双自旋狄拉克方程和麦克斯韦方程

张侠辅 著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

双自旋狄拉克方程和麦克斯韦方程

张侠辅 著

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

双自旋狄拉克方程和麦克斯韦方程/张侠辅著．—昆明：云南大学出版社，2013

ISBN 978－7－5482－1580－6

Ⅰ．①双… Ⅱ．①张… Ⅲ．①狄拉克方程—研究②麦克斯韦尔方程—研究 Ⅳ．①O175.24②O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 141443 号

双自旋狄拉克方程和麦克斯韦方程

张侠辅　著

责任编辑：王　磊
封面设计：刘文娟
出版发行：云南大学出版社
印　　装：昆明研汇印刷有限责任公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：9.5
字　　数：160 千
版　　次：2013 年 7 月第 1 版
印　　次：2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－5482－1580－6
定　　价：36.00 元

社　　址：昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内
电　　话：（0871）65031071　65033244
网　　址：http：//www.ynup.com.
E-mail：market@ynup.com

内容简介

在研究狄拉克方程和麦克斯韦方程时，用四阶自旋矩阵取代现行的二阶泡利自旋矩阵，就会发现在狄拉克方程中明显地含有一对自旋，在麦克斯韦方程中明显地含有自旋和龙格－愣次矢量，这本书将它们称为双自旋，这两个方程内的双自旋矩阵正是构成方程的主要部件。基于双自旋矩阵存在无限多表象，又可将其算符化，基于双自旋矩阵在三维空间的变换性质，还可将其矢量化。本书用这种双自旋算符将方程表示出来，进一步展现了方程内部结构的和谐统一，以及两个方程之间的内在联系。本书还介绍了由这种双自旋表示引入的新的对称性、新的求解方法以及洛伦兹变换和表象变换的新方式等。本书适合于熟悉电磁学和量子力学，并且对理论研究感兴趣的学生和教师阅读。对于有志推动物理学发展的读者，可以把本书当做一块指路牌。

前　　言

这本书原先打算用的书名是《狄拉克方程和麦克斯韦方程的双自旋表示》，为了缩短书名，便于记忆，才启用现在的名称。但确切地说，这本书只不过是提出了一种新的表示。既然是一种表示，就不是发明，而是发现，只要在数学上证明它存在，它就是存在着的。

这种新表示就像一个新的软件，是向下兼容的，它与原本的理论并不矛盾，而是由它导出，反过来又把它包容于其中，这种新的表示包括的范围更广更深，内容更加充实丰富；而且，原本的狄拉克方程只含有一个自旋，现在发现它存在着两个自旋，这是认识上的一个突破；原本的麦克斯韦方程并无自旋，现在发现它存在着自旋和龙格－愣次矢量，这也是认识上的一个突破。

有一本书，名为《科学臻美方法》，作者刘仲林。这里不妨从该书的引言中摘录一段：

时至今日，人们一谈到美学和美感，想到的就是文学、绘画、音乐、舞蹈，好像自然科学与美学是风马牛不相及的两个截然不同的领域。

事实是这样吗？我们还是听一听著名法国科学家彭加勒的观点吧：

科学家不是因为有用才研究自然的。他们研究自然是因为他们从中得到了快乐，而他们从中得到了快乐是因为它美。如果自然不美，它就不值得去探求，生命也不值得存在……我指的是根源于自然各部分的和谐秩序、纯理智能够把握的内在美。（**《科学与方法》**）

对于彭加勒的上述观点，曾为牛顿和贝多芬撰写过杰出传记的沙利文评论说：

我们要想为科学理论和科学方法的正确与否进行辩护，必须从美学价值方面着手。没有规律的事实是索然无味的，没有理论的规律充其量只具有实用的意义，所以我们可以发现，科学家的动机从一开始就显示出一种美学的冲动……没有艺术的科学是不完善的科学。（**《雅典娜神庙》**）

在写作方法上，本书采用教材式写法，尽量具体化，避免抽象化，力图

让读者感到通俗易懂；为便于阅读，在后文引用前文时，很多内容被反复写出来。本书是一本面向青年人的读物，只要学过量子力学和电磁学，阅读它都不会困难。对于从事物理学工作，特别是研究量子力学、理论物理、基本粒子的同仁，这本书更值得一读。

本书属于理论创新，书中错误在所难免，敬请读者帮助改正！

作　者

目　　录

第 1 章　双自旋矩阵

在四阶方阵中，存在着一类矩阵的集合，它包含无限多个子集，每个子集包括六个矩阵，这六个矩阵按三个一组分成两组，两组间的矩阵相互对易，每组内的三个矩阵的性质与二阶泡利自旋矩阵完全相同。我们把这样的六个矩阵叫做双自旋矩阵，并用它来构造狄拉克方程和麦克斯韦方程的新表示。本章主要介绍双自旋矩阵的数学知识，它是后两章内容的数学基础。

§1.1　量子力学常见的矩阵

1.1.1　厄米矩阵和幺正矩阵

在量子力学中，方程包含的矩阵一般是厄米矩阵，厄米矩阵的本征值是实数，只有实数值才对应于可观察的物理量。

一个转置矩阵的复数共轭矩阵如果等于它自身，这个矩阵就是一个厄米矩阵，表示为：

$$A = \widetilde{A}^*$$

常常把矩阵经过转置并取复数共轭的运算在矩阵右上角用符号“ + ”表示，于是厄米矩阵可写成：

$$A = A^+$$

如果 A 的矩阵元为 $a_{\mu\nu}$ ，那么厄米矩阵也可用下式定义：

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}^*$$

厄米矩阵是在复数域上定义的矩阵，它涵盖了相当广泛的一类矩阵，包括纯实数的实对称矩阵和纯虚数的反对称矩阵等。

在量子力学中，还经常碰到另一类矩阵，称为幺正矩阵，幺正变换不改变物理量的本征值，而幺正变换用的就是幺正矩阵。

一个转置矩阵的复数共轭如果等于它的逆矩阵，这个矩阵就是一个幺正

矩阵：

$$U^{-1} = \widetilde{U}^{*} = U^{+}$$

亦即：

$$U^{+} U = UU^{+} = 1$$

如果 U 的矩阵元为 $u_{\mu\nu}$，那么（四阶）幺正矩阵也可用下式定义：

$$\sum_{\nu=1}^{4} u_{\mu\nu} \cdot u_{\lambda\nu}^{*} = \delta_{\mu\lambda}$$

式中，当 $\mu = \lambda$ 时，$\delta_{\mu\lambda} = 1$，当 $\mu \neq \lambda$ 时，$\delta_{\mu\lambda} = 0$。幺正矩阵也是在复数域上定义的矩阵，如同厄米矩阵一样，它也涵盖了相当广泛的一类矩阵，包括实正交矩阵等。厄米矩阵和幺正矩阵在量子力学中是应用最为广泛的矩阵，也是本书用得最多的矩阵。

1.1.2 泡利自旋矩阵

在 1888 年，人们发现电子具有自旋，在量子力学中，自旋用三个 2×2 矩阵 σ_1、σ_2、σ_3 表示，这三个矩阵组成一个矩阵组，被称为泡利自旋矩阵组，它们是：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

这里的 $i = \sqrt{-1}$ 代表虚数单位。很明显，(1.1.1) 给出的每个矩阵的转置共轭仍旧是它自己：

$$\sigma_1^{+} = \sigma_1, \quad \sigma_2^{+} = \sigma_2, \quad \sigma_3^{+} = \sigma_3 \tag{1.1.2}$$

因此它们全都是厄米矩阵。此外，这些矩阵自乘都等于一个 2×2 单位矩阵：

$$\sigma_1 \cdot \sigma_1 = \sigma_2 \cdot \sigma_2 = \sigma_3 \cdot \sigma_3 = I \tag{1.1.3}$$

这里的 I 为单位矩阵。我们知道，一个矩阵与它的逆矩阵相乘，得到单位矩阵，所以上式等同于：

$$\sigma_1^{-1} = \sigma_1 = \sigma_1^{+}, \quad \sigma_2^{-1} = \sigma_2 = \sigma_2^{+}, \quad \sigma_3^{-1} = \sigma_3 = \sigma_3^{+}$$

也就是说，这三个矩阵全都是幺正矩阵，所以泡利矩阵既是厄米矩阵，又是幺正矩阵。

我们知道，一般情况下，两个矩阵相乘，其位置的先后次序是不能交换的，但是泡利矩阵两两相乘，其位置却是能够对换的，只不过对换后与对换前相差一个负号，这种性质被称为“反对易”：

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = -\sigma_2 \cdot \sigma_1, \quad \sigma_2 \cdot \sigma_3 = -\sigma_3 \cdot \sigma_2, \quad \sigma_3 \cdot \sigma_1 = -\sigma_1 \cdot \sigma_3 \tag{1.1.4}$$

所以我们说这三个矩阵是彼此反对易的。泡利矩阵的性质(1.1.3)和(1.1.4)可以合并写为：

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \cdot I \qquad (i;j = 1,2,3) \tag{1.1.5}$$

等式右端的 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，当 $i = j$ 时，$\delta_{ij} = 1$，当 $i \neq j$ 时，$\delta_{ij} = 0$，I 为 2×2 单位矩阵，通常省略不写，或者用“1”代替。

此外，泡利矩阵还具有性质：

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2 \cdot \sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3 \cdot \sigma_1 = i\sigma_2 \tag{1.1.6}$$

利用它们彼此反对易的性质，(1.1.6)式也可改写成：

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\sum_{k=1}^{3} \in_{ijk}\sigma_k \qquad (i;j;k = 1,2,3) \tag{1.1.7}$$

这里的 $\in_{ijk}$ 是 Live - Civita 符号，当任意三个下标的排列是 123 的偶置换，它的值为 1，若是 123 的奇置换，它的值为 -1。

$$\in_{123} = \in_{231} = \in_{312} = 1, \quad \in_{132} = \in_{213} = \in_{321} = -1$$

当任意两个下标取相同的值，它的值为 0。

$$\in_{ijk} = 0 \qquad (i = j \ or \ j = k \ or \ i = k)$$

在(1.1.7)式的右端，经对 k 求和后的三项中，有两项为零，只剩一项不为零，因此(1.1.7)式等同于如下三个等式：

$$\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 = 2i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 = 2i\sigma_2, \quad \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$$

如果把泡利矩阵 σ_1、σ_2、σ_3 看成是一个算符 $\hat{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ 在某种“内部空间”的三个分量，上述三个等式又可合写成一个“矢积”式：

$$\hat{\sigma} \times \hat{\sigma} = 2i\hat{\sigma}$$

我们知道，为了区分矢量和张量的不同分量以及不同的矩阵元素或矩阵，就在其右下角加上一个或几个整数或者代表某些取值的字母作为编号，它们被统称为下标变量。作为一种约定，以后凡是一个下标变量或多个相乘的下标变量中出现两个相同的下标，如果此下标是英文字母 i、j、k 等，就要对它的取值按此下标从 1 到 3 求和。例如公式(1.1.7)中 $\in_{ijk}\sigma_k$ 的下标 k 是重复出现的，那么 k 的取值就要遍及 1、2、3 各值，再对相应的三项求和，即

$$\in_{ijk}\sigma_k = \in_{ij1}\sigma_1 + \in_{ij2}\sigma_2 + \in_{ij3}\sigma_3$$

上式中的 k 又被称为哑指标，约定对哑指标求和，而省去求和符号 $\sum_{k=1}^{3}$ 不写。有了这个约定之后，公式(1.1.7)就被简写成：

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i \in_{ijk}\sigma_k$$

如果重复的下标是用希腊字母标记的，如字母 μ 、ν 、λ 等，按约定就要对该下标取遍 1 到 4 的各个值，再对得到的四项求和。例如：

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = a_{1\nu}a_{1\lambda} + a_{2\nu}a_{2\lambda} + a_{3\nu}a_{3\lambda} + a_{4\nu}a_{4\lambda}$$

再如前文对四阶幺正矩阵的定义式：

$$\sum_{\nu=1}^{4} u_{\mu\nu}\cdot u_{\lambda\nu}^{*} = \delta_{\mu\lambda}$$

这里的下标 μ 、ν 、λ 中，ν 是重复出现的字母，因而 ν 是哑指标，按照约定便可简写为：

$$u_{\mu\nu}\cdot u_{\lambda\nu}^{*} = \delta_{\mu\lambda}$$

此式等同于：

$$u_{\mu1}\cdot u_{\lambda1}^{*} + u_{\mu2}\cdot u_{\lambda2}^{*} + u_{\mu3}\cdot u_{\lambda3}^{*} + u_{\mu4}\cdot u_{\lambda4}^{*} = \delta_{\mu\lambda}$$

§1.2　四阶双自旋矩阵

1.2.1　两组相互对易的四阶自旋矩阵

除了上面的二阶泡利自旋矩阵组，在四阶方阵中，存在着与泡利自旋矩阵性质完全相同的矩阵。下面我们给出两组这样的矩阵，和泡利矩阵一样，第一组包括三个 4 ×4 矩阵，我们仍然用符号 σ_1 、σ_2 、σ_3 代表这三个矩阵：

$$\sigma_1:\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix},\quad \sigma_2:\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&i&0&0\end{bmatrix},\quad \sigma_3:\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

第二组也包括三个 4 ×4 矩阵，我们用符号 τ_1 、τ_2 、τ_3 代表这三个矩阵：

$$\tau_1:\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix},\quad \tau_2:\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\quad \tau_3:\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

这六个矩阵有下列性质：

(1)它们全是厄米矩阵，即这些矩阵的转置共轭矩阵就是它们自己：

$$\sigma_i^+ = \sigma_i\,,\qquad \tau_j^+ = \tau_j \qquad (i;j = 1,2,3) \tag{1.2.3}$$

(2)任意一对相同矩阵相乘等于 1，因此这些矩阵的逆矩阵就是它们自己。

$$\sigma_i^2 = 1\,,\quad \tau_j^2 = 1\,;\quad \sigma_i^{-1} = \sigma_i\,,\quad \tau_j^{-1} = \tau_j \qquad (i;j = 1,2,3) \tag{1.2.4}$$

(3)由前两个性质得出 $\sigma_i^+ = \sigma_i^{-1}$ 和 $\tau_j^+ = \tau_j^{-1}$，因此它们也都是幺正矩阵。

$$\sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i\sigma_i^+ = 1,\quad \tau_j\tau_j^{-1} = \tau_j\tau_j^+ = 1 \qquad (i;j = 1,2,3) \tag{1.2.5}$$

(4)每组内的三个矩阵两两相乘时，其位置可以对调，但乘积等于对调前的负值，上一节已经说过，这种性质被称为彼此反对易，即：

$$\sigma_1\cdot\sigma_2 = -\sigma_2\cdot\sigma_1,\quad \sigma_2\cdot\sigma_3 = -\sigma_3\cdot\sigma_2,\quad \sigma_3\cdot\sigma_1 = -\sigma_1\cdot\sigma_3 \tag{1.2.6}$$

$$\tau_1\cdot\tau_2 = -\tau_2\cdot\tau_1,\quad \tau_2\cdot\tau_3 = -\tau_3\cdot\tau_2,\quad \tau_3\cdot\tau_1 = -\tau_1\cdot\tau_3 \tag{1.2.7}$$

(5)通过直接计算容易验证，两组矩阵都分别具有自旋矩阵的性质，即：

$$\sigma_1\cdot\sigma_2 = i\sigma_3,\quad \sigma_2\cdot\sigma_3 = i\sigma_1,\quad \sigma_3\cdot\sigma_1 = i\sigma_2 \tag{1.2.8}$$

$$\tau_1\cdot\tau_2 = i\tau_3,\quad \tau_2\cdot\tau_3 = i\tau_1,\quad \tau_3\cdot\tau_1 = i\tau_2 \tag{1.2.9}$$

(6)第一组的任何一个矩阵和第二组的任何一个矩阵相乘，当交换它们的位置时，乘积不变，我们说 σ_i 和 τ_j 是可交换的，或者说它们是相互对易的，即：

$$\sigma_i\tau_j = \tau_j\sigma_i \qquad (i;j = 1,2,3) \tag{1.2.10}$$

与上节所述的泡利矩阵相比较，我们看到，(1.2.6)和(1.2.7)所示的矩阵性质与(1.1.5)完全相同，(1.2.8)和(1.2.9)所示的矩阵性质与(1.1.7)式完全相同，这就是说，第一组的三个矩阵和第二组的三个矩阵的性质，都和三个泡利自旋矩阵完全相同。此外，它们还有一个特别重要的性质，就是第一组的三个矩阵和第二组的三个矩阵相互对易。

1.2.2 双自旋矩阵的运算规则

第一组矩阵 σ_i 以及第二组矩阵 τ_j 的性质已经由(1.2.4)—(1.2.10)给出，为便于记忆，我们把这些性质归纳成下面的五个公式：

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \qquad \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i \in_{ijk}\sigma_k \tag{1.2.11}$$

$$\tau_i\tau_j + \tau_j\tau_i = 2\delta_{ij}, \qquad \tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i = 2i \in_{ijk}\tau_k \tag{1.2.12}$$

$$\sigma_i\tau_j - \tau_j\sigma_i = 0 \qquad (i;j = 1,2,3) \tag{1.2.13}$$

如前所述，这里的 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，而 $\in_{ijk}$ 是 Live－Civita 符号。

在本书中，我们把第一组矩阵 σ_1 、σ_2 、σ_3 以及第二组矩阵 τ_1 、τ_2 、τ_3 合称为双自旋矩阵。集中反映双自旋矩阵性质的上面这五个公式有着基本的重要性，可称之为双自旋矩阵的对易和反对易关系式，或称为双自旋矩阵的运算规则。在以后的研究中，凡是提到双自旋矩阵，指的都是遵守(1.2.11)、(1.2.12)和(1.2.13)式的6个厄米矩阵的组合。双自旋矩阵都是四阶方阵，在本书中，以后凡是提到“矩阵”一词，只要没有特别说明的，指的都是四阶方阵。

§1.3 同组内三个矩阵下标间的变换

表达式(1.2.1)和(1.2.2)给出了两组四阶自旋矩阵，在同一个组内的三个矩阵，排列的秩序是无关紧要的，用一个幺正变换就能实现对同一个组内的三个矩阵的秩序进行一次调整，所以变更排列顺序相当于变更了表象。本节介绍调整排列秩序用的幺正矩阵以及相应的幺正变换。我们选取第二组矩阵 τ_1 、τ_2 、τ_3 来作为例子。

1.3.1 同组内三个矩阵 τ_1 、τ_2 、τ_3 下标的轮换

这里首先介绍一个引起下标发生轮换的幺正变换，即是说，它把 τ_1 变成 τ_2 ，把 τ_2 变成 τ_3 ，并把 τ_3 变成 τ_1 。用 U_0 标记这一变换的变换矩阵，它由 τ_1 、τ_2 、τ_3 的线性组合构成：

$$U_0 = \frac{1}{2}(1 + i\tau_1 + i\tau_2 + i\tau_3)\ ,\qquad U_0^{-1} = \frac{1}{2}(1 - i\tau_1 - i\tau_2 - i\tau_3) \tag{1.3.1}$$

对 τ_1 进行幺正变换，就是用 U_0^{-1} 和 U_0 夹乘 τ_1。利用性质(1.2.7)和(1.2.9)可推导如下：

$$\begin{aligned}
U_0^{-1}\tau_1 U_0 &= \frac{1}{2}(1 - i\tau_1 - i\tau_2 - i\tau_3)\tau_1 \frac{1}{2}(1 + i\tau_1 + i\tau_2 + i\tau_3) \\
&= \frac{1}{2}(\tau_1 - i - \tau_3 + \tau_2)\cdot\frac{1}{2}(1 + i\tau_1 + i\tau_2 + i\tau_3) \\
&= \frac{1}{4}(\tau_1 - i - \tau_3 + \tau_2 + i + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_3 + \tau_2 \\
&\quad - \tau_1 + i + \tau_2 + \tau_3 - i - \tau_1) \\
&= \tau_2
\end{aligned}$$

用 U_0^{-1} 和 U_0 夹乘 τ_2，得：

$$\begin{aligned}
U_0^{-1}\tau_2 U_0 &= \frac{1}{2}(1 - i\tau_1 - i\tau_2 - i\tau_3)\tau_2 \frac{1}{2}(1 + i\tau_1 + i\tau_2 + i\tau_3) \\
&= \frac{1}{2}(\tau_2 + \tau_3 - i - \tau_1)\cdot\frac{1}{2}(1 + i\tau_1 + i\tau_2 + i\tau_3) \\
&= \frac{1}{4}(\tau_2 + \tau_3 - i - \tau_1 + \tau_3 - \tau_2 + \tau_1 - i + i + \tau_1 \\
&\quad + \tau_2 + \tau_3 - \tau_1 + i + \tau_3 - \tau_2) \\
&= \tau_3
\end{aligned}$$

用 U_0^{-1} 和 U_0 夹乘 τ_3，得：

$$\begin{aligned}
U_0^{-1}\tau_3 U_0 &= \frac{1}{2}(1 - i\tau_1 - i\tau_2 - i\tau_3)\tau_3 \frac{1}{2}(1 + i\tau_1 + i\tau_2 + i\tau_3) \\
&= \frac{1}{2}(\tau_3 - \tau_2 + \tau_1 - i)\cdot\frac{1}{2}(1 + i\tau_1 + i\tau_2 + i\tau_3) \\
&= \frac{1}{4}(\tau_3 - \tau_2 + \tau_1 - i - \tau_2 - \tau_3 + i + \tau_1 + \tau_1 - i - \tau_3 \\
&\quad + \tau_2 + i + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \\
&= \tau_1
\end{aligned}$$

很明显，在上面这些推导中，如果交换幺正矩阵和它的逆矩阵的位置，轮换将沿相反方向进行。

1.3.2　同组内三个矩阵 τ_1、τ_2、τ_3 下标的对换

要使 τ_1、τ_2、τ_3 之中的任意两个交换下标，也能通过幺正变换实现，此

时引起下标发生对换的三个变换矩阵是 U_{12}、U_{23}、U_{31}。

变换矩阵 U_{12} 由 τ_1 和 τ_2 构成：

$$U_{12} = U_{12}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + \tau_2) \tag{1.3.2}$$

它把 τ_1 变成 τ_2，把 τ_2 变成 τ_1，把 τ_3 变成 $-\tau_3$，在如下的推导过程中，同前面一样，使用了这些矩阵的性质(1.2.7)和(1.2.9)。

$$\begin{aligned}
U_{12}^{-1}\tau_1 U_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + \tau_2)\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + \tau_2) \\
&= \frac{1}{2}(1 - i\tau_3)(\tau_1 + \tau_2) \\
&= \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_2 - \tau_1) \\
&= \tau_2 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{12}^{-1}\tau_2 U_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + \tau_2)\tau_2 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + \tau_2) \\
&= \frac{1}{2}(i\tau_3 + 1)(\tau_1 + \tau_2) \\
&= \frac{1}{2}(-\tau_2 + \tau_1 + \tau_1 + \tau_2) \\
&= \tau_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{12}^{-1}\tau_3 U_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + \tau_2)\tau_3 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + \tau_2) \\
&= \frac{1}{2}(-i\tau_2 + i\tau_1)(\tau_1 + \tau_2) \\
&= \frac{1}{2}(-\tau_3 + i - i - \tau_3) \\
&= -\tau_3
\end{aligned}$$

变换矩阵 U_{23} 由 τ_2 和 τ_3 构成：

$$U_{23} = U_{23}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2 + \tau_3) \tag{1.3.3}$$

它把 τ_2 变成 τ_3，把 τ_3 变成 τ_2，把 τ_1 变成 $-\tau_1$：

$$\begin{aligned}
U_{23}^{-1}\tau_2 U_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2 + \tau_3)\tau_2 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2 + \tau_3) \\
&= \frac{1}{2}(1 - i\tau_1)(\tau_2 + \tau_3)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\tau_2 + \tau_3 + \tau_3 - \tau_2)$$

$$= \tau_3 .$$

$$U_{23}^{-1}\tau_3 U_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2 + \tau_3)\tau_3 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2 + \tau_3)$$

$$= \frac{1}{2}(i\tau_1 + 1)(\tau_2 + \tau_3)$$

$$= \frac{1}{2}(-\tau_3 + \tau_2 + \tau_2 + \tau_3)$$

$$= \tau_2$$

$$U_{23}^{-1}\tau_1 U_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2 + \tau_3)\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2 + \tau_3)$$

$$= \frac{1}{2}(-i\tau_3 + i\tau_2)(\tau_2 + \tau_3)$$

$$= \frac{1}{2}(-\tau_1 + i - i - \tau_1)$$

$$= -\tau_1$$

变换矩阵 U_{31} 由 τ_3 和 τ_1 构成:

$$U_{31} = U_{31}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_3 + \tau_1) \tag{1.3.4}$$

它把 τ_3 变成 τ_1，把 τ_1 变成 τ_3，把 τ_2 变成 $-\tau_2$：

$$U_{31}^{-1}\tau_3 U_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_3 + \tau_1)\tau_3 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_3 + \tau_1)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - i\tau_2)(\tau_3 + \tau_1)$$

$$= \frac{1}{2}(\tau_3 + \tau_1 + \tau_1 - \tau_3)$$

$$= \tau_1 .$$

$$U_{31}^{-1}\tau_1 U_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_3 + \tau_1)\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_3 + \tau_1)$$

$$= \frac{1}{2}(i\tau_2 + 1)(\tau_3 + \tau_1)$$

$$= \frac{1}{2}(-\tau_1 + \tau_3 + \tau_3 + \tau_1)$$

$$= \tau_3$$