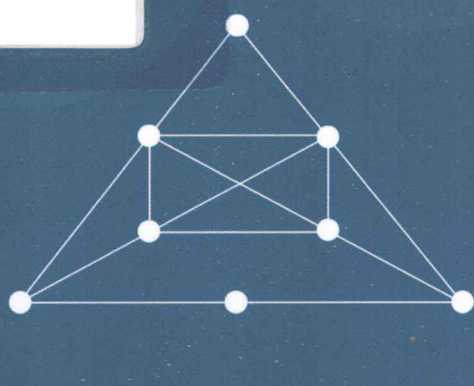
Theory of Domination and Coloring in Graphs

图的控制与染色理论

◎ 徐保根 著



華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

图的控制与染色理论

徐保根 著

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

本书主要介绍图的控制理论与染色理论中的一些重要内容和最新研究成果。从一般点控制到特殊点控制，从一般边控制到特殊边控制，从一般染色到特殊染色，层次分明，结构安排合理。本书内容丰富、新颖，系统性强，方法具体且不乏创新之处，书中涉及的许多内容、问题和猜想在理论上均具有较强的完备性，在实际工作中也具有一定的应用性和趣味性。

本书可供离散数学、运筹学、图论、组合数学、计算机应用等专业的研究生和教师使用，尤其是对从事图的控制理论与染色理论方向研究的科技人员，本书具有较强的理论价值。

图书在版编目(CIP)数据

图的控制与染色理论/徐保根　著．一武汉：华中科技大学出版社，2013.10
ISBN 978-7-5609-9461-1

Ⅰ.①图…　Ⅱ.①徐…　Ⅲ.①图论　Ⅳ.①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 244822 号

图的控制与染色理论　　徐保根　著

策划编辑：王新华
责任编辑：王新华
封面设计：刘　卉
责任校对：马燕红
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：华中科技大学惠友文印中心
印　　刷：华中理工大学印刷厂
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：15.25
字　　数：350 千字
版　　次：2013 年 11 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：38.00 元

序

近二十多年来，随着计算机技术的飞速发展，信息化和数字化技术的不断进步，许多实际问题的数学模型使离散型结构上的数字化技术得到了人们更多的关注，图论作为离散数学的一个重要组成部分，自然得到了快速发展，而且其应用也越来越广泛。事实上，图论为任何一个包含一种二元关系的系统提供了一个数学模型。这也许使得图的标号理论（包括图的标号、控制和染色等）成为图论中发展最快的分支之一。

在数学的众多分支中，图论不像代数、拓扑等学科一样，具有一套完整的数学理论。1998 年美国图论学者 W. T. Haynes 等人出版了两部专著《Domination in Graphs》和《Fundamentals of Domination in Graphs》，较为系统地综述了控制方面的一些主要研究成果。值得注意的是，几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言，很少涉及图的边控制问题，使得控制理论从内容上不够完整。不过近十多年来，在计算机的帮助下，图的标号方法和技术都有了很大的改进和创新，图论中一些以数字化为特征的内容（如图的标号、控制和染色等）得到了更快的发展。这也使得其内容越来越丰富，它或许正在形成一套比较完整的理论。

为了丰富和完善图的控制理论的内容，我已于 2008 年出版了《图的控制理论》一书，主要是将图的点控制概念转向图的边控制问题，从而产生了许多新概念和新内容。近几年来，随着图的控制与染色中的一些新概念和结果不断产生，一些新的问题和猜想不断被提出，许多图论学者对图的标号产生了极大的兴趣。当然，图的标号本来也不是独立的，它渗透到图论中的众多分支，如图的因子分解、图的拼装等。可以预见，在不远的将来，图的标号（包括控制、染色）会更加受到人们的关注和重视，产生更加丰富的研究成果，使图的控制与染色成为图论中一个结构比较完整、内容丰富、方法新颖、趣味性强的重要分支，逐步丰富和完善图的控制与染色方面的内容，这正是出版本书的目的之所在。

本书共分为 8 章，主要包括图的控制和染色两方面。第 1、2 章介绍图的一般点控制和一些特殊的点控制，其中涉及多种控制参数，也包括控制集的划分等问题。第 3、4 章着重介绍图的符号控制与减控制，并在此基础上产生了多种变形。前 4 章均是介绍图的点控制。第 5、6 章是关于图的边控制问题，以图的符号边控制与减边控制为基础，拓展到多种特殊的边控制。第 7 章介绍图的正常着色及 Ramsey 数，即传统意义下的点、边、全染色，并介绍了三种类型的 Ramsey 数。第 8 章选取几类特殊着色进行了介绍。

本书在内容的编排上，尽可能由一般到特殊、由易到难。书中未证明的结论均列出了对应的参考文献，这样既可满足读者的不同需求，又不影响可读性。书中提出或列出了不少未解决的问题和猜想，也有不少趣味性的问题，其意在抛砖引玉，并期望能吸引读者的目光，这是笔者的最大愿望。

对于图论专业（尤其是控制论或染色方向）的研究生，或者从事图的控制与染色的科研人员来说，本书或许是一本好的参考资料，尤其是在目前国内还没有一部关于图的控制或染色的专著情况下，本书具有较好的参考价值。

本书是在多项基金项目的共同资助下出版的，包括国家自然科学基金项目（11061014、11361024、11261018、11261019）、江西省自然科学基金（20114B AB20 1010）、江西省高校科技落地计划项目（KJLD12067）和江西省教育厅科研课题（GJJ12295）。在写作过程中，上海大学单而芳教授提供了宝贵的资料，本书的编写还得到了李春华、范自柱、王广富等多位老师的大力帮助，也得到了丁宗鹏、操叶龙、康洪波、赵利芬等多位硕士研究生的协助。此外，徐彤同志认真、仔细地校对了全稿，在此一并深表谢意。

由于作者水平有限，书中一定有不少不足之处，敬请读者批评指正。

徐保根
2013 年 8 月 5 日
于华东交通大学

目　录

第 1 章　图的一般点控制

图论学者大多数在他们的书、论文中习惯于使用自己的一套符号和术语。在本书中，除特别声明外，所指的图均为无向简单图，不含重边和自环。文中未说明的符号和术语同于参考书[1,2]，未说明的控制参数相关术语同于参考书[3,4]。从本章开始将用 6 章介绍图的控制理论的内容，本章主要介绍图的一般点控制的有关概念及相关结果，并介绍一些相关的问题和猜想。

1.1　图的点控制概念

图论的发展可追溯到 1736 年 Euler 对哥尼斯堡七桥问题的研究，而图的控制概念的产生也可追溯到 1850 年，当时人们在做棋盘游戏时提出一个这样的问题：一个国际象棋的棋盘上至少要放置多少个皇后，才能攻击（控制）到棋盘上的所有方格？虽然这可作为图控制概念的最初雏形，但真正提出图的控制概念是在 1958 年，C. Berge在其论著中首先使用“控制数”，O. Ore[5] 在其 1960 年的论文中正式定义了控制集和控制数的概念。

1.1.1　基本概念

首先，给出图的控制集和控制数的一般定义。

定义 1.1.1[3]　设 $G=(V,E)$ 为一个图，$D\subseteq V$，如果对于每个点 $v\in V\backslash D$，存在 $u\in D$ 使得 $uv\in E$，则称 D 为图 G 的一个控制集（dominating set），图 G 的控制数（domination number）定义为

$$\gamma(G)=\min\{|D|:D\text{ 为图 }G\text{ 的一个控制集}\}。$$

从上述定义中不难看出：任何图都有控制集，因为 $D=V(G)$ 本身就是图 G 的一个控制集。因此，任何图 G 的控制数均存在，且其控制数 $\gamma(G)\leqslant|V(G)|$；对任意简单图 G，$\gamma(G)=|V(G)|$ 当且仅当 G 为空图。

给定一个图 G，可能有许多个不同的控制集，在所有的控制集中容量最少的控制集称为 G 的一个最小控制集，一个最小控制集所包含的顶点数目即为图 G 的控制数。

设图 1.1.1 所示的图为 G，易见 $D=\{u,v\}$ 为一个最小控制集，故有 $\gamma(G)=2$。

对于一个图 $G=(V,E)$，通常地，若 $u\in V(G)$，用 $N_G(u)$ 或 $N(u)$ 表示 u 点在 G 中的邻域，$N_G[u]$ 或 $N[u]$ 表示 u 点在 G 中的闭邻域。

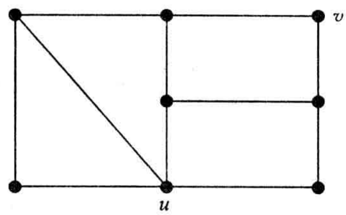


图 1.1.1　$D=\{u,v\}$ **为最小控制集**

为了方便，设 $G=(V,E)$ 为一个图，$S\subseteq V$，f 为 V 上的一个实值函数，记 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$。

定义 1.1.1 也可以表述如下。

定义 1.1.2　设 $G=(V,E)$ 为一个图，如果一个双值函数 $f:V\to\{0,1\}$ 对任意 $u\in V$，均有 $f(N[u])\geqslant 1$ 成立，则称 f 为图 G 的一个控制函数，图 G 的控制数定义为

$$\gamma(G)=\min\{f(V)\mid f\text{ 为图 }G\text{ 的一个控制函数}\}。$$

以上两个定义是等价的，事实上，对于一个图 $G=(V,E)$ 的任何一个控制集 D，存在图 G 的一个对应控制函数 f，其定义为

$$f(v)=\begin{cases}1, & \text{当 } v\in D \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } v\in V\backslash D \text{ 时。}\end{cases}$$

不难看出，f 为图 G 的一个控制函数，称之为控制集 D 对应的控制函数。当 D 为图 G 的最小控制集时，其对应控制函数 f 称为最小控制函数。

图 G 的最小控制函数 f 是在 G 的所有控制函数中，使得 $f(V(G))$ 取得最小值的函数。当然，对一般图来说，其最小控制集和最小控制函数都不是唯一的。当且仅当 f 为图 G 的最小控制函数时，其对应控制集 $D=\{v\in V(G)\mid f(v)=1\}$ 为图 G 的最小控制集。

1.1.2　控制数性质与常见图的控制数

在本书中，用 $\Delta=\Delta(G)$ 和 $\delta=\delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度。若 x 为实数，用 $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数，$\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数。

从图的控制数定义中，容易得出以下几条关于控制数的简单性质或结论。

(1) 对于任意两个点不交的图 G 和 H，均有

$$\gamma(G\cup H)=\gamma(G)+\gamma(H)。$$

(2) 对于图 G 的任意一个生成子图 H，均有 $\gamma(H)\geqslant\gamma(G)$。

(3) 对于任意 n 阶简单图 G，若 $\Delta=\Delta(G)$ 为图 G 的最大度，则

$$\frac{n}{\Delta+1}\leqslant\gamma(G)\leqslant n-\Delta。$$

特殊地,对简单图来说,仅当 $\Delta = 0$(G 为空图)时,$\gamma(G) = n$。

对于一些常见图,通常用 P_n、C_n、K_n、$K_{1,n-1}$ 分别表示 n 阶路、圈、完全图和星图,用 $K_{m,n}$ 表示完全二部图,用 $K(n_1, n_2, \cdots, n_t)$ 表示完全 t-部图,不难验证下面的结论。

(4) $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, $\gamma(K_n) = \gamma(K_{1,n-1}) = 1$。

(5) 当 $m \geqslant n \geqslant 2$ 时,$\gamma(K_{m,n}) = 2$;当 $\min\{n_1, n_2, \cdots, n_t\} \geqslant 2$ 时,$\gamma(K(n_1, n_2, \cdots, n_t)) = 2$。

一般来说,确定一个图的控制数是较为困难的,需要找到图的一个最小控制集,其关键在于证明所找到的控制集为最小控制集。

在常见的一些特殊图中,除上述所列出的几类图外,有一类常见图的控制数至今未解决,这类图就是 n-方体 Q_n。对于 n-方体 Q_n,可用乘积图来定义,也可作如下定义:

(1) $V(Q_n) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$;

(2) 若 $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V(Q_n)$, $v = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in V(Q_n)$,则 $uv \in E(Q_n)$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 1$。

问题 1.1.1　如何确定 n-方体 Q_n 的控制数?

1.1.3　两类特殊图与冠图

先给出两类特殊图,即 A 类图(图 1.1.2)和 B 类图(图 1.1.3),并将所有的 A 类图集简记为 A,所有的 B 类图集简记为 B。这两类图在后面图的极图刻划中将被用到。

读者容易验证:在最小度不小于 2 的所有连通图中,它们在同阶图中具有最大的控制数,即对任意 n 阶图 $G \in A \cup B$,均有 $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。

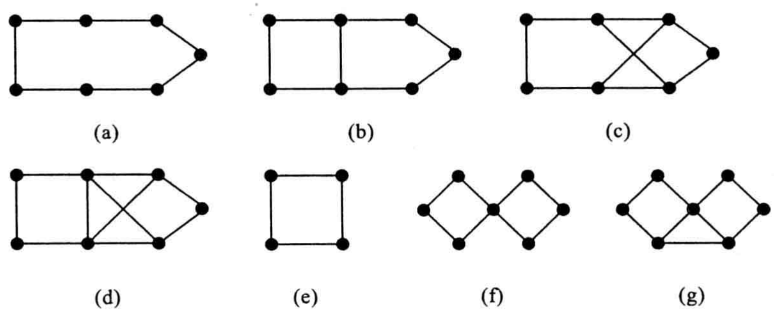
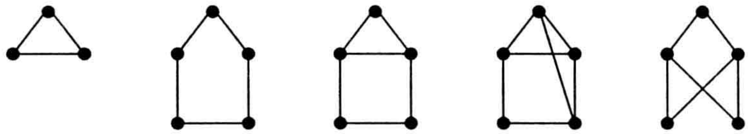


图 1.1.2　A 类图

下面介绍冠图的概念。



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

图 1.1.3　B 类图

设 G 为任意一个 n 阶简单图，若在图 G 的每一个点处均恰好增加一条悬挂边，所得的图称为 G 的 1-冠图，简称为 G 的冠图，并且记为 $f(G)$。显然，$f(G)$ 是一个 $2n$ 阶图，其边数为 $n+m$，m 为 G 的边数。

类似地，若在图 G 的每一个点处均恰好增加 k 条悬挂边，所得的图称为 G 的 k-冠图，并且记为 $f_k(G)$。显然，$f_k(G)$ 是一个 $(k+1)n$ 阶图，其边数为 $kn+m$，m 为 G 的边数。

若在图 G 的每一个点处均至少增加一条悬挂边(各顶点处所增加悬挂边的数目可以不同)，所得的图称为 G 的泛冠图。

图 1.1.4 所示的图为 $K_{2,3}$ 的冠图 $f(K_{2,3})$。

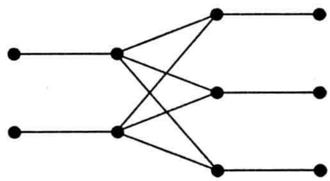


图 1.1.4　$K_{2,3}$ 的冠图 $f(K_{2,3})$

由泛冠图的定义可得出下面的结论。

定理 1.1.1　若 H 为一个 n 阶图，G 为 H 的一个泛冠图，则有 $\gamma(G)=n$。

1.2　图的控制数界限

1.2.1　一个简易上界与一个较难问题

O. Ore[5] 在其 1962 年的论文中就得出了如下一个关于控制数的上界，这或许是关于控制数的最初结论。

定理 1.2.1　对于任意 n 阶连通图 $G(n \geqslant 2)$，均有

$$\gamma(G) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor。$$

证明：由于 G 有一棵生成树 T，T 作为一个二部图，记 $V(T)=V_1 \cup V_2$，其中 $|V_1| \leqslant |V_2|$，显然 V_1 为 T 的一个控制集，当然也是 G 的一个控制集，并且 $|V_1| \leqslant$

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，故有 $\gamma(G) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。证毕。

不难看到，关于控制数的上述界限是容易得到的，但 O. Ore[5] 由此提出的如下问题是较为困难的。

问题 1.2.1[5]　如何刻划满足 $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 的所有 n 阶连通图 G？

1.2.2　极图的刻划

问题 1.2.1 直到 2000 年才得到完全解决。对此问题，当 n 为偶数时，B. Xu[6]（徐保根，Baogen Xu）给出了一个完整的刻划；当 n 为奇数时，B. Xu 等[7] 也给出了一个完整的刻划，但证明较为繁杂，这里不作证明。

定理 1.2.2[6]　设 G 为一个 $2n$ 阶连通图，则 $\gamma(G) = n$ 当且仅当 $G \cong C_4$ 或者 G 为一个连通图的冠图。

为了完全刻划满足 $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 的所有 n 阶连通图 G，下面定义六类图。

(1) $\varphi_1 = \{G | G = f(H)\}$，其中 $f(H)$ 为连通图 H 的冠图。

(2) $\varphi_2 = A \cup B$。

(3) $\varphi_3 = \{G |$ 存在图 H，使得 $G \in \phi(H)\}$，$\phi(H)$ 表示连通图集，其中每个图可由在 $f(H)$ 中添加一个新顶点 x 且使 x 与 H 中一个或更多个顶点邻接所得到。

(4) $\varphi_4 = \{G |$ 存在 $H \in \varphi_3$，使得 $G = \theta(H)\}$，这里设 x 为 H 中新增加的顶点，y 为拷贝的 C_4 中一点，对 $H \in \varphi_3$，记 $\theta(H)$ 为将图 H 与 C_4 通过边 xy 相连所得到的图。

(5) $\varphi_5 = \{G |$ 对某些 H，$G = P(H)\}$，设 u、v、w 为路 P_3 的点序列。对任意图 H，记 $P(H)$ 为连通图集，该连通图可由 $f(H)$ 通过将 u 和 w 邻接到图 H 中的一个或更多个顶点得到。

(6) $\varphi_6 = \{G |$ 存在 $X \in B$ 和 H，使得 $G \in R(H, X)\}$，这里对图 $X \in B$，设 $U \subset V(X)$ 为一点集，满足：X 中不多于 $\gamma(X)$ 个点控制 $V(X) - U$。例如，C_5 的顶点集 U 或为一个独立点，或为不相邻接的点对。设 $R(H, X)$ 为连通图集，该连通图可由 $f(H)$ 通过将 U 的每一个顶点邻接到图 H 的一个或更多个顶点得到。

定理 1.2.3[7]　n 阶连通图 G 满足 $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 当且仅当 G 在上述六类图之一中。

1.2.3　最小度 $\delta \geqslant 2$ 的连通图

对所有 n 阶简单图来说，什么图具有最大的控制数呢？当然是空图 $\overline{K_n}$（$\Delta = \delta =$

0)，因为 $\gamma(\overline{K_n})=n$。对于 $\delta\geqslant 1$ 的图或者连通图来说，$\gamma\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。定理 1.2.3 虽然刻划了满足 $\gamma(G)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 的所有连通图，但其中的绝大多数图均是满足 $\delta=1$ 的图，满足 $\delta\geqslant 2$ 的连通图是很少的，只有前面所说的 A 类图和 B 类图。

定理 1.2.4[8]　设 G 为一个 n 阶连通图，并且 $\delta(G)\geqslant 2$，如果 $\gamma(G)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，则

$$G\in A\cup B。$$

对于满足 $\delta\geqslant 2$ 的图，上述定理是一个很好的极图刻划。除 A 类图外，有更进一步的上界。

定理 1.2.5[8]　若 n 阶连通图 G 不是 A 类图，且 $\delta(G)\geqslant 2$，则

$$\gamma(G)\leqslant\frac{2n}{5}。$$

Reed 在 1996 年证明了：若 G 为 n 阶图且 $\delta(G)\geqslant 3$，则 $\gamma(G)\leqslant\frac{3}{8}n$。

1.2.4　图与其补图的控制数

对于一个图 G 与其补图 $\overline{G}$ 的控制数，有以下定理。

定理 1.2.6[7]　对于任何 n 阶图 G，均有 $\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leqslant n+1$，并且等式成立当且仅当 $G\cong K_n$ 或者 $G\cong\overline{K_n}$。

定理 1.2.7[7]　对于任何 n 阶图 G，若 G 和 $\overline{G}$ 均没有孤立顶点，则

$$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,$$

并且等式成立当且仅当 $G\cong K_3\times K_3$ 或者 $\{\gamma(G),\gamma(\overline{G})\}=\left\{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,2\right\}$。

1.2.5　控制数的其他相关结果

对于一般图的控制数，这里只列出其中的部分界限，读者可参考文献[4,9]。

(1) 设图 G 的度序列为 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$，则有

$$\gamma(G)\geqslant\min\{k\mid k+d_1+d_2+\cdots+d_k\geqslant n\}。$$

(2) 对任意 n 阶图 G，若 Δ 和 δ 分别为 G 的最大度和最小度，则有

$$\gamma(G)\leqslant\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\Delta(\delta-1)}{\delta}\right)。$$

(3) 对任意 n 阶图 G，若其最小度 $\delta=\delta(G)\geqslant 1$，则有

$$\gamma(G)\leqslant\frac{n+2-\delta}{2}。$$

(4) 对任意 n 阶图 G，若其最小度 $\delta=\delta(G)\geqslant 1$，则有

$$\gamma(G) \leqslant \frac{n(1+\ln(\delta+1))}{\delta+1}。$$

(5) 对任意 n 阶图 G，若其最小度 $\delta = \delta(G) \geqslant 1$，则有

$$\gamma(G) \leqslant \frac{n}{\delta+1}\sum_{j=1}^{\delta+1}\frac{1}{j}。$$

(6) 对任意 n 阶图 G，若 $m = |E(G)|$，则有

$$n-m \leqslant \gamma(G) \leqslant n+1-\sqrt{1+2m}。$$

(7) 对任意 n 阶连通图 G，$m = |E(G)|$，若 $\gamma = \gamma(G) \geqslant 2$，则有

$$m \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2}(n-\gamma)(n-\gamma+2) \right\rfloor。$$

图的控制数与图的直径、围长和最大(小)度之间也有一定的联系。这里列出几条结论，证明过程可参考文献[4,9,20]。

(8) 对任意 n 阶连通图 G，若 $d = \mathrm{diam}(G)$ 为图 G 的直径，则有

$$\gamma(G) \geqslant \left\lceil \frac{d+1}{3} \right\rceil。$$

(9) 设 $\overline{G}$ 为图 G 的补图，若 $\gamma(\overline{G}) \geqslant 3$，则 $\mathrm{diam}\,(G) \leqslant 2$，且当 $\delta(G) \geqslant 1$ 时，有 $\mathrm{diam}\,(G) = 2$。

(10) 设图 G 的围长 $g(G) \geqslant 5$，且最小度 $\delta(G) \geqslant 2$，则有

$$\gamma(G) \leqslant \left\lceil \frac{n-\left\lfloor \frac{g(G)}{3} \right\rfloor}{2} \right\rceil。$$

(11) 对任意图 G，若 $g(G) \geqslant 5$，则 $\gamma(G) \geqslant \delta(G)$。

(12) 对任意图 G，若 $g(G) \geqslant 6$，则 $\gamma(G) \geqslant 2(\delta(G)-1)$。

(13) 对任意图 G，若 $g(G) \geqslant 7$ 且 $\delta(G) \geqslant 2$，则有 $\gamma(G) \geqslant \Delta(G)$。

对于可平面图，有以下两条结论。

(14) 对任意可平面图 G，若 $\mathrm{diam}\,(G) = 2$，则有 $\gamma(G) \leqslant 3$。

(15) 对任意可平面图 G，若 $\mathrm{diam}\,(G) = 3$，则有 $\gamma(G) \leqslant 10$。

以上列出了关于图的控制数界限的已知结论，其证明过程绝大多数都能在文献[4,9,20]中查阅到引文。然而，文献中对这些界限的优劣并未进行评述，分析这些界限的可达性或许是一件更有意义的事情。换言之，一个界限是最好可能的还是可改进的，值得读者进一步思考。例如，在上述结论(15)中，所给出的上界是否可改进，这还是一个未知的问题。

问题 1.2.2　是否存在一个满足 $\mathrm{diam}\,(G) = 3$ 且 $\gamma(G) = 10$ 的可平面图 G？换言之，结论(15)的上界是否可改进？

1.3 控制相关概念及参数

前面介绍了图的控制概念及其参数，本节介绍几种常见的相关概念及参数。

1.3.1 基本概念

对于一个给定的图 $G=(V,E)$，一般来说，往往有多个不同的控制集，考察一个控制集中是否有多余的点是有意义的。

定义 1.3.1[4]　设 D 为图 G 的一个控制集，如果对于每一个 $v\in D$，$D-v$ 均不是 G 的控制集，则称 D 为图 G 的一个极小控制集，最大的极小控制集的容量称为图 G 上控制数(the upper domination number)，用 $\Gamma(G)$ 表示。即有

$\Gamma(G)=\max\{|D|:D$ 为图 G 的一个极小控制集$\}$。

$\gamma(G)=\min\{|D|:D$ 为图 G 的一个极小控制集$\}$。

由定义可见，$\Gamma(G)\geqslant\gamma(G)$ 对任何图 G 均成立。

值得注意的是：对于一个给定的图，一般来说，其极小控制集与最小控制集不同。最小控制集虽然不是唯一的，但其所有的最小控制集包含的点数是唯一确定的，即控制数。但极小控制集就大不同了，不同的极小控制集可能包含不同数目的点数。取遍图的所有极小控制集，容量最大者包含的点数为上控制数，容量最小者包含的点数为控制数。

当然，一个图的最小控制集必为极小控制集，但反之不然。一个图的上控制数与控制数之间并没有必然的联系。

例如，图 1.3.1 所示的图 G 的上控制数 $\Gamma(G)=4$ 但 $\gamma(G)=2$。读者容易在此图中找出一个容量为 4 的极小控制集。

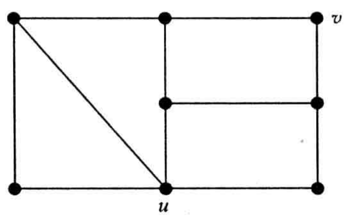


图 1.3.1　$\Gamma(G)=4$ 但 $\gamma(G)=2$

定义 1.3.2[4]　设 $G=(V,E)$ 为一个图，且 $S\subseteq V$，如果 S 中任何两点在 G 中都是不邻接的，则称 S 为 G 的一个独立集。在一个图的所有独立集中，容量最大的独立集称为最大独立集，最大独立集所包含的点数称为独立数(independent number)，用 $\beta(G)$（或者 $\beta_0(G)$）表示。

由定义不难看出，图 G 的最大独立集均为 G 的极小控制集，从而有下面的引理。

引理 1.3.1　对任何图 G，均有 $\gamma(G) \leqslant \beta(G) \leqslant \Gamma(G)$。

定义 1.3.3　设 S 为 G 的一个独立集，若 $\forall v \in V \backslash S, S \cup \{v\}$ 均不是 G 的独立集，则称 S 为 G 的一个极大独立集。

当然，最大的极大独立集的容量为 G 的独立数 $\beta(G)$。最小的极大独立集的容量称为 G 的下独立数或独立控制数，记为 $i(G)$。即

$\beta(G) = \max\{|S|: S$ 为图 G 的一个极大独立集$\}$，

$i(G) = \min\{|S|: S$ 为图 G 的一个极大独立集$\}$。

由定义可见，图 G 的每个极大独立集均为图 G 的控制集，从而有下面的引理。

引理 1.3.2　对任何图 G，均有 $\beta(G) \geqslant i(G) \geqslant \gamma(G)$。

同样值得注意的是：对于一个给定的图 G，一般来说，其极大独立集与最大独立集不同。最大独立集虽然不是唯一的，但其所有的最大独立集所包含的点数是唯一确定的，即图的独立数 $\beta(G)$。但极大独立集就不同了，不同的极大独立集可能包含不同数目的点数。取遍图的所有极大独立集，容量最大者包含的点数为独立数 $\beta(G)$，容量最小者包含的点数为下独立数 $i(G)$。

定义 1.3.4[4]　设 $G = (V, E)$ 为一个图，且 $S \subseteq V$，如果对每个 $s \in S$ 存在一点 $w \in V$，使得 $N[w] \cap S = \{s\}$，则称 S 为 G 的一个无赘集，容量最大的无赘集称为最大无赘集，最大无赘集包含的点数称为上无赘数（the upper irredundance number），记为 $IR(G)$。

定义 1.3.5　若 S 为 G 的一个无赘集，且 $\forall v \in V \backslash S, S \cup \{v\}$ 均不是 G 的无赘集，则称 S 为 G 的一个极大无赘集。

当然，最大的极大无赘集的容量为 G 的上无赘数，记为 $IR(G)$。

最小的极大无赘集的容量称为 G 的下无赘数（the lower irredundance number，记为 $ir(G)$。即有

$IR(G) = \max\{|S|: S$ 为图 G 的一个极大无赘集$\}$，

$ir(G) = \min\{|S|: S$ 为图 G 的一个极大无赘集$\}$。

由定义可见，一个图 G 的每个最大独立集均为 G 的一个无赘集，这表明 $IR(G) \geqslant \beta(G)$。同样不难看出，G 的每个最小控制集均为 G 的一个无赘集，从而有 $ir(G) \leqslant \gamma(G)$ 成立，故得到下面的引理。

引理 1.3.3　对任何图 G，均有 $IR(G) \geqslant \beta(G), ir(G) \leqslant \gamma(G)$。

例如，设 $m \geqslant n \geqslant 2, G = K_{m,n}$ 为完全二部图，不难验证：

$$ir(G) = \gamma(G) = 2, \quad IR(G) = \Gamma(G) = \beta(G) = m, \quad i(G) = n。$$

1.3.2　著名不等式

对于上述定义的六个与控制相关的参数，根据引理 1.3.1、引理 1.3.2 及引理 1.3.3，得到下面著名的不等式。

定理 1.3.1　对任意图 G，均有

$$ir(G) \leqslant \gamma(G) \leqslant i(G) \leqslant \beta(G) \leqslant \Gamma(G) \leqslant IR(G)。$$

例如，设 G 为图 1.3.2 所示的图，不难验证：$ir(G) = \gamma(G) = 3$ 并且 $i(G) = \beta(G) = \Gamma(G) = IR(G) = 4$。

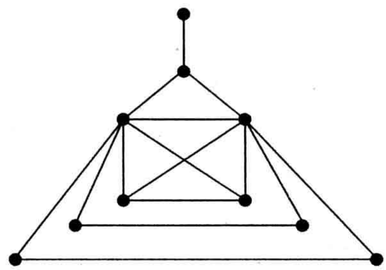


图 1.3.2　图 G

一个自然产生的问题是：对于任意给定的六个正整数 $m_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$，满足 $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_6$，是否一定存在一个图 G，能满足：$ir(G) = m_1, \gamma(G) = m_2, i(G) = m_3, \beta(G) = m_4, \Gamma(G) = m_5, IR(G) = m_6$？

如果是这样的话，则称单调递增的正整数序列 $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_6$ 为图 G 的 D-序列。

下面的定理表明：上述问题的答案是否定的，即并非每个单调递增的正整数序列均为一个图的 D-序列。

定理 1.3.2[10]　一个正整数序列 $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_6$ 为一个图的 D-序列当且仅当满足：

(1) 若 $m_1 = 1$，则 $m_3 = 1$；

(2) 若 $m_4 = 1$，则 $m_6 = 1$；

(3) $m_2 \leqslant 2m_1 - 1$。

1.3.3　六个参数的相关结果

首先列出一般图的六个参数之间的联系，这里不作证明，读者可参阅文献[4,9]。

(1) 对任何图 G，均有

$$\frac{\gamma(G)+1}{2} \leqslant ir(G) \leqslant \gamma(G) \leqslant 2ir(G) - 1。$$

(2) 对任何图 G，若 $v \in V(G)$ 且 $ir(G-v) \geqslant 2$，则有

$$ir(G) \leqslant 2ir(G-v) - 1。$$

(3) 对任何图 G，若 G 的最大度 $\Delta = \Delta(G) \geqslant 1$，则有 $ir(G) \geqslant \dfrac{n}{2\Delta - 1}$，并且此等式成立当且仅当 G 为 $n = 3k$ 阶路或圈。