北京市海淀区重点中学特级高级教师编写

海淀题链

Haidian tilian

解题思维能力发散训练

初三数学

主编/邓 均 蒋大凤

东师教辅

东北师范大学出版社

北京市海淀区重点中学特级高级教师编写

海淀题链

Haidian tilian

解题思维能力发散训练

初三数学

主编/邓　均　蒋大凤

图书在版编目(CIP)数据

海淀题链——解题思维能力发散训练．初三数学/邓　均
蒋大凤主编．—长春:东北师范大学出版社,2001.6
ISBN 7-5602-2773-2

Ⅰ.海… Ⅱ.①邓… ②蒋… Ⅲ.数学课—初中—解题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 028169 号

□出 版 人:贾国祥
□责任编辑:曲春波　□封面设计:李金锋
□责任校对:高　亦　□责任印制:张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号(130024)
销售热线:0431—5695744　5688470
传真:0431—5695734
网址:http://www.nnup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
沈阳新华印刷厂印刷
沈阳市铁西区建设中路 30 号(110021)
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 2 次印刷
开本:880mm×1230mm 1/32　印张:11.75　字数:450 千
印数:10 001—41 000 册

定价:13.00 元

在题的链接中寻求一种解题的大智慧

《海淀题链——解题思维能力发散训练》前言

《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书是以发散思维为主线而编写的一套重在揭示初高中数学、物理、化学等学科内在联系和规律的新书，目的在于通过对原型题及其变型题之间的无穷变化的解剖和训练，使得中学生能够掌握一种用联系的眼光去看待一个个看似孤单零散的题，从而学会用一种凌厉的思维去击穿每一个无从下手的难题，学会用灵活多变的方法优化解决每一个问题的方式。

一些高水平的教师在课堂教学过程中经常使用的有效方法是：充分利用发散思维，探索数、理、化学科内部规律的相互关联，在两个和两个以上的题目之间，寻求其中的内在的变化和发展，挖掘其间隐藏着的看不见的联系和规律。同时，这更是一些尖子生接受速度快、解题能力强的核心因素。实际上，这种做法的关键就在于把一个个看上去相对封闭的题目放到一个相对宽泛的视野中，目的在于寻求一种解题的质量，寻求一种在掌握学科内在规律之上的解题大智慧，从而摒弃了那种见题就解，就题论题，全然不顾题目之间的相互联系和变化的机械式做法。教学效果自然漂亮，学生的学习水平和解题能力也得到了大幅度的提高。

所谓“条条大路通罗马”，是说通往罗马的道路是完全不同的。但如果你只知道一条路，你又如何知道你走的这条路就是最佳的路径呢？所谓“知己知彼，百战不殆”，是在告诉你常胜将军的秘诀是：不仅仅要了解你自己，更要了解你的对手。对于学习数、理、化而言，如果你不了解它，你又如何能“百战不殆”呢？从这一点来说，《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书不仅仅能够帮助你快速提高自己的学习水平，更多地掌握解题技巧和方法，更重要的是能够真正提高你自己的素质和能力，也就是说《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书中所蕴涵着的思维可以使你受益一生，因为那是一种大智慧！

创造能力的形成有两个必要条件：一是扎实的基础；二是创造性思维。其中创造性思维的一个核心思维就是发散思维。

发散思维是一种以某一问题为发散源，从横向和纵向多方位地进行辐射状态的积极思考和联想，广泛地搜集与发散源有关的知识和方法，从而使问题得以解决、升华的思维方式。发散思维是一种不依赖常规寻找变异的思维，它具有三个互相联系的特征，即流畅性、变通性和独特性。

流畅性是指思维畅通，一个表面看似一般但内涵十分丰富的问题，一个可以发展的问题，只要深入地思考就能将其向纵深拓展得到更多、更巧妙的结果，得到新的发现，即达到一题多变的效果。

变通性是指思维灵活多变，从不同的角度去探索、开拓思路，打破消极思维定势的束缚，不拘泥于已有的范例和模式，使一题多解。

独特性是指思维超乎寻常，标新立异，对于一些构思巧妙、条件隐蔽的问题，在熟练掌握常规思维方法的同时，探索一些不同寻常的非常规解法，使解题过程简捷、明了。以数学为例，如“数形结合法”、“赋值法”、“代换法”、“构造法”等。

为了培养学生的发散思维能力和创新能力，我们组织了一批具有丰富教学经验和创新精神，具有较高编写水平的老师编写了这套《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书。丛书以国家初中、高中（数学、

物理、化学)新教学大纲的教学必修章节、篇目为依据,具体地说以数学、物理、化学教学大纲规定的知识点为统辖,选择了能够代表数、理、化学科知识网络中重要的知识点作为例题,以[核心知识大盘点]、[典型例题大剖析]、[巩固练习大提高]、[参考答案大揭底]四大栏目构筑丛书编写体例,指导学生通过纵横发散思维深入探索数、理、化概念的内涵和外延,认识不同概念、定理、定律的发展与联系;学会运用数、理、化公式、概念、定理、定律,用不同的观点、方法归纳出解决问题的一般途径、方法及技巧。

希望同学们通过阅读这套丛书,学会用新角度、新观点、多层次地思考问题,从而达到掌握知识、创新知识、提高能力的目的。

参加本书编写的有:于静、邓均、邓兰萍、王建民、王晓萍、王爱莲、付仑、田玉凤、卢青青、乐进军、刘鸿、刘天华、刘汉昭、刘志诚、刘建业、刘桂兰、刘宏军、刘爱军、刘树桐、刘继群、刘淑贤、闫达伟、闫梦醒、朱志勇、朱万森、孙家麟、李里、李公月、李若松、李新黔、何小泊、吴琼、吴建兵、张立雄、张兆然、张宝云、张绍田、张振来、张淑芬、陆剑鸣、陈恒华、陈继蟾、金仲鸣、庞长海、庞炳北、姜杉、姚桂珠、赵汝兴、赵茹芳、柯育璧、高书贤、贾秋荣、徐淑琴、黄万端、韩乐琴、蒋大凤、蒋金利、程秋安、谭翠江、管建新、樊福、霍永生、魏新华。

由于时间仓促,书中难免有一些差错和不足之处,望读者朋友不吝赐教。

编　者

2001年6月于北京

海 淀 题 链
解题思维能力发散训练

《海淀题链——解题思维能力发散训练》编委会

目录

代数部分

第十二章 一元二次方程

核心知识大盘点

1. 知识结构一览表

一元二次方程
- 一元二次方程的有关概念
- 一元二次方程的解法
- 一元二次方程的根的判别式
- 一元二次方程的根与系数的关系
- 二次三项式的因式分解
- 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程
- 简单的二元二次方程组
- 一元二次方程的应用

2. 正确理解一元二次方程的有关概念，尤其对二次项系数不等于零这一条件要更为关注. 很多问题都是围绕它展开的，如形为 $ax^2+bx+c=0$（x 是未知数）的方程一定是一元二次方程吗？

3. 掌握一元二次方程求根公式的推导，并能根据方程的特点，熟练、灵活地选用恰当的方法（直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法）解一元二次方程. 对于一次项系数等于零的方程，往往可用直接开平方法，如 $x^2-4=0$. 学习中既要重视基本方法、基本技能的学习和落实，又要注意到不要为掌握某种解法而忽视其他解法，实际上解一元二次方程的各种方法是相通的. 通过解一元二次方程培养学生解决问题的良好习惯，即“观察——选择决策——反思”，不断提高学生的思维水平.

4. 理解并掌握一元二次方程根的判别式. 一元二次方程的根的判别式是一个比较重要的知识点，它的应用较为广泛，它既可以用来判断一元二次方程的根的情况，又可以用来为以后学习和研究二次函数及二次曲线作准备. 一般地说，一元二次方程的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值有三种情况（大于零，等于零，小于零），从而

决定了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的三种情况，反之亦然．学习一元二次方程根的判别式要注意以下两点：①强化一元二次方程的先决条件——二次项系数不等于零，以培养学生思维的严谨性；②要有意识地渗透分类讨论的思想．

5. 理解并掌握一元二次方程根与系数的关系．利用这一关系可直接解答：由已知一元二次方程的一个根求出另一个根或未知的系数；求以任意两个实数 m 和 n 为根的一元二次方程（即 $x^2-(m+n)x+mn=0$）；求一元二次方程两根相关的某些代数式的值，如求两个根的倒数和等．

6. 掌握可化为一元二次方程的分式方程和无理方程的解法．解分式方程的通法为去分母化分式方程为整式方程进而求解，同时也扩大了未知数的取值范围，因而可能产生增根；对于某些特殊的分式方程可用换元法求解．解无理方程的通法为方程两边平方，化无理方程为有理方程进而求解，此时可能产生增根；对于某些特殊的无理方程可用换元法求解．必须注意，不论解分式方程还是解无理方程都需要检验，检验时，对分式方程可将求得的整式方程的解代入最简公分母看是否等于即可，而对无理方程必须将求得的有理方程的解代入原方程进行检验．

7. 了解二元二次方程、二元二次方程组的概念，掌握由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组的解法，特别是会用代入法求这类方程组的解；掌握由一个二元二次方程和一个可分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组的解法．简单的二元二次方程是在学习了一元一次方程、一元二次方程的基础上的深入，在解简单的二元二次方程组时，往往将问题转化为已掌握的知识和方法来解决，在学习中可使学生进一步理解消元的思想方法．

8. 一元二次方程的应用是本章的一个难点，它主要包含以下两个方面：一是直接用于列方程解应用题；二是作为解决其他数学问题的工具．通过一元二次方程的应用，可培养学生分析问题和解决问题的能力，有利于培养学生的应用意识．

总之，一元二次方程是初中代数方程重要组成部分，其解法是全章学习的重点．掌握好一元二次方程的解法是解可化为一元二次方程的分式方程、无理方程和简单二元二次方程组的基础，而本章的难点是：一元二次方程的应用；解简单的二元二次方程组．

典型例题大剖析 ●●●

例1 解方程 $x^2-3x+2=0$.

[通法⇨通解]

解法1 （配方法）

$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+2=0$,

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$\therefore x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}$,

$x_1=1, x_2=2$.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

解法 2　（因式分解法）

$(x-1)(x-2)=0$, $\therefore x_1=1, x_2=2$.

$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

解法 3　（公式法）

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\times1\times2}}{2}$, $\therefore x_1=1, x_2=2$.

[变换⇨引申]

1. 对“元”变换

变换 1　解方程 $(x+1)^2-3(x+1)+2=0$.

解：将方程左边因式分解，得

$[(x+1)-1][(x+1)-2]=0$,

即 $x(x-1)=0$. $\therefore x_1=0, x_2=1$.

变换 2　解方程 $x^2-3xy+2y^2=0$.

解：由原方程，得 $(x-y)(x-2y)=0$.

$\therefore x_1=y, x_2=2y$.

变换 3　解方程 $x^4-3x^2+2=0$.

解：由原方程，得 $(x^2)^2-3x^2+2=0$, $(x^2-1)(x^2-2)=0$.

$\therefore x^2=1$，或 $x^2=2$,

$\therefore x_{1,2}=\pm1, x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$.

2. 对系数变换

变换 1　解方程 $10x^2-19x-15=0$.

解：由原方程，得 $(5x+3)(2x-5)=0$.

$\therefore x_1=-\frac{3}{5}, x_2=\frac{5}{2}$.

变换 2　解方程 $x^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$.

解：由原方程，得 $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})=0$.

$\therefore x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{2}$.

变换 3　解方程 $(a+b)x^2+2bx-a+b=0$ $(a+b\neq0)$.

解：由原方程，得

$[(a+b)x-(a-b)](x+1)=0$,

$\therefore (a+b)x-(a-b)=0$ 或 $x+1=0$.

由 $x+1=0$,解得 $x_1=-1$,

由 $(a+b)x-(a-b)=0$,且 $a+b\neq0$,解得 $x_2=\frac{a-b}{a+b}$.

3. 对"元"和系数变换

变换 1 解方程 $(y-\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}(y-\sqrt{3})=4$.

解:由原方程,得 $(y-\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}(y-\sqrt{3})-4=0$.

将 $(y-\sqrt{3})$ 视为一个元,由求根公式,得

$$(y-\sqrt{3})=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{28}}{2\times1}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}.$$

$\therefore y_1=-\sqrt{7}$,$y_2=\sqrt{7}$.

变换 2 解方程 $(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)+8=0$.

解:把 (x^2-2x) 视为一个元,将方程左边因式分解,得

$$[(x^2-2x)-2][(x^2-2x)-4]=0.$$

由 $x^2-2x-2=0$,得 $x_1=1+\sqrt{3}$,$x_2=1-\sqrt{3}$;

由 $x^2-2x-4=0$,得 $x_3=1+\sqrt{5}$,$x_4=1-\sqrt{5}$.

4. 对命题变换

变换 1 已知 $y=x^2-3x+2$,当 x 是什么数时,y 的值等于 0?

解:若 $y=0$,则有 $x^2-3x+2=0$,解这个方程,得 $x=1$,或 $x=2$.

当 $x=1$,或 $x=2$ 时,y 的值等于 0.

变换 2 已知 $x^2-3xy+2y^2=0$,求证 $x=y$,或 $x=2y$.

证明:$\because x^2-3xy+2y^2=0$,

$\therefore (x-y)(x-2y)=0$,$\therefore x=y$,或 $x=2y$.

点评 直接开平方法、配方法、求根公式法和因式分解法是解一元二次方程常用的方法;根据题的结构,通过设辅助元即换元来解一元二次方程,往往可使较复杂的问题简单化,并给人一种一目了然的感觉.

例 2 *求方程 $5x^2+5y^2+8xy-2x+2y+2=0$ 的实数解.*

[通法⇨通解]

解法 1 先把 y 视为常数,把原方程视为关于 x 的一元二次方程,

即 $5x^2+(8y-2)x+(5y^2+2y+2)=0$.

因为 x 是实数,所以判别式

$$\Delta=(8y-2)^2-4\times5\times(5y^2+2y+2)\geqslant0,$$

$\therefore y^2+2y+1\leqslant0$,

即 $(y+1)^2\leqslant0$,而 $(y+1)^2\geqslant0$,$\therefore y=-1$.

将 $y=-1$ 代入原方程，得 $5x^2-10x+5=0$，

解这个方程，得 $x=1$，

所以，原方程的实数解为 $x=1, y=-1$.

解法 2　把 x 视为常数，将原方程化为关于 y 的一元二次方程，再用判别式来求得 $x=1$，进而求出 $y=-1$.（具体解法略）

解法 3　由解法 1，得 $5x^2+(8y-2)x+(5y^2+2y+2)=0$.

$\therefore x=\dfrac{-(8y-2)\pm\sqrt{-36(y+1)^2}}{10}$，

因为 x 是实数，故 $(y+1)^2\leqslant 0$，进而得 $y=-1$，$\therefore x=1$，

所以，原方程的实数解为 $x=1, y=-1$.

[巧思⇨巧解]

由于本题是一个方程含有两个未知数求实数解问题，故联想到先将原方程化为几个非负数和的形式，再利用非负数性质求解.

用配方法，原方程可化为

$$4(x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=0,$$

$\therefore \begin{cases} x-1=0, \\ y+1=0, \end{cases}$ 即 $x=1, y=-1$.

所以，原方程的解是 $x=1, y=-1$.

[变换⇨引申]

变换 1　y 取什么实数时，方程 $5x^2+5y^2+8xy-2x+2y+2=0$ 的解是实数？

此命题等价于求方程的实数解，故解答可参考例 2 的解法.

变换 2　m 为有理数，问 k 为何值时，方程 $x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k=0$ 的根为有理数.

$(4-4m)^2-4(3m^2-2m+4k)$

$=0$.

解：将原方程整理为

$$x^2+4(1-m)x+(3m^2-2m+4k)=0.$$

则 $\Delta=[4(1-m)]^2-4\times1\times(3m^2-2m+4k)=$

$x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$4(m^2-6m-4k+4)$，

因为要使原方程的根为有理数，则只需 Δ 为有理数的平方，

即 $(m^2-6m-4k+4)$ 为 m 的一次完全平方式.

令 $(m+s)^2=m^2-6m-4k+4$，

$\therefore m^2+2sm+s^2=m^2-6m-4k+4$.

据多项式相等定义，得

$\begin{cases} 2s=-6, \\ s^2=-4k+4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} s=-3, \\ k=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

所以，当 $k=-\dfrac{5}{4}$ 时，方程的根为有理数.

点评 根据题目特征，寻求与原命题等价的命题，不仅可使要求解的问题得以简化，而且使求解的方法具有创意性.

例 3 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2-(2k-1)x+k=0$，

(1)有实数根，求 k 的取值范围；

(2)无实数根，求 k 的取值范围.

[**通法⇨通解**]

解：$\Delta=[-(2k-1)]^2-4\cdot k\cdot k=$

$4k^2-4k+1-4k^2=-4k+1$.

(1)∵原一元二次方程有实数根，

$\therefore\begin{cases}k\neq0,\\\Delta\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k\neq0,\\-4k+1\geqslant0,\end{cases}$

解得 $k\leqslant\frac{1}{4}$，且 $k\neq0$.

(2)∵原一元二次方程无实数根，

$\therefore k\neq0$，且 $\Delta<0$，

即 $\begin{cases}k\neq0,\\-4k+1<0,\end{cases}$ 解得 $k>\frac{1}{4}$.

[**变换⇨引申**]

1. 对命题题设的变换

变换 1 已知关于 x 的方程 $kx^2-(2k-1)x+k=0$ 有实数根，求 k 的取值范围.

解：若 $k=0$，则原方程是一元一次方程，故必有实数根.

而若 $k\neq0$，则原方程是一元二次方程.

∵方程有实数根，

$\therefore\begin{cases}k\neq0,\\\Delta\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k\neq0,\\-4k+1\geqslant0.\end{cases}$

解得 $k\leqslant\frac{1}{4}$ 且 $k\neq0$.

综上所述，k 的取值为 $k\leqslant\frac{1}{4}$.

变换 2 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2-(2k-1)x+k=0$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

$\begin{cases}k\neq0\\\Delta>0\end{cases}$

解：根据题意，有

$\begin{cases}k\neq0,\\\Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k\neq0,\\-4k+1>0,\end{cases}$

解得 $k<\frac{1}{4}$，且 $k\neq0$.

2. 对命题题设和结论的变换

变换 1　已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2-(2k-1)x+k=0$，当 k 取何值时 (1)方程有两个实数根；(2)没有实数根.

$\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta\geqslant 0\end{cases}$　$\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta<0\end{cases}$

解：(1)若方程有两个实数根，则

$$\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta\geqslant 0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}k\neq 0,\\ -4k+1\geqslant 0,\end{cases}$$

解得 $k\leqslant\frac{1}{4}$，且 $k\neq 0$.

所以，当 $k\leqslant\frac{1}{4}$，且 $k\neq 0$ 时，方程有两个实数根.

(2)若方程没有实数根，则

$$\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta<0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}k\neq 0,\\ -4k+1<0,\end{cases}\text{解得 }k>\frac{1}{4}.$$

所以，当 $k>\frac{1}{4}$ 时，方程没有实数根.

变换 2　若方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实数根，求 a,b 的值.

解：根据题意，得

$\Delta\geqslant 0$

$$\Delta=4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant 0.$$

化简整理，得 $2a^2+4ab+4b^2-2a+1\leqslant 0$，

配方，得 $(a+2b)^2+(a-1)^2\leqslant 0$，

从而得 $\begin{cases}a+2b=0,\\ a-1=0,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=-\frac{1}{2}$.

点评　根的判别式多用于判断一元二次方程实根的情况，有无实根，字母的取值范围等.

$\begin{matrix}1 & -3\\ 2 & -3\end{matrix}$

例 4　已知方程 $x^2+kx-2k^2+9k-9=0$ (k 是常数)，

(1)求证：无论 k 取任何实数值，方程总有两个实数根.

(2)若方程的两个实数根都小于 1，求 k 的整数值，并求方程的根.

[**通法⇨通解**]

(1)证明：∵ $\Delta=k^2-4(-2k^2+9k-9)=$

$k^2+8k^2-36k+36=$

$9(k^2-4k+4)=$

$9(k-2)^2.$

∵无论 k 是什么实数，均有 $(k-2)^2\geqslant 0$，∴ $\Delta\geqslant 0$，

即，无论 k 取任何实数，方程 $x^2+kx-2k^2+9k-9=0$ 总有两个实数根.

(2)解法 1　设 x_1,x_2 是方程 $x^2+kx-2k^2+9k-9=0$ 的两个实数根，则有

$\begin{cases}(x_1-1)(x_1-1)>0\\ x_1+x_2<2\end{cases}$　$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$　$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-k, \\ x_1\cdot x_2=-2k^2+9k-9, \\ x_1-1<0, \\ x_2-1<0, \end{cases}$$

$\therefore (x_1-1)(x_2-1)>0$，即 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0$，

$\therefore (-2k^2+9k-9)+k+1>0$，

化简整理，得 $k^2-5k+4<0$，$\therefore (k-4)(k-1)<0$，

于是有

$$\begin{cases} k-4>0, \\ k-1<0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} k-4<0, \\ k-1>0. \end{cases}$$

(i)若 $\begin{cases} k-4>0, \\ k-1<0, \end{cases}$ 此不等式组无解，

(ii) $\begin{cases} k-4<0, \\ k-1>0, \end{cases}$ 解得 $1<k<4$，

$\therefore$ 整数 $k=2$，或 $k=3$.

当 $k=2$ 时，原方程为 $x^2+2x+1=0$，

解这个方程，得 $x_1=x_2=-1$；

当 $k=3$ 时，原方程为 $x^2+3x=0$，

解这个方程，得 $x_3=0$，$x_4=-3$.

解法 2　由求根公式解得 $x=\dfrac{-k\pm 3(k-2)}{2}$，

$\therefore x_1=-2k+3$，$x_2=k-3$.

根据题意，有

$$\begin{cases} -2k+3<1, \\ k-3<1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k>1, \\ k<4, \end{cases}$$

$\therefore 1<k<4$，整数 $k=2$，或 $k=3$.

以下与解法 1 相同.

[巧思⇨巧解]

若 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，反之亦然. 故联想到可将本题方程左边分解因式，得

$$[x-(-2k+3)][x-(k-3)]=0.$$

$\therefore x_1=-2k+3$，$x_2=k-3$，

据题意，$x_1<1$，$x_2<1$，

$\therefore \begin{cases} -2k+3<1, \\ k-3<1, \end{cases}$ 解得 $1<k<4$，

$\therefore$ 整数 $k=2$，或 $k=3$.

以下与解法 1 相同.

[**变换◇引申**]

变换　已知 $x^2-kx-2k^2+9k-9=0$（k 是常数），问是否存在整数 k，使得方程的两个实数根均小于 1.

解：$\because \Delta=(-k)^2-4\times1\times(-2k^2+9k-9)=$

$k^2+8k^2-36k+36=$

$9(k-2)^2$.

其中，$(k-2)^2\geqslant0$，$\therefore \Delta\geqslant0$，

即，无论 k 取任何实数，方程均有两个实数根.

设 x_1，x_2 是方程的两个实数根，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=k,\\ x_1x_2=-2k^2+9k-9,\\ x_1-1<0,\\ x_2-1<0,\end{cases}$$

$\therefore (x_1-1)(x_2-1)>0$，

即 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0$，$\therefore (-2k^2+9k-9)-k+1>0$.

化简整理，得 $k^2-4k+4<0$，

$\therefore (k-2)^2<0$.　　（*）

此不等式无解．即不存在任何实数满足（*），所以不存在整数 k，使得方程的两个实数根均小于 1.

点评　解此类问题时，要注意分清题目的条件，“有实数根”、“有两个实数根”、“有两个不相等的实数根”等条件；要注意根的判别式的运用；若平方项系数是字母，要注意适当的讨论.

Δ

例 5　若关于 x 的方程 $x^2-2mx+m^2-\dfrac{3}{2}m+2=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，且 $x_1{}^2:x_2{}^2=1:9$.

$x_1^2-2mx_1+k=0$　　$x_1^2-x_2^2=2m(x_1-x_2)$

求证：x_1，x_2 都是正整数.

$x_2^2-2mx_2+k=0$　　$x_1+x_2=2m$

[**通法◇通解**]

证明：$\because x_1{}^2:x_2{}^2=1:9$，$\therefore \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{3}$，　$\dfrac{x_1}{x_2}=-\dfrac{1}{3}$.

据题意，得

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\Delta=6m-8>0, & m>\frac{4}{3} & ①\\ x_1+x_2=2m, & & ②\\ x_1x_2=m^2-\dfrac{3}{2}m+2, >0 & & ③\\ \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{3}; & & ④\end{cases}$$