金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2014 李永乐·王式安考研数学系列

线性代数辅导讲义

全新升级版

主编 李永乐

★最受学生尊崇"线代"老师

★连续10年最抢手复习资料！

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2014 李永乐·王式安考研数学系列

线性代数辅导讲义

全新升级版

主 编 李永乐

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义/李永乐主编. —西安:西安交通大学出版社,2010.2
ISBN 978-7-5605-3454-1

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.　①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 020946 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，敬请读者识别。

线性代数辅导讲义

主　　编:李永乐
策　　划:张伟
责任编辑:张梁　雷萧屹
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:12.5
字　　数:290 千字
版　　次:2013 年 3 月第 4 版
印　　次:2013 年 3 月第 1 次印刷
书　　号:978-7-5605-3454-1
定　　价:28.00 元

图书如有印装质量问题，请与印刷厂联系调换　　电话:(010)51906740

前　　言

本书此次修订篇幅有所调整，除了补充、更换、编写了一些新题之外，针对同学们不太好理解或不大注意的地方，我们在评注中增加了较多的说明，同时也对全书的结构做了微调。

本书是为准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。全书共分六章及一个附录，每章均由**知识结构网络图、基本内容与重要结论、典型例题分析选讲以及练习题精选四部分组成。**本书在章节的顺序安排和内容取舍上与教材略有不同，主要是为了方便同学们总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

本书力求在较短的时间内，用不多的篇幅，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和公式，了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。一方面，本书通过对**典型例题**的分析讲评，帮助同学们梳理解题的思路，熟悉常用的方法和技巧；另一方面，精编适量的**练习题**，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固、悟新与提高的目的。另外，题后的点评与评注，其目的在于帮助同学们弄清重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。

在考研数学中，线性代数占 5 个考题(2 个选择，1 个填空，2 个解答)，分值为 34 分，其平均用时应当为 40 分钟左右。因而我们在附录中设计了 45 分钟的水平测试，希望同学们在复习完本书之后，用三套自测题及时地进行查漏补缺。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo. com@金榜图书官方微博。本书也可作为大一新生学习线性代数时的参考书。

总之，经过修订再版，希望本书能对同学们的复习备考有更大的帮助。由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2013 年 3 月

目 录

第五章 特征值与特征向量

第六章 二次型

附录 45 分钟水平测试

第一章　行列式

一、知识结构网络图

- 行列式
  - 概念 — 不同行不同列元素乘积的代数和(共 $n!$ 项)
  - 性质
    - 经转置行列式的值不变
    - 某行有公因数 k,可把 k 提到行列式外
    - 某行所有元素都是两个数的和,则可写成两个行列式之和
    - 两行互换行列式变号
    - 某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变
  - 展开式 — 代数余子式
    - $|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$　(按 i 行展开)
    - $|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$　(按 j 列展开)
  - 计算
    - 数字型
      - 三角化法
      - 公式法
      - 递推法
    - 抽象型
      - 用行列式性质
      - 用矩阵性质
      - 用特征值　$|\boldsymbol{A}| = \prod \lambda_i$,相似
  - 证 $|\boldsymbol{A}| = 0$
    - $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 反证法
    - $r(\boldsymbol{A}) < n$
    - 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
    - $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$
  - 应用
    - $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 伴随矩阵求逆法
    - 线性相关(无关)判定
    - 可逆的证明
    - 克拉默法则
    - 特征值计算
    - 二次型正定判定

学习札记：

【评注】(1) 对于二、三阶行列式有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

注意这样的计算方法对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用.

(2) 对行列式的性质 3 要理解正确. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$, 有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$, 由于行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 中每一行都是两个数的和, 所以若用性质 3 把行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 拆开, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此一般情况下 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.

特别地,

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(3) 要会用行列式的性质及展开定理计算数字型行列式.

(4) 要熟悉抽象型行列式的计算.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基本概念

定义 1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列. 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

定义 1.2　一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例如，在 5 级排列 25134 中，有逆序 21，51，53，54，因此排列 25134 的逆序数为 4，即 $\tau(25134) = 4$. 所以排列 25134 是偶排列.

定义 1.3　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1) 称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

例如，若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项，那么根据行列式的定义，它应是不同行不同列元素的乘积. 因此必有 $j = 3$.

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 列的逆序数

$$\tau(4312) = 3 + 2 + 0 = 5$$

是奇数，所以该项所带符号为负号.

定义 1.4　在 n 阶行列式

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1.2}$$

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=2$ 即已知

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2$$

从而 $a=3$.

重要定理

定理 1.1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.3}$$

公式(1.3) 称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.1′ n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.4}$$

学习札记：

公式(1.4)称为行列式按第 k 列的展开公式.

定理 1.2　设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，当 $i \neq k \quad (i,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \tag{1.5}$$

当 $j \neq k \quad (j,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0 \tag{1.6}$$

【评注】　根据代数余子式的性质(1.3)与(1.5)，对于

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 和行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，我们有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，类似地由(1.4)与(1.6)有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

从而　$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

这是一个重要的公式，要会灵活运用(详见第二章伴随矩阵).

主 要 公 式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.7}$$

学习札记：

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \tag{1.8}$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.11}$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}| \tag{1.12}$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

学习札记：

【评注】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，若

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$$

则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

由 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解，故系数行列式 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$.

关于(1.12)的推导请参看 P_2 之评注(2).

特别地，若秩 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，由(1.12)知特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - \left(\sum a_{ii}\right)\lambda^2 = \left(\lambda - \sum a_{ii}\right)\lambda^2$$

那么，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

方阵的行列式

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$；　(1.13)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$；　(1.14)

(3) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；　(1.15)

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$；　(1.16)

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$；　(1.17)

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$；　(1.18)

(7) 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.　(1.19)

克拉默法则

若 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D} \tag{1.20}$$

其中 $$D_j=\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式不为 0，则方程组只有零解.

推论 2 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解，则系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

数字型行列式

【例 1.1】 (1996,1) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

[　　]

【分析】 本题解法较多,较简单的方法是用两行对换,两列对换,把零元素调至行列式的一角,就可用拉普拉斯展开式,例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

而知应选(D).

注:(1996,1) 意为本题选自 1996 年数学一真题,下同

【例 1.2】 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$ ________.

【分析】 把第 2 行加至第 1 行,提取公因式,即为范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

学习札记：

【例 1.3】 (1999,2) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　[　　]

【分析】 问方程 $f(x)=0$ 有几个根，也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 将第 1 列的 -1 倍依次加至其余各列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{(2)+(4)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} \qquad (\text{拉普拉斯}(1.9))$$

易见 $f(x)$ 是二次多项式，故应选(B).

【评注】 本题难度值 0.55. 由于行列式的每一个位置都含有 x，因此立即展开处理是不妥的，应当先恒等变形消除一些 x 再展开. 不要错误地认为这样的 $f(x)$ 一定是 4 次多项式，其实适当选系数可构造出 0 至 4 任一次数的多项式.

【例 1.4】 计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】 各列均加至第 1 列，并按第 1 列展开有

$$D=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{4}a_i & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

由(1.7)知，$D=x^3(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)$.

【例 1.5】 4 阶行列式

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

【分析】 对本题可用逐行相加的技巧，第一行的 x 倍加至第二行，然后第二行的 x 倍加至第三行，如此继续，有

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(-1)^{4+1}(-1)^3$$

$$=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4.$$

【例 1.6】 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\_\_\_\_.$$

【分析】 对于爪型行列式，将其转化为上（或下）三角行列式.

$$D=2\cdot3\cdot4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=24\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=24\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=-2.$$