大学数学系列丛书

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　许宏文
副主编　刁　瑞　李淑凤　廖　飞
主　审　赵宝江

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

大学数学系列丛书

线性代数

主　编　许宏文
副主编　刁　瑞　李淑凤　廖　飞
主　审　赵宝江

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是作者按照新形势下教材改革的精神，并结合线性代数课程教学的基本要求，根据多年从事线性代数的教学实践经验和教学改革成果编写而成的。

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值和特征向量、二次型。章后习题很多来自历年全国研究生入学试题，并在书末附有习题参考答案。

本书可作为普通高等院校理工、经济管理类各专业的教材，也可供报考硕士研究生的读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/许宏文主编. —北京：北京交通大学出版社：清华大学出版社，2013.8
（大学数学系列丛书）
ISBN 978－7－5121－1529－3

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①许…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 158232 号

责任编辑：黎　丹
出版发行：清 华 大 学 出 版 社　邮编：100084　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010－51686414
印 刷 者：北京时代华都印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　印张：12.25　字数：275 千字
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－5121－1529－3/O·188
印　　数：1～3 000 册　定价：28.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　言

本书是作者根据教育部关于理工、经济管理类本科线性代数课程教学的基本要求，以培养学生的专业素质为目的，在汲取了多年从事实践经验和教学改革成果的基础上编写而成的。在编写本书过程中，突出了以下几点。

1. 在内容安排上由浅入深，符合认知规律，既考虑了线性代数的科学性、系统性和逻辑性，对传统的教学内容和结构作了适当的调整，增加了与实际生活密切相关的数学理论和方法。

2. 在教学内容上实现了与专业课程内容的整体化，能够更好地为后续课程服务，并能满足报考硕士研究生和将来从事实际工作的需要。

3. 贯彻问题教学法的基本思想，对重要概念、定理、方法，尽量先从解决生活中的实际问题入手，再引入数学概念，介绍数学定理、方法，最后解决所提出的问题，使学生能够了解实际背景，提高学习兴趣，同时增强应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

4. 例题和习题的选配层次分明，难易适度，并恰当选用生活中的应用案例。教材在每节后面都配置基本习题，尽量使读者在做完本节习题后能够较好地理解和掌握本节的基本内容、基本理论和基本方法；在每章后配置总习题，总习题分为（A），（B）两组，其中（A）组习题反映了本科线性代数课程的基本要求，（B）组习题大部分题目来自历年全国研究生的入学试题，综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的读者使用。

5. 行文追求简洁流畅，重点、难点阐述详细，逻辑性强，既富有启发性又通俗易懂。针对数学基础课程教学的目标与特点，有些定理仅给出结论而略去证明过程，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，贴近教学实际，便于教与学。

本书是一本适宜于普通高等院校理工、经济管理类各专业学生学习线性代数课程的教材，也可供报考硕士研究生的读者参考。教材中加 * 号的内容，可根据需要自行选用。

本书共 5 章，分别由李淑凤（第 1 章，第 2 章 2.1～2.5 节）、廖飞（第 2 章 2.6 节）、刁瑞（第 3 章、第 4 章）、许宏文（第 5 章）执笔编写，全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由许宏文承担。

赵宝江教授详细审阅了本书，并提出了许多改进的意见，谨在此表示衷心的感谢。

本书的出版得到了牡丹江师范学院本科教学工程项目建设经费的资助，同时还得到了黑龙江省教学改革项目（11－SJC 13007）和牡丹江师范学院教学改革项目（12－XJ14053）经费的资助。本书已经被评为牡丹江师范学院2013年规划教材的重点建设教材。在此，感谢我校领导、老师和同学们的热情关心和合作。本书的出版得到了清华大学出版社和北京交通大学出版社的大力支持，尤其是黎丹编辑为本教材的出版做了大量的工作，在此谨致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，恳请广大读者和专家批评指正。

编 者

2013年7月

目　　录

第1章　行　列　式

行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的. 它是研究矩阵、线性方程组、向量间的线性关系、特征值和二次型等问题的有力工具，它不仅贯穿于线性代数的始终，而且在数学的其他分支及经济管理、科学技术中都有广泛的应用. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

1.1　n 阶行列式

1.1.1　二阶和三阶行列式

行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的. 考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

这里 b_1，b_2 是常数，a_{ij} 是 x_j 的系数，它有两个下标，下标 i 表示它在第 i 个方程，j 表示它是第 j 个未知量的系数.

利用消元法解方程组得到：当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，此方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆，引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

D 叫做**二阶行列式**. 它的横排叫做**行**，竖排叫做**列**，a_{ij}（i，$j=1$，2）称为行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，第二个下标 j 叫做**列标**.

二阶行列式所表示的代数和可以用画线（图 1－1）的方法记忆，即实线（主对角线）连接的两个元素之积减去虚线（副对角线）连接的两个元素之积，此方法也称为二阶行列式的“对角线法则”.

利用二阶行列式的概念，方程组（1－1）的解可以叙述为：当二阶行列式

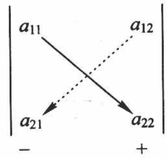

图 1-1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，该方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

【例 1-1】 计算二阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1\times(-4)-2\times(-3)=2$$

【例 1-2】 设 $D=\begin{vmatrix} t^2 & t \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$，求 t 的值.

解 $D=-2t^2-t$，由题设知$-2t^2-t=0$，解得 $t=0$ 或 $t=-\dfrac{1}{2}$.

【例 1-3】 解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2=3 \end{cases}$.

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$$

所以方程组有唯一解. 又

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2-3=-1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-1=2$$

于是方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{-1}{1}=-1,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{2}{1}=2$$

对于三元线性方程组有相仿的结论．设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-2}$$

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为**三阶行列式**.

同样，三阶行列式也有对角线法则（图 1－2），将很方便地记忆上述的计算公式，其中实线连接的三个元素的乘积取正号，虚线连接的三个元素的乘积取负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的值.

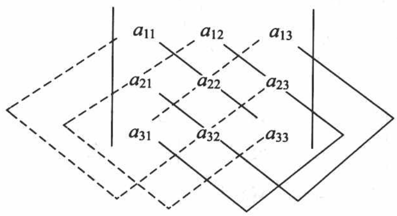

图 1－2

用消元法解线性方程组（1－2），可以得到与二元方程组（1－1）类似的结果，即当系数行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$时，方程组有唯一解.

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

【例 1-4】 计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 2\times1\times(-1)+1\times0\times3+1\times1\times(-7)- 1\times1\times3-1\times1\times(-1)-2\times0\times(-7)=-11$

【例 1-5】 设$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，其中 a，b 为实数. 当 a，b 满足什么条件时，$D=0$.

解 因为 $D=a^2+b^2$，所以当 $a=b=0$ 时，$D=0$.

【例 1-6】 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28\neq0$$

所以方程组有唯一解. 令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21$$

则方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3}{4}$$

1.1.2 排列与逆序

> **定义 1-1** 由 1，2，…，n 组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列.

显然是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的；其他的排列或多或少地破坏了自然顺序．例如，24315 是一个 5 级排列；$n(n-1)(n-2)\cdots321$ 是一个 n 级排列．

由 1，2，…，n 组成的 n 级排列共有 n！个．

定义 1-2 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序．一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．

定义 1-3 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列．

【例 1-7】 求下列排列的逆序数，并指出它们的奇偶性．

(1) 45132　　　(2) $n(n-1)\cdots21$

解 (1) $\tau(45132)=3+3+0+1+0=7$，故此排列为奇排列．

(2) $\tau[n(n-1)\cdots21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，故当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，该排列为奇排列．

定义 1-4 在排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列．这样一个变换称为一个对换．

例如，在排列 2431 中，将 4 与 1 对换，得到 2134，且其逆序数的奇偶性改变．一般地，有以下结论．

定理 1-1 任意一个排列，经过一次对换后，其奇偶性改变．

证略．

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

推论 在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\dfrac{n!}{2}$ $(n\geqslant2)$ 个．

1.1.3 n 阶行列式的概念

在给出 n 阶行列式的定义之前，先来看三阶行列式的构成规律．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

从三阶行列式的值中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而且每一项乘积都是由行

CHAPTER 1

列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成的. 另一方面，每一项乘积都带有符号. 这个符号是按什么原则决定的呢？在三阶行列式的展开式中，每项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 恰好是 1，2，3 的一个排列. 可以看出，当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 是偶数时，对应的项前面是正号，当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 是奇数时为负号.

仿此，给出 n 阶行列式的定义.

定义 1－5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i，j=1，2，\cdots，n)$ 组成的记号

$$|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

称为 n 阶行列式，其中横排叫做行，竖排叫做列. 它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-4}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，每一项都按下面规则带有符号；当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是偶数时，式（1－4）带有正号；当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是奇数时，式（1－4）带有负号，则称式（1－3）为 n 阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

定义 1－5 表明，n 阶行列式是由 n！项组成的.

【例 1－8】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

且只有当 $j_1=2$，$j_2=3$，$j_3=4$，$j_4=1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$，所以

$$D=(-1)^{\tau(2341)}a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}=(-1)^3\times1\times2\times3\times4=-24$$

【例 1-9】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这里 $a_{ii}(i=1，2，\cdots，n)$ 称为**主对角线上的元素**.

解 在展开式中，行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为行列式中第 n 行除 a_{nn} 以外全为零，故只有取 $j_n=n$ 时不为零；在考察第 $n-1$ 行 j_{n-1} 取值，因为它不能再取第 n 列，因此只有取 $j_{n-1}=n-1$ 时不为零，依次可知 $j_{n-2}=n-2$，…，$j_1=1$. 不难看出，展开式中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为零外，其余项都为零. 而这一项的列标排列为偶排列，所以这一项前面的符号是正的，于是

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

该行列式称为**上三角形行列式**，即上三角形行列式等于主对角线上元素的乘积.

除此以外，特殊的行列式还有以下几种.

（1）主对角线行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

（2）副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

（3）下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角形行列式也等于主对角线上元素的乘积.

由于数的乘法满足交换律，因此 n 阶行列式中取自不同行不同列的 n 个元素相乘时，其顺序可以是任意的，利用定理 1-1 可以证明：n 阶行列式展开式中的一般项还可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad 或 \quad (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 n 级排列. 于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

其中，$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中，$\sum$ 表示对所有不同行不同列的 n 个元素之积求和.

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ -b & a+b \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$

2. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

3. 解下列方程.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 2$　　(2) $\begin{vmatrix} x & x & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

4. 证明下列等式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

5. 求下列排列的逆序数.

(1) 45321 (2) 137654

(3) 382457619 (4) $(2k)1(2k-1)2\cdots(k+1)k$

6. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{33}a_{44}$ 的项.

7. 根据行列式的定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

中 x^3 的系数.

8. 用行列式的定义计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

9. 证明：对于一个 n 阶行列式，如果其中零元素的个数多于 n^2-n 个，那么行列式的值为零.

1.2 行列式的性质

行列式的计算是一个很重要的问题，也是一个很麻烦的问题. 当行列式的阶数大于 3 时，按定义来计算行列式是比较复杂的. 为了简化行列式的计算，先来研究行列式的性质.

1.2.1 行列式的性质

性质 1 将行列式的行、列互换，行列式的值不变. 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D'$.

其中，行列式 D' 称为 D 的**转置行列式**，有时 D 的转置行列式也记为 D^{T}.

证明 设

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $b_{ij}=a_{ji}$（i，$j=1$，2，…，n）. 于是，按行列式的定义有

$$D'=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

因此有 $D=D'$.

这个性质表明，行列式的“行”与“列”是平等的，对行（列）成立的结论，对列（行）也相应成立. 因此，下面阐述行列式性质时只讲行的情形，并把列的情形略述，但在应用时均可使用.

性质 2 交换行列式中某两行（列）的位置，行列式反号.

证明 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \end{array}$$

交换 D 的第 i 行与第 j 行对应元素（$1\leqslant i<j\leqslant n$），得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \end{array}$$

D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

它的元素在 D 中位于不同行不同列，因而在 D_1 中也位于不同行不同列，所以也是 D_1 的一般项. 因为 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 j 行，各元素所在的列并没有改变，所以它在 D 中的符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots j\cdots n)+\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}$$

而在 D_1 中的符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}$$