现代物理基础丛书 58

经典电动力学

张锡珍　张焕乔　著

科学出版社

现代物理基础丛书 58

经典电动力学

张锡珍 张焕乔 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从构造洛伦兹变换下不变作用量出发，由最小作用量原理导出基本运动方程．先讲狭义相对论，然后讲电磁场理论，这样更容易阐述电磁场理论的协变性及系统性．本书除讨论了静电学、静磁学、带电粒子在电磁场中的运动和运动的带电粒子产生的电磁场之外，还对电介质的色散、电磁波的辐射、电磁波的散射折射和衍射以及快速运动带电粒子与物质的相互作用等问题给出了较深入的讨论．在每章后面都有例题，通过对例题的解答，一方面可以加深对于基本内容的理解，另一方面还可以学习一些解决实际问题的技巧．

本书可作为大学高年级学生、研究生的学习用书和科研工作者的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

经典电动力学/张锡珍，张焕乔著．—北京：科学出版社，2013. 10
（现代物理基础丛书；58）
ISBN 978-7-03-038762-2

I. ①经… II. ①张… ②张… III. ①电动力学 IV. ①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 234131 号

责任编辑：钱 俊／责任校对：赵桂芬
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 10 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2013 年 10 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：303 000

定价：78.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

目　　录

第 1 章　引言 …… 1
第 2 章　相对性原理 …… 3
2.1　伽利略相对性原理 …… 3
2.2　爱因斯坦的相对性原理和洛伦兹变换 …… 4
2.3　四维速度和四维加速度 …… 12
2.4　四维空间中的高斯定理和斯托克斯定理 …… 13
2.5　例题 …… 14
第 3 章　相对论力学 …… 18
3.1　分析力学简介 …… 18
3.2　相对论性自由粒子动力学 …… 20
3.3　粒子的衰变和弹性碰撞 …… 23
3.4　碰撞截面及洛伦兹变换下分布函数的变换 …… 27
3.5　粒子系统的对称性和守恒定律 …… 29
3.6　例题 …… 31
第 4 章　带电粒子在电磁场中的运动 …… 33
4.1　相对论性带电粒子之间的相互作用 …… 33
4.2　带电粒子在电磁场中的运动方程 …… 34
4.3　在洛伦兹变换下电磁场的变换 …… 38
4.4　带电粒子在库仑场中的运动 …… 40
4.5　带电粒子在均匀恒定磁场中的运动 …… 47
4.6　带电粒子在均匀静电场和静磁场联合作用下的运动 …… 48
4.7　带电粒子在非均匀恒定磁场中的漂移运动 …… 48
4.8　例题 …… 53
第 5 章　真空中的 Maxwell 方程组 …… 55
5.1　经典场及其运动方程 …… 55
5.2　电磁场的 Maxwell 方程组 …… 57
5.3　电磁场的能量密度和能流密度 …… 59
5.4　对称性和电磁场的守恒定律 …… 60
5.5　例题 …… 65

第 6 章 介质中的 Mexwell 方程组 ······ 67
6.1 介质中 Mexwell 方程组的推导 ······ 67
6.2 介质的色散 $\varepsilon(\omega)$ ······ 71
6.3 计算 $\varepsilon(\omega)$ 的经典模型 ······ 72
6.4 介质中电磁场的能量守恒 ······ 74
6.5 Kramer-Kroning 关系 ······ 78
6.6 例题 ······ 80
第 7 章 恒定电磁场 (I) ······ 82
7.1 恒定电场和库仑定律 ······ 82
7.2 匀速直线运动的电荷产生的场 ······ 85
7.3 静电场的多极展开 ······ 87
7.4 外电场中的带电粒子系统 ······ 89
7.5 恒定磁场 (稳定电流产生的磁场) ······ 90
7.6 拉莫定理 ······ 92
7.7 例题 ······ 95
第 8 章 恒定电磁场 (II) ······ 102
8.1 静电场的边值问题 ······ 102
8.2 磁标量势 ······ 109
8.3 例题 ······ 110
第 9 章 电磁波 ······ 113
9.1 电磁场的波动方程 ······ 113
9.2 自由平面波 ······ 115
9.3 单色平面波 ······ 116
9.4 电磁场的谱分解 ······ 118
9.5 场的傅里叶展开和场的本征振动 ······ 119
9.6 电磁波在介质中的传播 ······ 122
9.7 一维情况下波的叠加和群速度 ······ 125
9.8 电磁波在等离子体中的传播 ······ 126
9.9 电磁波在介质分界面的反射和折射 ······ 127
9.10 例题 ······ 131
第 10 章 运动电荷的场 ······ 134
10.1 延迟势 ······ 134
10.2 李纳–维谢尔势及相应的电场和磁场 ······ 137
10.3 延迟势和李纳–维谢尔势的谱分解 ······ 143
10.4 带电粒子系统的经典力学描述 ······ 145

10.5　例题 ······ 148
第 11 章　电磁波的辐射 ······ 149
11.1　远离带电粒子系统处的场 ······ 149
11.2　电偶极, 磁偶极和电四极辐射 ······ 150
11.3　带电粒子体系近处的辐射场 ······ 152
11.4　高速运动电荷的辐射 ······ 154
11.5　辐射场的谱分析 ······ 159
11.6　同步辐射 ······ 162
11.7　辐射场的球面波展开 ······ 167
11.8　辐射阻尼和谱线的自然宽度 ······ 182
11.9　例题 ······ 184
第 12 章　电磁波的散射和衍射 ······ 193
12.1　长波长电磁波的散射 ······ 193
12.2　电磁波在金属球上的散射 ······ 199
12.3　几何光学和电磁波的衍射 ······ 204
12.4　电磁波散射的光学定理 ······ 207
12.5　例题 ······ 210
第 13 章　快速运动带电粒子与物质的相互作用 ······ 214
13.1　快速运动带电粒子与介质相互作用的物理机制 ······ 214
13.2　快速运动带电粒子通过稀薄介质时的能量损失 ······ 215
13.3　快速带电粒子通过稠密介质时的能量损失 ······ 219
13.4　切连科夫辐射 ······ 231
13.5　例题 ······ 234
参考文献 ······ 237
索引 ······ 238
《现代物理基础丛书》已出版书目 ······ 241

第 1 章　引　　言

电磁现象的研究有很悠久的历史, 但直到 1771~1773 年 Cavendishe 实验确立了带电粒子之间相互作用的 $\frac{1}{r^2}$ 规律, 1875 年库仑确立了库仑定律 $\vec{F}=\frac{q_1q_2\vec{n}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^2}$ 以后, 才真正开始在世界范围内定量地研究电磁现象. 50 年后, 法拉第给出了磁场的变化与电流的关系. 直到 1864 年 Maxwell 在总结所有前人工作的基础上建立了 Maxwell 方程组并预言了电磁波的存在

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\overrightarrow{X},t)=0, \tag{1.1}$$

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}(\overrightarrow{X},t)=0. \tag{1.2}$$

二十多年以后 (1888 年)Hertz 在实验上发现了以光速传播的横波 —— 电磁波, 最终确立了 Maxwell 电磁理论、即经典电动力学的正确性. 经典电动力学的确立在许多方面挑战了经典力学, 并最终导致了相对论力学的建立, 所以经典电动力学和狭义相对论是密不可分的. 另外经典电动力学的辐射理论不能正确解释黑体辐射的频谱分布, 此理论还给出了由于原子中的电子不断辐射能量而最终 “坍塌” 到原子核, 但实际上原子和分子是稳定的且辐射有谱线结构, 这些矛盾在推动量子力学建立的过程中起了关键性作用. 量子电动力学的发展使得电磁相互作用可用于描述高速微观世界. 20 世纪后期发展的标准模型 (夸克、轻子之间交换光子, 中间玻色子和胶子) 将弱、电、强相互作用在量子水平上给出了统一描述, 而经典电动力学和经典力学共同作为理论物理的一个重要环节仍然发挥着重要作用. 本书的讲述方法是从构造洛伦兹变换下不变作用量出发, 由最小作用量原理导出基本方程. 先讲狭义相对论, 然后讲电磁场理论, 这样更容易阐述电磁场理论的协变性质及系统性. 在本书中对电介质的色散、电磁波的辐射、电磁波在介质中的传播和散射以及快速运动带电粒子与物质的相互作用等物理问题讨论时, 我们总是首先对问题给出物理图像描述和数量级的估计, 然后再借助数学公式进行严格推导和计算, 这样才能抓住问题的物理本质, 也是做研究工作的基本方法.

另外在借助数学工具解决物理问题时, 强调解决问题的思路而不是只给出结果, 这有助于培养学习者的独立工作能力.

本书采用复欧几里得四维时空 $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ x_4 = \mathrm{i}ct \end{pmatrix}$, 在表达式中出现下标相同暗指从 1 到 4 求和, 例如,

$$x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2.$$

本书采用高斯单位制.

第 2 章　相对性原理

2.1　伽利略相对性原理

经典力学满足伽利略相对性原理, 即描述物体运动的牛顿定律在所有惯性系中是不变的, 或更一般的陈述为一切自然定律在所有惯性系中是等价的, 而不同惯性系之间满足伽利略变换:

$$\begin{aligned}\vec{X}' &= \vec{X} + \vec{V}t, \\ t' &= t.\end{aligned} \tag{2.1}$$

在 1900 年前后物理学的基本状况是:

(1) 伽利略相对性原理已经被确认为是物理学的基本原理.

(2) Maxwell 的电磁理论已被实验证实是正确的理论.

如此一来, 当时物理学存在的基本矛盾是: Maxwell 的电磁理论不满足伽利略相对性原理.

如果在 K 系中有自由电磁波的波动方程

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\vec{X}, t) = 0, \tag{2.2}$$

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{X}, t) = 0. \tag{2.3}$$

作伽利略变换 (2.1), 则在 K' 系 (K 系在 K' 系中以速度 $\vec{V}$ 运动) 中得到的方程为

$$\left(\vec{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\phi = 0, \tag{2.4}$$

$$\left(\vec{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\vec{A} = 0, \tag{2.5}$$

且找不到任何关于函数 ϕ, $\vec{A}$ 的变换使得方程能变化到在 K 系中的形式, 这与 Mexwell 电磁理论的基本方程相矛盾.

为解决这一基本矛盾可能有三条出路:

(1) 否定 Mexwell 的电磁理论.

(2) 伽利略相对性原理正确, 但 Mexwell 的电磁理论只在特定的惯性系 (以太静止的参照系, 以太是很轻的传播电磁波的介质) 中正确.

(3) 修改伽利略相对性原理, 使之既适用于经典力学, 又适用于 Mexwell 的电磁理论.

当时科学界的主流倾向于出路 (2), 即存在绝对静止的以太介质, 电磁波在静止以太介质中的传播速度为光速 c, 即 Mexwell 的电磁理论只在以太静止的惯性系中正确.

但迈克耳孙–莫雷实验以及后来的大量更精确的实验给出的结果是: 否定静止以太介质的存在!

2.2 爱因斯坦的相对性原理和洛伦兹变换

爱因斯坦采取了第三条可能的出路.

一切自然定律在所有惯性系中等价和光速在所有惯性系中是一个常数 c 是爱因斯坦的相对性原理的两个基本出发点.

这样一来, 不同的惯性系之间的时空变换不再是伽利略变换, 而是洛伦兹变换. 爱因斯坦的相对性原理导致经典力学的时空观要发生根本改变!

假定 K 系和 K' 系是两个惯性系, 在 K 系中有一光信号在 t_1 时刻从 $\vec{X}_1$ 出发, 以光速 c 传播, 在 t_2 时刻到达 $\vec{X}_2$. 以 K 系中的时钟和尺子度量时间和距离, 则有

$$(\vec{X}_2-\vec{X}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0.$$

如果在 K' 系中观测这同一过程, 则信号由 t'_1 时刻从 $\vec{X}'_1$ 出发, 以光速 c 传播在 t'_2 时刻到达 $\vec{X}'_2$. 以 K' 系中的时钟和尺子度量时间和距离, 则有

$$(\vec{X}'_2-\vec{X}'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1)^2=0,$$

表明光速不依赖于参照系.

用假想的复四维空间中的一点 $\binom{\vec{X}}{\mathrm{i}ct}$ 表示一个事件, 前三个坐标 $\vec{X}$ 表示事件发生的地点, 第四个坐标中的 t 表示事件发生的时刻. 一个粒子在 t 时刻处在 $\vec{X}$ 地点这一事件在此四维空间中用一个世界点 $\binom{\vec{X}}{\mathrm{i}ct}$ 表示. 一个粒子的运动在此复四维空间中用一条世界线表示.

$$s_{12}=\{c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{X}_2-\vec{X}_1)^2\}^{\frac{1}{2}}=\{-[(\vec{X}_2-\vec{X}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2]\}^{\frac{1}{2}}$$

称为两个事件之间的间隔. 而 $[(\vec{X}_2-\vec{X}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2]$ 是此复四维空间中两点距离的平方.

对于两个很靠近的事件, 它们之间的间隔为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{-((\mathrm{d}\vec{X})^2-c^2(\mathrm{d}t)^2)}.$$

由于光速不依赖于参照系, 若在一个惯性系 (K 系) 中 $\mathrm{d}s = 0$, 则在另一惯性系 (K' 系) 中一定有 $\mathrm{d}s' = 0$, 反之也成立. 所以 $\mathrm{d}s, \mathrm{d}s'$ 同为一阶无穷小量. 因此有 $(\mathrm{d}s)^2 = a(\mathrm{d}s')^2$.

由时空的均匀性可知 a 与 $\vec{X}$ 和 t 无关, 由空间的各向同性可以得出 $a(\vec{V}) = a(|\vec{V}|)$.

现在考虑三个惯性系 K 系, K_1 系和 K_2 系: K_1 系和 K_2 系分别在 K 系中以速度 $\vec{V}_1$ 和 $\vec{V}_2$ 运动, 则可得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{d}s)^2 = a(V_1)(\mathrm{d}s_1)^2, \\
&(\mathrm{d}s)^2 = a(V_2)(\mathrm{d}s_2)^2, \\
&(\mathrm{d}s_1)^2 = a(|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|)(\mathrm{d}s_2)^2,
\end{aligned}
$$

这必然导致

$$
\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|).
$$

要使此等式成立且又与 $\vec{V}_1$ 和 $\vec{V}_2$ 之间夹角无关的唯一可能是 $a = 1$. 因而得到

$$
(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}s')^2.
$$

对于有限的间隔有 $s = s'$.

由此得到重要结论:

光速在所有惯性系中是一常数必然导致两事件之间的间隔不随参照系改变, 或者等价地表述为光速在所有惯性系中是一常数必然导致复四维空间 $\binom{\vec{X}}{\mathrm{i}ct}$ 中两点之间的距离不变.

如果 $s_{12}^2 < 0$, 称两事件之间为类空间隔;

如果 $s_{12}^2 > 0$, 称两事件之间为类时间隔.

两事件之间的间隔是类空或类时的不依赖于参照系的选取. 两个事件之间只有是类时间隔时才可能有因果性, 因为任何信号的传播速度都等于或小于光速.

取事件 O 作为时间和空间的原点, 或等价地取它为复四维空间的坐标原点, 为方便起见这里空间坐标只取为一维 (图 2.1).

在直线 ab, cd 上

$$
x = \pm ct.
$$

首先考虑世界点在 aOc 区域内的事件. 显然在此区域内 $c^2t^2 - x^2 > 0$, 即任何点代表的事件与事件 O 之间的间隔是类时的. 而 $t > 0$ 表示, 相对于事件 O 此区域的世界点代表的事件是绝对未来.

同样的理由可知, 区域 bOd 中任何世界点代表的事件与事件 O 之间的间隔是类时的. 而 $t < 0$ 表示, 相对于事件 O 此区域的世界点代表的事件是绝对过去.

在区域 aOd 和 bOc 中任何世界点代表的事件与事件 O 之间的间隔是类空的.

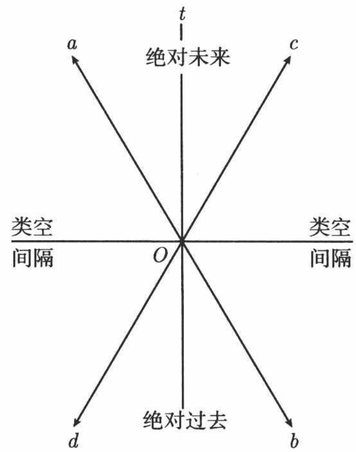

图 2.1　时空示意图

如果考虑四维空间, 则 $c^2t^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=0$ 定义一个锥面, 称为光锥.

已经知道保持空间两点之间距离不变的变换是正交变换.

假定 K 系和 K' 系的原点重合. 在 K 系中有 $x_\mu=\binom{\vec{X}}{\mathrm{i}ct}$, 则在 K' 系中有

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu.$$

由到原点的距离是不变量

$$x'^2_\mu=x^2_\mu$$

给出

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\nu'}=\delta_{\nu\nu'},\quad \text{即}\widetilde{a_{\nu\mu}}a_{\mu\nu'}=\delta_{\nu\nu'}.$$

令 $A=(a_{\mu\nu})$, 则 $\widetilde{A}A=I$, 所以 $\widetilde{A}=A^{-1}$, 即 A 为正交变换.

又因为 $\det(\widetilde{A}A)=\det(\widetilde{A})\cdot\det(A)=1$, 而 $\det(\widetilde{A})=\det(A)$, 由此可得

$$(\det(A))^2=1,$$

所以 $\det(A)=\pm1$.

变换前四维矢量 $\binom{\vec{X}}{\mathrm{i}ct}$, 变换后四维矢量 $x'_\mu=\binom{\vec{X}'}{\mathrm{i}ct'}$, 则要求

$$a_{\mu\nu}=\begin{cases} a_{ij},a_{44}, & \text{实数}\\ a_{4i},a_{i4}, & \text{纯虚数}\end{cases}$$

这种特殊的正交变换称为洛伦兹变换.

$\det(A)=1$, 称正常洛伦兹变换.

$\det(A) = -1$, 称反常洛伦兹变换.

下面只考虑 $a_{44} > 0$ 的正常洛伦兹变换.

首先讨论特殊情况下的洛伦兹变换.

当 K 系和 K' 系的轴彼此平行, 而 K 系在 K' 系中沿 1 轴以速度 V 运动时, 这种变换在四维空间中可视为 (x_1, x_4) 平面上的转动,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\psi - x_4 \sin\psi, \\ x_4' &= x_1 \sin\psi + x_4 \cos\psi, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned} \tag{2.6}$$

取 $x_1 = 0$ 作为 K 系的坐标原点, 则可得到

$$\frac{x_1'}{x_4'} = -\tan\psi, \quad \frac{x_1'}{\mathrm{i}ct'} = -\tan\psi = -\mathrm{i}\frac{V}{c}.$$

所以有

$$\begin{aligned} \tan\psi &= \mathrm{i}\frac{V}{c} = \mathrm{i}\beta, \\ \cos\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma, \\ \sin\psi &= \frac{\mathrm{i}\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \mathrm{i}\beta\gamma. \end{aligned}$$

最终得到

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

下面讨论一般情况下的洛伦兹变换的形式.

对无穷小洛伦兹变换有

$$x_\mu' = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}.$$

由关系式

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} =& (\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu})(\delta_{\mu\nu'} + \epsilon_{\mu\nu'}) \\ =& \delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu'} + \delta_{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu'} + \delta_{\mu\nu'}\epsilon_{\mu\nu} \\ =& \delta_{\nu\nu'} + \epsilon_{\nu\nu'} + \epsilon_{\nu'\nu} = \delta_{\nu\nu'}, \end{aligned}$$

得到

$$\epsilon_{\nu\nu'} + \epsilon_{\nu'\nu} = 0, \quad \text{即}\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}.$$

所以 ϵ 是 4×4 的反对称矩阵. 它共有六个独立元素, 其中三个独立参数 ϵ_{ij} 确定两个三维坐标系的空间相对取向, 另外三个参数 ϵ_{4i} 则确定 K 系相对于 K' 系的运动速度.

全部正常洛伦兹变换构成洛伦兹群 (存在单位元素和逆元素, 满足封闭性和结合律). 此群有六个无穷小生成元, 它们的表示为

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

这些无穷小生成元满足对易关系

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k, \tag{2.8}$$

$$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \tag{2.9}$$

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k. \tag{2.10}$$

这里

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \text{from } (ijk) \text{ to } (123) \quad \text{by} \quad \text{even} \quad \text{perm.}, \\ -1, & \text{if} \quad \text{from } (ijk) \text{ to } (123) \quad \text{by} \quad \text{odd} \quad \text{perm.}, \\ 0, & \text{other} \quad \text{cases} \end{cases}$$

是三阶完全反对称单位张量, 它共有 27 个元素, 其中只有 6 个不为 0, 三个为 1, 三个为 -1.

容易验证洛伦兹群的六个无穷小生成元满足下列关系:

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad K_2^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad K_3^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

对易关系 (2.8) 表示 S_1, S_2 和 S_3 是三维空间中转动群的三个无穷小生成元. 对易关系 (2.9) 表示在空间转动下 K 像三维矢量一样变换. 对易关系 (2.10) 表示在不同方向的递升 (boost) 彼此不对易.

无穷小生成元 K_1, K_2 和 K_3 有下列性质:

令 $\overrightarrow{\epsilon}$ 是任意单位矢量, 则

$$\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}=\begin{pmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\epsilon_1\\0&0&0&-\mathrm{i}\epsilon_2\\0&0&0&-\mathrm{i}\epsilon_3\\\mathrm{i}\epsilon_1&\mathrm{i}\epsilon_2&\mathrm{i}\epsilon_3&0\end{pmatrix},\quad (\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^2=\begin{pmatrix}\epsilon_1^2&\epsilon_1\epsilon_2&\epsilon_1\epsilon_3&0\\\epsilon_1\epsilon_2&\epsilon_2^2&\epsilon_2\epsilon_3&0\\\epsilon_1\epsilon_3&\epsilon_2\epsilon_3&\epsilon_3^2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^3=\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}.$$

假定: K 系和 K' 系的三个空间坐标轴已经分别平行, 而 K 系在 K' 系中以速度 $\overrightarrow{V}$ 运动. 令

$$\overrightarrow{\beta}=\frac{\overrightarrow{V}}{c},\quad \overrightarrow{\epsilon}=\frac{\overrightarrow{\beta}}{\beta},\quad \xi=\mathrm{ar}\tanh(\beta)$$

(所以有 $\tanh\xi=\beta,\cosh\xi=\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\sinh\xi=\beta\gamma$). 则洛伦兹变换的递升矩阵的一般形式可表示为

$$\begin{aligned}A(\overrightarrow{\beta})=&\mathrm{e}^{\xi\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}}=I+\left(\xi+\frac{1}{3!}\xi^3+\cdots\right)\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}+\left(\frac{\xi^2}{2!}+\frac{\xi^4}{4!}+\cdots\right)(\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^2\\=&I+\sinh\xi\,\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}+(\cosh\xi-1)(\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^2\\=&\begin{pmatrix}1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2}&-\mathrm{i}\beta_1\gamma\\\dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_1}{\beta^2}&1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2}&-\mathrm{i}\beta_2\gamma\\\dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_1}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_2}{\beta^2}&1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2}&-\mathrm{i}\beta_3\gamma\\\mathrm{i}\beta_1\gamma&\mathrm{i}\beta_2\gamma&\mathrm{i}\beta_3\gamma&\gamma\end{pmatrix},\end{aligned}$$

这里 $\overrightarrow{\xi}=\xi\overrightarrow{\epsilon}$ 称为递升矢量.

对这种洛伦兹变换有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & -\mathrm{i}\beta_1\gamma \\ \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & -\mathrm{i}\beta_2\gamma \\ \dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_1}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} & -\mathrm{i}\beta_3\gamma \\ \mathrm{i}\beta_1\gamma & \mathrm{i}\beta_2\gamma & \mathrm{i}\beta_3\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

当运动速度沿 1 轴 ($\beta_2=\beta_3=0, \beta=\beta_1$) 时, 则式 (2.11) 简化为特殊情况下的洛伦兹变换公式 (2.7).

光速在所有的惯性系是一个常数导致了不同的惯性系之间已不再是伽利略变换, 而是洛伦兹变换. 这将导致时空观的深刻变化. 下面用洛伦兹变换公式 (2.7) 讨论等时性, 时间延展和长度的洛伦兹收缩.

K 系在 K' 系中沿 1 轴以速度 V 运动, 由洛伦兹变换公式可得

$$\begin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1+Vt), && (1) \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ t' &= \gamma\left(t+\frac{Vx_1}{c^2}\right), && (2) \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x_1'-Vt'), && (3) \\ x_2 &= x_2', \\ x_3 &= x_3', \\ t &= \gamma\left(t'-\frac{Vx_1'}{c^2}\right). && (4) \end{aligned}$$

等时性

在 K 系放两个时钟, 可假定第一个在原点, 第二个在 1 轴的 $x_1=x$ 的地方, 并调整两个钟等时.

在 K' 系中观测时间, 第一个钟的读数为 t_1', 第二个钟的读数为 t_2' 则 $t_2'-t_1'=\gamma\dfrac{Vx}{c^2}$, 即两个时钟不等时.

时间延展

在 K 系中观测, 一时钟放在原点 $(x_1=0)$ 不动, 时间间隔为 Δt, 则由 (2) 式可得 $\Delta t'=\gamma\Delta t$, 即运动的时钟时间变慢.