1956年及1978年全国部分省市

数学竞赛题解

SHUXUEJINGSAITIJIE

数学竞赛试题解答

（1956年、1978年）

目　录

1956年北京、天津数学竞赛

试题及解答

第　一　场

（1）证明：对任何正整数 n

$$\left[n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1\right]$$

都是整数，并且用 3 除时余 2.

证明 1. $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)-1$$

$$=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-3+2.$$

对任何整数 n 说来，$\frac{n(n+1)}{2}$是整数，所以原式为整数.

在相邻的三个整数 $2n$，$2n+1$，$2n+2$ 中至少有一个是 3 的倍数，因为 3 与 8 互质，8 除得尽分子，分子提出 3 后还能被 8 除尽．所以$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-3$是 3 的倍数，原式用 3 除时余 2．

证明 2．用 $f(n)$ 代表原式，现在用数学归纳法证明我们的问题．在 $n=1$ 时，

$$f(1)=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1=2.$$

用3除时得余数2．

假定在 $n=k$ 时，用3除 $f(k)$ 得余数2．就是说

$$f(k)=3m+2\ (m\text{是整数}).$$

我们看

$$f(k+1)-f(k)=(k+1)^3+\frac{3}{2}(k+1)^2+\frac{1}{2}(k+1)-1-\left[k^3+\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k-1\right]$$

$$=3k^2+6k+3$$

是3的倍数．于是在 $n=k+1$ 时，

$$f(k+1)=f(k)+3(k^2+2k+1)$$

$$=3(m+k^2+2k+1)+2,$$

用3除余2．因此 $f(n)$ 对任意正整数 n 都是用3除余2的整数．

（2）设方程

$$x^2-px+q=0$$

的两根为 r 和 S，它们都不等于0．求以 $r^2+\frac{1}{S^2}$ 和 $S^2+\frac{1}{r^2}$ 为根的方程（不必解出原方程）．

解：由根和系数的关系得

$$r+S=p,\ rS=q.$$

现在 $\left\{x-\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)\right\}\left\{x-\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)\right\}$

$$=x^2-\left(r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{S^2}\right)x+\left(r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}\right).$$

$$r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=r^2+s^2+\frac{r^2+s^2}{r^2s^2}=[(r+s)^2-2rs]\left(1+\frac{1}{r^2s^2}\right)=(p^2-2q)\left(1+\frac{1}{q^2}\right),$$

$$r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}=q^2+2+\frac{1}{q^2}=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

所求方程为

$$x^2-(p^2-2q)\left(1+\frac{1}{q^2}\right)x+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=0.$$

（3）试证恒等式

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

证明. 应用三角和差公式

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

易得

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$$

$$2\cos x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}$$

$$2\cos 2x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\cos nx\sin\frac{x}{2}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

将以上各式相加，

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right)$$

$$=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

把$2\sin\frac{x}{2}$移至右端相除，即得所求.

（4）设C_1，C_2是给定的两个定圆，又C_1，C_2不相交，并且每一个在另外一个的外部．由一点P作C_1，C_2之切线PT_1，PT_2．设 $PT_1=PT_2$，求P点之轨迹.

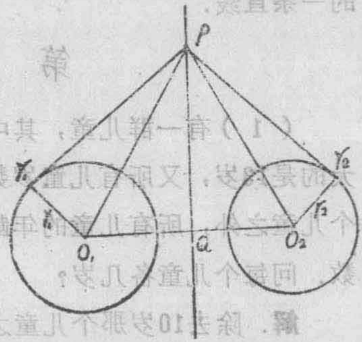
解．如图设$r_1\geqslant r_2$，$PT_1=PT_2$，则有

$$PO_1^2-PO_2^2=(PT_1^2+r_1^2)-(PT_2^2+r_2^2)$$

$$=r_1^2-r_2^2).$$

过点P引垂线

$$PQ\perp O_1O_2，则$$



$$O_1Q^2-O_2Q^2=(PO_1^2-PQ^2)-(PO_2^2-PQ^2)$$

$$=PO_1^2-PO_2^2$$

$$=r_1^2-r_2^2.$$

$$\because O_1Q+O_2Q=O_1O_2,$$

$$\therefore O_1Q-O_2Q=\frac{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}{O_1O_2}.$$

O_1O_2为定长，$\frac{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}{O_1O_2}$是三条已知线段的第四比例项．由此容易解出

$$O_1Q=\frac{1}{2}\left(O_1O_2+\frac{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}{O_1O_2}\right)$$

Q点的位置唯一决定．换言之，P点落在过Q点O_1O_2的垂线上．

反之，如果P点在这条垂线上．按照上面相反的方向可得 $PT_1^2=PT_2^2$，$PT_1=PT_2$．

点P满足问题的要求．

P点的轨迹是过如上方式求得的Q点并且垂直于O_1O_2

的一条直线.

第 二 场

(1)有一群儿童，其中一个是10岁，如果他们之中最大的是13岁，又所有儿童岁数的总和是50岁，且除去10岁那个儿童之外，所有儿童的年龄依照大小顺序组成一个等差级数. 问每个儿童各几岁？

解. 除去10岁那个儿童之外，设有 n 个儿童，最小的一个是 a 岁. n 个儿童岁数之和是 $50-10=40$ 岁. 这些岁数组成等差级数，所以

$$\frac{13+a}{2}n=40,\quad n(13+a)=80.$$

$13+a$ 除得尽80. 最小儿童的岁数 a 在 0 和13之间，$13\leqslant 13+a\leqslant 26$. 80在13和26之间只有16同20两个因数.

那么 $a=3$ 或 7.

设 $a=3$，则儿童数 $n=80\div(13+3)=5$.

等差级数的公差

$$d=\frac{13-a}{n-1}=\frac{13-3}{4}=2\frac{1}{2}$$

我们知道，岁数总是整数，公差不能是分数. 所以在 $a=3$ 时问题无解.

设 $a=7$. 儿童数 $n=80\div(13+7)=4$. 公差 $d==(13-7)\div(4-1)=6\div 3=2$. 四个儿童分别是 7，9，11，13岁.

答：共有五个儿童，他们是7、9、10、11、13岁.

注：这个问题有多种不同的解法，上面写出的是较简单的一种.

（2） **证明**

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1,$$

这里的两个三次根都是取实值.

证明：设

$$x=\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}},$$

$$x^3=1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}x+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$=2+3\sqrt[3]{1-\frac{28}{27}}x$$

$$=2+3\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}x$$

$$=2-x.$$

式中的$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$是两个实三次根之积，必定取实根$-\frac{1}{3}$. 现在x是实数，三次方程

$$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0$$

有一个实根1. 故得$x=1$.

（3）在平面上任取三点，其坐标均为整数（正整数、负整数或零）. 证明此三点不能组成正三角形.

证明 1．如果有三个坐标是整数的点（简称整点）组成正三角形．那么可以经过平移将一个顶点移至原点，其余二顶点仍是整点．我们来证明如果正 ABC的两个顶点A（O,O），B（a，b）是整点．那么第三个顶点C不能是整点．这样一来，三个整点不能组成正三角形．

A，B的中点是D $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$．CD是正三角形的高，等于

$\frac{\sqrt{3}}{2}AB$．$\triangle DCE \cong \triangle DC'E' \cong \triangle BAF$

$DE = -DE'$

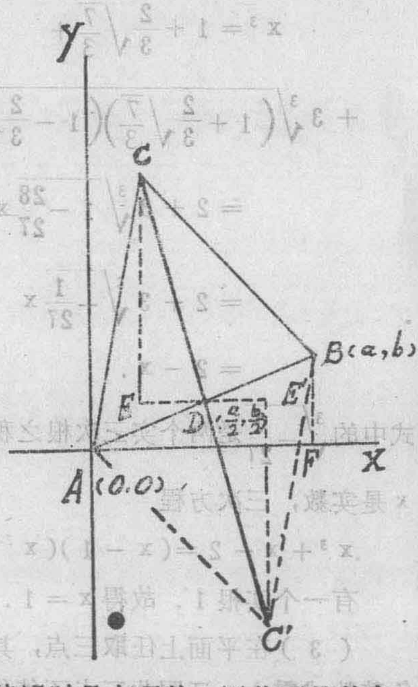
$= -CD\frac{BF}{AB}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}b$．

$EC = -EC'$

$= CD\frac{AF}{AB}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$．



C（或C′）的坐标是

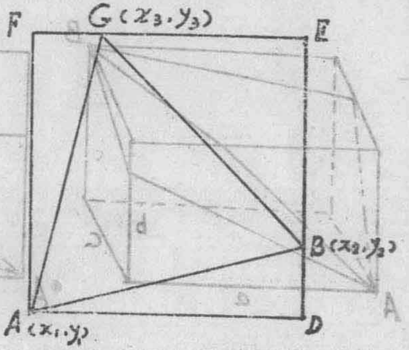
$\left(\frac{a}{2} \mp \frac{\sqrt{3}\,b}{2}, \frac{b}{2} \pm\right.$

$\left.\pm \frac{\sqrt{3}\,a}{2}\right)$ 整数a，b

不同时为0，两个坐标不能同时是有理数，因此不是整点．

证明 2．首先证明顶点在整点的任意三角形的面积是有理数（整数之半）．如图，长方形ADEF的面积是整数，直角△BAD，△BCE，△ACF的底同高都是整数（不取斜边作底），面积是整数之半，△ABC的面积是长方形的面积减去三个三角形面积，因而是有理数．

其次表明如果正△ABC有两个顶点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$是整点，它的面积等于无理数．正三角形之高是$\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，面积



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AB\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2.$$

$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$是一个整数，所以面积是无理数．这样一来，正三角形的顶点不能全是整点．

（4）证明在空间中不可能有这样的多面体存在，它有奇数个面，而它的每个面又都有奇数条边．

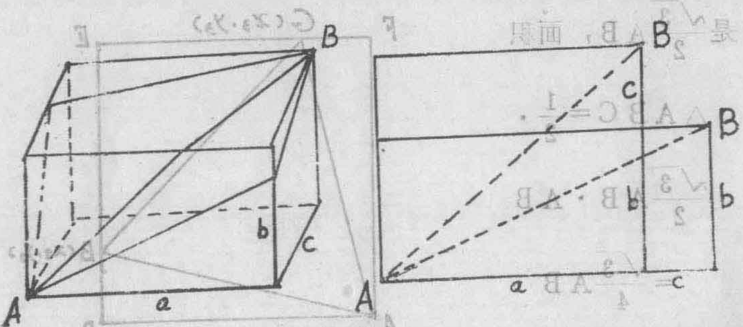
证明 设多面体有n个面，n为奇数．每个面都有奇数条边：S_1，S_2，……，S_n．多面体的每条棱是相邻两个面的公共边，总棱数

$$S=\frac{S_1+S+\cdots\cdots+S_n}{2}.$$

奇数个奇数相加还是奇数. 棱数S不是整数，这是不正确的. 所以不可能有这样的多面体存在.

（5）已给一长方体，三边不等，现在要由一顶点沿表面到对角一顶点，问那一条路线为最短路径？

解. 设三边之长 $a>b>c$. 由一顶点A沿相邻的表面到对角顶点B有六种不同的取法，其中三对是对称的. 将



相邻的表面摊平，两点之间以直线为最短，共有三条"直线"的走法，它们的长度分别是$\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，$\sqrt{b^2+(a+c)^2}$，$\sqrt{c^2+(a+b)^2}$. 因为

$$a^2+b^2+c^2+2bc<a^2+b^2+c^2+2ac<a^2+b^2+c^2+2ab.$$

$$\therefore\ \sqrt{a^2+(b+c)^2}<\sqrt{b^2+(a+c)^2}<\sqrt{c^2+(a+b)^2}$$

最短的路径经过边a，b和边a，c的表面，其长为

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2}.$$

（6）解方程组：

$$\begin{cases} x^2=6+(y-z)^2, \\ y^2=2+(z-x)^2, \\ z^2=3+(x-y)^2. \end{cases}$$

解．移项分解因式

$$(x+y-z)(x-y+z)=6, \qquad (1)$$

$$(y+z-x)(y-z+x)=2, \qquad (2)$$

$$(z+x-y)(z-x+y)=3. \qquad (3)$$

（1）×（2）×（3）：

$$(x+y-z)^2(x-y+z)^2(y-x+z)^2=36 \qquad (4)$$

$$(x+y-z)(x-y+z)(y-x+z)=\pm 6. \qquad (5)$$

（5）÷（1）： $y-x+z=\pm 1,$ （6）

（5）÷（2）： $x-y+z=\pm 3,$ （7）

（5）÷（3）： $x+y-z=\pm 2,$ （8）

（6），（7），（8）三式中同时取正号或同时取负号

（7）+（8）： $2x=\pm 5,$

（6）+（8）： $2y=\pm 3,$

（6）+（7）： $2z=\pm 4.$

$$\begin{cases} x=5/2, \\ y=3/2, \\ z=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-5/2, \\ y=-3/2, \\ z=-2. \end{cases}$$

代入原式中，皆适合．原方程有如上的两组解．

（7）求

$$x^2-2x\sin\frac{x\pi}{2}+1=0$$

的所有实根．

解1．$x^2-2x\sin\frac{x\pi}{2}+\sin^2\frac{x\pi}{2}+\cos^2\frac{x\pi}{2}$

$$=0$$

$$\left(x-\sin\frac{x\pi}{2}\right)^2+\cos^2\frac{x\pi}{2}=0$$

$\cos\frac{x\pi}{2}=0$ 同时 $x-\sin\frac{x\pi}{2}=0$．

解第一式得 $x=\pm1，\pm3，\pm5，\cdots\cdots$．其中只有 $x=\pm1$ 适合第二式．所以原方程只有两个实根 $x=\pm1$．

解2．x 是满足方程的实数解，则有

$$\left(2\sin\frac{x\pi}{2}\right)^2-4\geqslant0 \quad \left|\sin\frac{x\pi}{2}\right|\geqslant1$$

$$x=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\cdots.$$

当 $|x|>1$ 时，$x^2+1>2|x|$，

$$x^2-2x\sin\frac{x\pi}{2}+1\neq0.$$

$x=\pm1$ 适合原式．我们的方程仅有二实数根 $x=\pm1$．

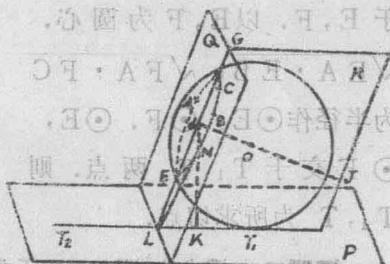
（8）在空间中，任给一平面及在此平面之一侧的任意三点．设有一球过此三点且切于此平面，求此切点之位置．

已知：空间一平面P及在此平面同侧的不共线的任意三点A，B，C．

求作：平面P上一点T使得过A，B，C，T四点的球与P相切.

解析：A，B，C三点决定一个平面Q. 在Q上设⊙O′是过A，B，C三点的圆. 如果平面Q同平面P平行，则Q上过O′的垂线与平面P的交点T是所求球的切点. 假定Q面和P面不平行. 则球心O在过O′点平面Q的垂线上，切点T在平面P上这条垂线的射影上.（下面的作法均假定Q和P不平行）.

作法1：过O′作垂线O′J⊥Q，O′K⊥P. O′J，O′K决定一个平面R. 设L是平面P，Q，R的交点，由解析知道切点T在平面P，R的交线LK上. 在平面Q上作切线LM同⊙O′切于M. 在平面P的直线LK上朝两个方向截取$LT_1=LT_2=$LM. T_1，T_2是所求的切点.



证明1：LM是⊙O′的切线，因而是球O的切线. 否则LM同球O有两个交点M，M′. M′在LM上，即在Q上，在⊙O′上；LM同⊙O′有两个交点，不再是切线. 我们知道切点T在直线LK上，过L点的两条切线LT，LM应当相等，现在$LT_1=LT_2=L$. 故知T_1，T_2为所求切点.

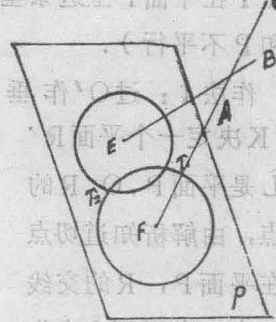
作法2：设LG是平面Q，R的交线，LG与⊙O′交于E，F两点. 作线段LE，LF的比例中项

$$\sqrt{LE \cdot LF} = a$$

在直线LK上取$LT_1 = LT_2 = a$，则T_1，T_2为所求.

证明2：平面R与球O的交线是一个大圆，切线LT的长度也等于L点和大圆两个交点的距离LE，LF的比例中项.

作法3：直线AB，AC，BC中至少有两条同平面P不平行，否则A，B，C三点将在一条线上. 设AB，AC不平行于平面P且与平面P分别交于E，F. 以E，F为圆心. $\sqrt{EA \cdot EB}$，$\sqrt{FA \cdot FC}$为半径作⊙E，⊙F. ⊙E，⊙F交于T_1，T_2两点. 则T_1，T_2为所求切点.



证明3：我们证明T_1是所求的球的切点，空间四点A，B，C，T_1决定一个球O. 球O与直线EB，ET_1所在的平面交成⊙ABT_1. 因为

$$ET_1 = \sqrt{EA \cdot EB}$$

ET_1是⊙ABT_1的切线，也是球O的切线. 同样FT_1是球O的切线. 球O在平面P上有两条切线ET_1，FT_1，故切平面P于T_1点

同理可证T_2是所求的另一球的切点.

讨论：在平面Q平行于P时，切点T只有一解. 如果Q不平行于P，则切点T有二解.