用图形表示是怎样的呢?

[生乙](上讲台在黑板上作图)



[师]用符号表示是怎样的呢?

[生丙](板书于黑板上)

$$\left. \begin{array}{l} A \in l \\ B \in l \\ A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l \subset \alpha.$$

[师]很好! $l \subset \alpha$ 就说直线 l 在平面 α 内,也就是说直线 l 上的所有的点都在平面 α 内,请同学们考虑一下,怎样的直线 l 我们就说它在平面 α 外呢?

[生丁]不在平面 α 内的直线 l ,我们就说它在平面 α 外.

[生戊]直线 l 上没有两点在平面 α 内,我们就说它在平面 α 外.

[生己]直线 l 上有一个点不在平面 α 内,我们就说它在平面 α 外.

[生庚]直线 l 上最多有一个点在平面 α 内,我们就说它在平面 α 外.

[师]生丁、戊、己、庚谁谈得正确呢?

(学生考虑,然后回答:都正确)

[师]刚才四位同学的回答都是正确的!那么同学们谁来谈一下,直线 l 在平面 α 外时,直线与平面的位置关系可能是怎样的?

[生辛]直线与平面只有一个公共点或直线与平面没有公共点.

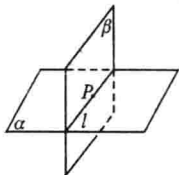
[师]好!直线与平面没有公共点或直线与平面只有一个公共点,都叫直线在平面外.

(这个讨论,为日后研究直线与平面的位置关系打下伏笔)

[师]再请一位同学来谈一下公理 2 的内容.

[生壬]如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

其图形语言为

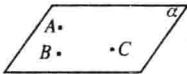


用符号表示为 $P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l$ 且 $P \in l$.

[师]很好!这个公理告诉我们,如果两个平面有一个公共点,那么它们相交于过这个公共点的一条直线.在画两个平面相交时,一定要把它们交线画出来.再请一位同学来谈一下公理 3.

[生癸]经过不在同一直线上的三点,有且只有一个平面.

其图形语言为



用符号表示为 A, B, C 不共线 \Rightarrow 存在唯一

的平面 α , 使得 $\begin{cases} A \in \alpha, \\ B \in \alpha, \\ C \in \alpha. \end{cases}$

[师]公理 3 实质上是确定平面的条件.从刚才大家的回答来看,对各个公理,大家记忆得很好,但关键还在于理解,要把各个公理的作用弄清楚、弄透彻,正确、合理地运用它去解决具体问题.

在平面几何中,我们知道两点确定一条直线,在立体几何中,我们又知道,不在一直线上的三点确定一个平面,后者就是公理 3 的实质.由公理 3,我们还可得到下面的一些推论,请同学们再看课本 P_6 .

II. 指导自学

(学生看课本时,教师将三个推论板书写在黑板上)

推论 1: 经过一条直线和这条直线外的一点有且只有一个平面.

推论 2: 经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3: 经过两条平行直线有且只有一个平面.

[师]对于推论 1,可以这样来理解:公理 3 告诉我们不在同一直线上的三点确定一个平面,由于这三点中的任意两点可确定一条直线,而第三点在这条直线外,所以由公理 3 这条直线与它外面的一点可确定一个平面.

这样理解是可以的,但对于推论的正确性,还是需要进行严格证明的.

分析:(1)与平面几何的证明一样,证明立体几何问题的一般步骤是:

第一步:根据题意作图,写出已知、求证;

第二步:写出证明过程.

(2)对于“有且只有”型命题的证明,要从“有”和“只有”两方面证明,即既证明存在性——“有”,又证明唯一性——“只有”.

(3)化生疏为熟悉、化未知为已知是我们常用的解(证)题方法.

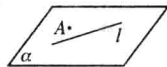


备课札记



[师]推论 1 的图形语言是怎样的？请一位同学来黑板上画出。

[生](上黑板画图)



[师]请根据推论 1 的文字语言和图形写出已知和求证。

[生]已知：点 $A \notin l$ 。

求证：过点 A 和直线 l 有且只有一个平面。

[师]很好，下面我们一起来作出证明，由刚才的分析，对于这个“有且只有”型的命题，既要证“存在性”，又要证“唯一性”。

证明：①存在性。在直线 l 上任取两点 B, C ，

据题意， A, B, C 三点不共线。

由公理 3，经过 A, B, C 三点有一个平面 α 。

$\because B \in l, C \in l, \therefore l \subset \alpha$ (公理 1)。

又 $A \in \alpha, \therefore$ 平面 α 是经过点 A 和直线 l 的平面。

②唯一性

根据公理 3，经过不共线的三点 A, B, C 的平面只有一个，所以经过直线 l 和点 A 的平面只有一个。

由①、②，可知经过一条直线和这条直线外的一点有且只有一个平面。

[师]这个推论用符号语言可表示为_____。

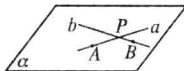
[生] $A \notin l \Rightarrow$ 存在唯一的平面 α ，使得 $A \in \alpha$ 且 $l \subset \alpha$ 。

[师]上面我们给出了推论 1 的证明，请同学们仿照，尝试给出推论 2、推论 3 的证明。

(同学试证，教师巡视，可让同学将证明过程板书于黑板上)

(推论 2：经过两条相交直线有且只有一个平面)

已知：直线 a, b 且 $a \cap b = P$ 。



求证：过 a, b 有且只有一个平面。

证法一：①存在性

在直线 a, b 上分别取不同于点 P 的点 A, B ，

则点 A, B, P 是不共线的三点(否则与 a, b 是两条相交直线矛盾)。

根据公理 3，过 A, B, P 三点有一个平面 α 。

$\because A \in \alpha, P \in \alpha, \therefore AP \subset \alpha$ ，即 $a \subset \alpha$ 。

同理 $b \subset \alpha$ ，因此过直线 a, b 有平面 α 。

②唯一性

\because 经过直线 a, b 的平面一定经过点 A, B, P ，根据公理 3，经过不共线的三点 A, B, P 的平面只有一个， \therefore 经过 a, b 的平面只有一个。

由①、②，可知经过两条相交直线有且只有一个平面。

证法二：①存在性

在直线 a 上取不同于点 P 的点 A ，

则点 $A \notin$ 直线 b 。

根据推论 1，过点 A 和直线 b 有一个平面 α 。

$\because b \subset \alpha, P \in b, \therefore P \in \alpha$ 。

又 $A \in \alpha, \therefore AP \subset \alpha$ ，即 $a \subset \alpha$ 。

\therefore 经过相交直线 a, b 有平面 α 。

②唯一性

\because 经过直线 a, b 的平面一定经过点 A 和直线 b ，而 $A \notin b$ 。

根据推论 1，经过点 A 和直线 b 的平面只有一个。

\therefore 经过 a, b 的平面只有一个。

由①、②，可知经过两条相交直线有且只有一个平面。

推论 3：经过两条平行直线有且只有一个平面。

已知：直线 a, b 且 $a \parallel b$ 。

求证：经过 a, b 有且只有一个平面。

证明：①存在性

$\because a \parallel b$ ，由平行线的定义， a, b 在同一平面内，

\therefore 过直线 a, b 有一个平面 α 。

②唯一性

在直线 b 上任取一点 B ，

则 $B \notin a$ (否则与 $a \parallel b$ 矛盾)，且 B, a 在过 a, b 的平面 α 内。

又由推论 1，过点 B 和直线 a 的平面只有一个，

\therefore 过直线 a, b 的平面只有一个。

由①、②，可知经过两条平行直线的平面有且只有一个。

[师]推论 2 与推论 3 用符号语言可分别表示为什么呢？

[生]推论 2 可表示为

$a \cap b = P \Rightarrow$ 存在唯一平面 α ，使得 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$ 。

推论 3 可表示为

$a \parallel b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ，使得 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$ 。

[师]“有且只有一个平面”可以说成“确

定一个平面”。比如公理 3 可以表述为“不在同一直线上的三点确定一个平面”。类似地，公理 3 的三个推论可以分别叙述为——

[生]一条直线与它外面的一点确定一个平面。

两条相交直线确定一个平面。

两条平行直线确定一个平面。

[师]好。由此可以看出公理 3 及它的三个推论，给出了确定一个平面时经常使用的一些条件，我们要予以准确把握。下面我们来进行有关的练习。

III. 课堂练习

课本 P₈ 习题 9.1 1,2,5.

IV. 课时小结

本节课，我们学习了公理 3 的三个推论，这三个推论连同公理 3 都是确定平面的条件，它们是把平面几何知识应用于立体几何知识的桥梁，为立体几何问题转化为平面几何问题提供了理论依据和具体方法。

V. 课后作业

(一)课本 P₈ 6,7,8.

(二)1. 预习课本 P₇ 例题.

2. 预习提纲 证三线共面的方法是什么?

板书设计

9.1.2 平面(二)	
学生画的图	
推论 1	证明
推论 2	证明
推论 3	证明
小结	

备课资料

思考与练习

一、选择题

1. 下列命题中，正确命题的个数是 ()
①有三个公共点的两个平面重合 ②梯形的四个顶点在同一平面内 ③三条互相平行的直线必共面 ④四条线段顺次首尾连接，构成平面图形

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

答案：B

2. 下列命题正确的是 ()

A. 两条直线可以确定一个平面

B. 一条直线和一个点可以确定一个平面

C. 空间不同的三点可以确定一个平面

D. 两条相交直线可以确定一个平面

答案：D

3. 四条直线相交于一点，它们能确定的平面的个数为 ()

A. 1

B. 4

C. 6

D. 1 或 4 或 6

答案：D

4. 空间四点，没有三点共线，可确定平面的个数为 ()

A. 1

B. 4

C. 1 或 4

D. 0 或 1

答案：C

5. 长方体各面上的对角线所确定的平面的个数为 ()

A. 6

B. 12

C. 14

D. 20

答案：D

6. 在空间中，下列命题错误的是 ()

A. 圆上三点可确定一个平面

B. 圆心和圆上两点可确定一个平面

C. 四条平行直线不能确定五个平面

D. 空间四点中，若四点不共面，则任意三点不共线

答案：B

7. 在空间，下列命题错误的是 ()

A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

B. 两组对边分别平行的四边形是平行四边形

C. 一组对边分别平行且相等的四边形是平行四边形

D. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

答案：D

8. 空间四点中“三点共线”是“四点共面”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案：A

9. 若给定空间三条直线共面的条件，这四个条件中不正确的是 ()

①三条直线两两相交

②三条直线两两平行

③三条直线中有两条平行

④三条直线共点



A large vertical rectangular area with horizontal lines, intended for handwritten notes.



A. ② B. ②③ C. ②③④ D. ①②③④

答案:D

10. 空间三个平面两两相交,那么 ()

- A. 必相交于一点
- B. 必相交于一条直线
- C. 必相交于三条平行直线
- D. 不可能有且只有两条交线

答案:D

二、填空题

1. 四条平行直线最多能确定 _____ 个平面.

答案:6

2. 直线与平面公共点的个数可能为

答案:0 或 1 或 无穷多

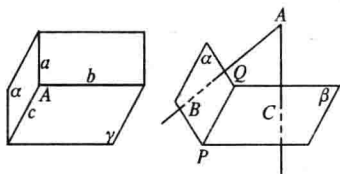
3. 一条直线和这条直线外不共线的三点能确定的平面的个数为 _____.

答案:1 或 3 或 4

4. “点 P 在直线 l 上,点 P 不在平面 α 内,直线 l 与平面 α 相交于点 O ”,用符号语言叙述可表示为 _____.

答案: $P \in l, P \notin \alpha, l \cap \alpha = O$

5. 根据下图,写出图中的元素应满足的条件.



(1)

(2)

(1) 对于图(1), $\alpha \cap \beta =$ _____; $\beta \cap \gamma =$ _____; $\alpha \cap \gamma =$ _____; A _____ α ; A _____ β .

(2) 对于图(2), _____ = PQ ; _____ = B ; _____ = C ; _____ = A .

答案:(1) $a \ b \ c \in \in$ (2) $\alpha \cap \beta$
 $AB \cap \alpha \ AC \cap \beta \ AB \cap AC$

三、解答题

1. 同时过空间四点可以作几个平面?

答案:当这四点共线时,同时过这四点可以作无数个平面;

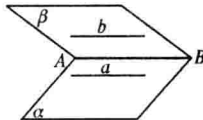
当这四点有且只有三点共线时,同时过这四点可以作一个平面;

当这四点分别在两条直线上,且这两条直线平行或相交时,同时过这四点可以作一个平面;

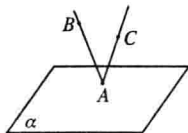
不是上述情况,则不存在同时经过这四个点的平面.

2. 根据下列条件画出图形:平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = AB$, 直线 $a \subset \alpha$, 直线 $b \subset \beta, a \parallel AB, b \parallel AB$.

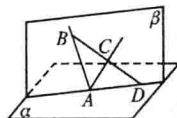
答案:



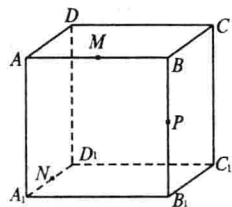
3. 如图, $A \in \alpha$, 直线 AB 和 AC 不在 α 内, 画出 AB 和 AC 所确定的平面 β , 并画出直线 BC 和平面 α 的交点.



答案:



4. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 8 cm, M, N, P 分别是 AB, A_1D_1, BB_1 的中点.



(1) 画出过 M, N, P 三点的平面与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线以及与平面 BB_1C_1C 的交线;

(2) 设过 M, N, P 三点的平面与 B_1C_1 交于 Q , 求 PQ 的长.

解:(1) 设 M, N, P 三点确定的平面为 α , 则 α 与平面 AB_1 交于 MP .

设 $MP \cap A_1B_1 = R$,

则 RN 是 α 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线. 设 $RN \cap B_1C_1 = Q$.

则 PQ 是 α 与平面 BB_1C_1C 的交线.

(2) \because 正方体的棱长为 8 cm, $\therefore B_1R = BM = 4$ cm.

在 $\triangle RA_1N$ 中, $\frac{B_1Q}{A_1N} = \frac{RB_1}{RA_1}$,

$\therefore B_1Q = \frac{4}{12} \times 4 = \frac{4}{3}$.

在 $Rt\triangle PB_1Q$ 中, $\because PB_1 = 4, B_1Q = \frac{4}{3}$,

$\therefore PQ = \sqrt{4^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{4}{3} \sqrt{10}$ (cm).

故所求 PQ 的长为 $\frac{4}{3} \sqrt{10}$ cm.

第三课时

课 题

9.1.3 平面(三)

教学目标

(一)教学知识点

1. 性质与推论的简单应用.
2. 利用平面的基本性质证明点共面、线共面、点共线、线共点问题的一般方法.

(二)能力训练要求

通过严格的推理论证,培养学生的逻辑思维能力发展其空间想象力.

(三)德育渗透目标

1. 知识是重要的,掌握并应用知识是更重要的,所学的知识,关键在于应用,通过知识的应用,使学生掌握方法、规律,学会正确推理,以理服人,培养学生严谨的学风.

2. 使学生了解个性与共性、特殊与一般间的关系,培养学生的辩证唯物主义观点.

教学重点

1. 证明点共面、线共面、点共线、线共点问题.
2. 证明过程的书写格式.

教学难点

1. 证明点共面、线共面、点共线、线共点问题.
2. 公理及其推论的适当选择与灵活应用.

教学方法

师生共同讨论法

通过对典型例题的分析、讨论与证明,使学生从中悟出共面、共线、共点问题的证明方法,并尝试对问题的证明,在应用中掌握方法、规律.

教具准备

投影片四张.

第一张:课本 P_7 例题及图 9—8(记作 9.1.3 A)

第二张:本课时教案例 2 及图(记作 9.1.3 B)

第三张:本课时教案例 3 及图(记作 9.1.3 C)

第四张:本课时教案后面的预习内容及

提纲(记作 9.1.3 D)

教学过程

I. 复习回顾

[师]前面我们学习了平面的基本性质——三个公理,上节课我们又学习了公理 3 的三个推论,哪位同学来回答一下三个公理及推论的具体内容?

[生甲]如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

不在同一条直线上的三点确定一个平面.

一条直线与它外面的一点确定一个平面.

两条相交直线确定一个平面.

两条平行直线确定一个平面.

[师]好.回答完全正确.我们每一位同学都要像生甲同学那样,熟记平面基本性质的三个公理及公理 3 的三个推论,它们是立体几何中最基础的知识.谁来谈一下各个公理及推论的作用呢?

[生乙]公理 1 可用来判定直线在平面内,也可用来判定点在平面内;

公理 2 可用来判定两个平面相交,也可用来判定点在直线上,还告诉我们这两个平面相交时,一定要画出它们的交线;

公理 3 及其三个推论是确定平面的条件.

[师]很好!从刚才举手回答的情形及两位同学的回答可以看出,同学们对平面的基本性质、公理及推论掌握得很好!下面我们来研究性质公理及推论的应用.

II. 新课讨论

(打出投影片 9.1.3 A)

[例 1]如图直线 AB 、 BC 、 CA 两两相交,交点分别为 A 、 B 、 C ,证明这三条直线共面.

[师]空间中的点或几条直线,如果都在同一个平面内,那么它们就共面了,请同学们思考:如何利用我们学过的公理及其推论进行理论证明呢?

[生丙]先证明两条直线确定一个平面,再证第三条直线也在这个平面内.

[生丁]每两条相交直线都能确定一个平面,若能证明这些平面重合,则也能说明这三条直线共面.



备课札记