Xianxing Daishu

线性代数

四川大学数学学院 编

四川大学出版社

Xianxing
Daishu

线性代数

四川大学数学学院　编

四川大学出版社

责任编辑:毕　潜
责任校对:唐　飞
封面设计:墨创文化
责任印制:王　炜

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 四川大学数学学院编. —成都:
四川大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5614-5999-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①四…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 154636 号

书名　**线性代数**

作　　者　四川大学数学学院
出　　版　四川大学出版社
地　　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行　四川大学出版社
书　　号　ISBN 978-7-5614-5999-7
印　　刷　郫县犀浦印刷厂
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　　张　12.75
字　　数　290 千字
版　　次　2012 年 8 月第 1 版
印　　次　2014 年 8 月第 3 次印刷
定　　价　30.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。
电话:(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scup.cn

目　　录

第 1 章　线性方程组

在数学里最重要的一个问题可能就是解线性方程组. 在科学研究或工业应用中大部分的数学问题会在某一阶段涉及线性方程组. 利用现代数学方法，一个复杂的问题通常可转化为一个简单的线性方程组. 线性方程组是在应用中产生的，广泛涉及商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学、物理等领域. 因此，本书第 1 章就从线性方程组开始.

§1.1　线性方程组　高斯消元法与矩阵

一个 n 元线性方程(linear equation in n unknowns)是具有如下形式的方程：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b, \tag{1.1.1}$$

其中，系数(coefficients)a_1，a_2，⋯，a_n 与常数项 b 均为已知的实数或者复数；x_1，x_2，⋯，x_n 为未知变量；n 为正整数. 一个线性方程组(system of linear equations)或者线性系统(linear system)是一个或者几个含相同变量的线性方程的集合. 一个含 m 个方程的 n 元线性方程组形如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中，a_{ij} 与 b_i($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$)都是已知的数. 我们称(1.1.2)为 $m\times n$ 线性方程组. 当 b_i 全为零时，称为齐次线性方程组. 当 b_i 不全为零时，称为非齐次线性方程组. 下列都是线性方程组.

(A)$\begin{cases} x_1+3x_2=7, \\ 2x_1+x_2=4. \end{cases}$　(B)$\begin{cases} x_1-x_2=2, \\ -x_1+x_2=-2. \end{cases}$　(C)$\begin{cases} x_1-x_2=2, \\ x_1-x_2=3. \end{cases}$

方程组的解(solution)是一组满足方程组的 n 元有序数组(x_1，x_2，⋯，x_n). 如果 n 元数组(0，0，⋯，0)满足方程组，就称其为方程组的零解. 若方程组的解中含有非零数，则称其为非零解. 方程组的全部解的集合，称为方程组的解集. 如(1，2)是方程组(A)的解，(3，1)是方程组(B)的一个解. 但是方程组(C)没有解. 因为上述三个方程组的每个

方程在几何上表示平面内的一条直线，求解方程组实际上就是求两条直线的交点. 方程组(A)表示两条直线相交于唯一一点(1，2). 方程组(B)表示两条直线重合，从而交点有无穷多个，意味着方程组(B)有无穷多解. 方程组(C)表示两条直线平行但不重合，所以无交点，从而方程组无解. 这个例子反映了线性方程组的一般事实.

一个线性方程组的解有三种情况：①无解；②有唯一解；③有无穷多解.

注:如果一个线性方程组有唯一解或无穷多解，则称它是相容(consistent)的；如果无解，则称它是不相容(inconsistent)的.

线性方程组的两个基本问题：

(1)**方程组是否有解，即是否至少存在一个解. 这是解的存在性问题.**

(2)**如果解存在，解是否仅有一个. 这是解的唯一性问题.**

在初等数学中，我们用代入消元法或者加减消元法求解二元和三元线性方程组. 容易发现线性方程组的解完全由未知量的系数与常数项确定. 为了更清楚地表达线性方程组的解与未知量的系数和常数项的关系，我们在本节讨论一般线性方程组求解的高斯消元法(Gaussian elimination).

考虑两个线性方程组：

$$\text{(A)}\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=3, \\ \qquad\quad x_2 \qquad\ =2, \\ \qquad\qquad\quad 2x_3=6. \end{cases} \qquad \text{(B)}\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=3, \\ -2x_1-x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+2x_2+x_3=9. \end{cases}$$

方程组(A)易解，因为从后两个方程立即得到 $x_2=2$，$x_3=3$. 然后把它们代入第一个方程解得 $x_1=1$. 因此方程组(A)的解为(1，2，3). 方程组(B)看起来要复杂一些. 实际上方程组(B)与(A)有相同的解. 将第一个方程与第二个方程相加得

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ \hline & & x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

如果$(x_1，x_2，x_3)$是方程组(㊣B㊞)的任一解，则它必满足方程组的每一个方程，也就一定满足其中任意两个方程相加或者乘以某个常数产生的新方程. 自然地，交换两个方程的位置也不会改变方程组的解. 所以 $x_2=2$.

同样地，第三个方程减去第一个方程得

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ \hline & & & & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

所以方程组(B)的解一定是方程租(A)的解. 用方程组(A)的第二个方程 $x_2=2$ 减去第一个方程，可得方程组(B)的第二个方程；用方程组(A)的第一个方程加上第三个方程，可得到方程组(B)的第三个方程. 所以方程组(A)的解是方程组(B)的解.

因此$(x_1，x_2，x_3)$是方程组(B)的解当且仅当$(x_1，x_2，x_3)$是方程组(A)的解. 所以

两个方程组有相同的解(1，2，3).

包含相同变量的两个方程组如果有相同的解集，则称它们是**等价**的(equivalent).

归纳起来，有三种变换作用在一个线性方程组上可以获得与之等价的线性方程组，我们称这三种变换为**线性方程组的初等变换**(elementary operations of linear system)：

(1) 交换方程组中两个方程的顺序.

(2) 在一个方程的两端都乘以一个非零的常数.

(3) 一个方程的常数倍加在另一个方程上.

只要给定一个线性方程组，我们可以使用这三种变换获得比原方程组更容易求解的等价线性方程组. 从上面的例子中可以看到，方程组(A)比方程组(B)易求解. 原因在于方程组(A)具有“阶梯形”形式，而方程组(B)明显就不具备“阶梯形”形式.

阶梯形方程组易解，线性方程组的初等变换作用就是将方程组化成阶梯形.

在运用消元法求解方程组的过程中，参与变换运算的实际上是方程组中各变量的系数及常数项.

定义 1.1.1　由 $m\times n$ 个(实或复)数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵(或 $m\times n$ 矩阵)，简称**矩阵**(㊣*matrix*㊞). 数 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列**元素**.

我们常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…表示矩阵. 需要表示出它的元素时，可记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$等. 如果要指明它是 m 行 n 列矩阵，则可用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$、$\boldsymbol{A}_{mn}$ 或$(a_{ij})_{m\times n}$等记号表示. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数等于 n 时称为 n 阶矩阵、n 阶方阵或方阵，可表示为 $\boldsymbol{A}_n$ 或 $\boldsymbol{A}_{nn}$. 特别地，一阶矩阵是由一个元素构成的矩阵. 元素 a_{ij} 的位置可用(i,j)表示.

定义 1.1.2　一个线性方程组中每个变量的系数及常数项按照它们在方程组中的位置构成的矩阵，称为方程组的**增广矩阵**(augmented matrix). 如果只是把方程组中各变量的系数按照它们在方程组中的位置排成一个矩形阵列，就称之为方程组的**系数矩阵**(coefficient matrix).

一个增广矩阵与一个方程组一一对应. 增广矩阵的一行与一个方程对应. 系数矩阵的行数对应方程组中方程个数，其列数对应方程组未知量个数. 方程组中的初等变换就对应增广矩阵的行之间的相应变换. 利用矩阵记号，可以简化求解线性方程组.

例 1.1.1　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ \qquad\ 2x_2+x_3=7, \\ 2x_1+\ x_2-x_3=1. \end{cases}$$

解 下面分别采用方程组记号与矩阵记号来描述消元过程，并将结果呈现，可以从对照中看到运用矩阵的方便性.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_2+x_3=7 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

保留第一个方程中的 x_1，并且消去其余方程中的 x_1. 注意并不是真正地消去变量 x_1，实质上是把 x_1的系数化为 0. 把第一个方程的 -2 倍加到第三个方程上，将计算结果代替原第三个方程.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_2+x_3=7 \\ 5x_2-3x_3=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

将上述第二个方程的 1 倍加到第一个方程上，第二个方程的 $-\frac{5}{2}$倍加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x_1+2x_3=7 \\ 2x_2+x_3=7 \\ -\frac{11}{2}x_3=-\frac{33}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{33}{2} \end{bmatrix}$$

将上述第三个方程乘以$-\frac{2}{11}$，把 x_3的系数化为 1，得

$$\begin{cases} x_1+2x_3=7 \\ 2x_2+x_3=7 \\ x_3=3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

将上述第三个方程的 -1 倍加到第二个方程上，消去第二个方程中的变量 x_3. 将第三个方程的 -2 倍加到第一个方程上，消去第一个方程中的变量 x_3.

$$\begin{cases} x_1=1 \\ 2x_2=4 \\ x_3=3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

将上述第二个方程乘以$\frac{1}{2}$，把 x_2的系数化为 1. 得方程组的解：

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

定义 1.1.3 我们把作用在增广矩阵上的对应于线性方程组的三种初等变换称为**矩阵的初等行变换**(elementary row operations of matrix)：

(1) 对换变换——交换矩阵的两行.

(2) 数乘变换——将某行全体元素都乘以某一非零常数.

(3) 倍加变换——把某行用该行与另一行的常数倍的和替换，即把另一行的常数倍加到某行上.

初等行变换可以应用于任意矩阵.

定义 1.1.4　两个矩阵如果可以通过一系列的初等行变换进行转化，则称这两个矩阵是**行等价**(row equivalent)的.

需要注意初等行变换是可逆的. 如果两行交换，那么再进行一次交换，它们可以回到原来的位置. 如果一行乘以非零常数 c，那么在得到的新行上乘以 $\frac{1}{c}$ 就还原成原来的行. 最后考虑两行的倍加变换，比如说第一行的 c 倍加到第二行上得到新的第二行，这个变换的逆就是把第一行的 $-c$ 倍加到第二行上，其结果是原来的第二行.

一个方程组经初等变换变为一个新的方程组，这个新方程组经过初等变换可以还原为原方程组. 对应地，一个方程组的增广矩阵通过一系列的初等行变换化为一个新方程组的增广矩阵，这个新增广矩阵可以通过初等行变换化为原来方程组的增广矩阵. 最重要的是，初等行变换前后的方程组的解是相同的.

定理 1.1.1　如果两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，那么这两个线性方程组有相同的解.

§1.2　行化简和阶梯形矩阵　解的存在性与唯一性

在第一节中我们已经看到阶梯形方程组容易求解. 将方程组化为阶梯形，从矩阵角度看就是要将方程组的系数矩阵化为“阶梯形”. 我们首先介绍包括“阶梯形”矩阵在内的两类重要矩阵. 矩阵的非零行或非零列是指至少包含一个非零元素的行或列；行的非零首元或首项元素(leading entry)是指非零行中最左边的非零元素.

定义 1.2.1　如果一个矩阵满足下列两个性质，则称该矩阵具有**阶梯形**(echelon form)，称该矩阵为**阶梯形矩阵**(echelon matrix)：

(1) 所有非零行均在零行之上.

(2) 每一行非零首元所在的列，都在上一行非零首元所在列的右边，即非零首元所在列数随行数增加而严格增加.

如果一个阶梯形矩阵还满足以下条件，则称该矩阵具有**行简化阶梯形式**(reduced echelon form)，称该矩阵为**行最简形矩阵**(reduced echelon matrix)或 Jordan 阶梯形矩阵：

(3) 非零行中的非零首元均为 1.

(4) 每个非零首元 1 在其所处的列中是唯一的非零元素.

使用不同顺序的初等行变换，任意一个非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以化为不同的阶梯形矩阵，

这个阶梯形矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯形. 但是从一个矩阵出发，通过不同顺序的初等行变换化简，得到的行简化阶梯形矩阵是唯一的，从而矩阵有唯一的行最简形.

当矩阵进行初等行变换得到行阶梯形矩阵后，在进一步化简为行最简形的过程中，非零行的非零首元位置没有变换. 根据行最简形的唯一性，在由给定矩阵得到任意阶梯形矩阵的过程中，非零首元位置相同.

定义 1.2.2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯形中非零首元对应的位置称为 $\boldsymbol{A}$ 的主元位置(㊣ *pivot position*)，位于主元位置的元素称为主元(*pivot*)，主元所在列称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个主元列(㊣ *pivot column*㊞)。

我们在求解线性方程组，讨论矩阵代数、行列式、向量空间的过程中，许多基本概念都与矩阵的主元位置有联系.

例 1.2.1 将下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵，进而化为行最简形，并求 $\boldsymbol{A}$ 的主元列.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & -4 & -11 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 \end{bmatrix}$$

解 最左边第一列是非零列，所以(1,1)位置就是第一个主元位置. 对换第一、三行，这是因为第三行的第一个元素是-1，用它可以将第一列的其余非零元化为零，而且不涉及分数运算.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 \end{bmatrix}$$

对上面的矩阵，使用倍加变换将(1,1)位置主元下方的元素都化为零. 第一行的 2 倍加到第二行、第一行的 3 倍加到第四行，分别将第二、第四行的第一个元素化为零.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

这个新矩阵的第二行的主元位置必须尽可能地靠左，所以第二行的主元位于第三列. 选定(2, 3)位置的元 1 为第二行的主元. 用初等行变换把它下方的元素化为零. 将第二行的 3 倍加到第三行、将第二行的-7 倍加到第四行，得

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

选定第三行的主元为(3, 4)位置的元素 1，然后用第三行的 2 倍加到第四行，将主元

下方的元素化为零. 这就得到了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯矩阵.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时该矩阵的主元位置为(1,1),(2,3),(3,4). 我们继续对阶梯形矩阵应用初等行变换，将主元所在列除主元外的元素化为零并将主元化为 1，就得到了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵，同时得到了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主元列是第一、三、四列.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \square & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \square & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \square & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

通过刚才的例子显示，主元是位于主元位置的非零元素. 不同的初等行变换顺序，可生成不同的主元集合. 上例中阶梯形矩阵的主元就是−1，1，1. 主元的作用是可用初等行变换中的倍加变换生成零元.

矩阵的行化简算法　应用初等行变换，化矩阵为阶梯形矩阵(行最简形)的一般步骤如下：

(1) 从矩阵最左边的非零列开始，主元位置在该列的第一行. 如果该位置上的元素是零元，就应用初等行对换变换把该位置元变为非零元，得到一个主元.

(2) 应用初等行变换中的倍加变换将主元下方的元素化为零.

(3) 盖住或者忽略含有主元位置的行和它上面所有的行. 对余下的子矩阵应用第一步到第二步就可得到阶梯矩阵.

(4) 如果要得到行最简形矩阵，在进行第二步时，就应用初等行变换中的倍加变换将主元列中除主元外的所有元素化为零并用数乘变换将主元化为 1.

我们把上述矩阵的行化简算法应用到方程组的增广矩阵上，将直接得出线性方程组是否有解，在有解的情况下，还可得出其解集的显式表示.

例 1.2.2　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 1, \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases}$$

解　首先对增广矩阵用初等行变换化简为阶梯矩阵(或化为行最简形)

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\-1&-1&0&0&1&-1\\-2&-2&0&0&3&1\\0&0&1&1&3&3\\1&1&2&2&4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&0&1&1&2&0\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&-6\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

我们可以看到线性方程组的系数矩阵的主元列数与增广矩阵的主元列数相等，都为3. 从阶梯矩阵及行最简形矩阵可以分别写出对应的等价线性方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\ \qquad\qquad x_3+x_4+2x_5=0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5=3.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1+x_2 \qquad\qquad = 4,\\ \qquad\quad x_3+x_4 \quad =-6,\\ \qquad\qquad\qquad x_5= 3.\end{cases}\tag{1.2.1}$$

从上面的方程组可以解出

$$\begin{cases}x_1=4-x_2,\\x_3=-6-x_4,\\x_5=3.\end{cases}\tag{1.2.2}$$

其中，变量 x_1，x_3，x_5与阶梯矩阵的主元位置对应，称为基本变量(basic variables). 因为在行最简形矩阵中，这三个变量分别只在一个方程中出现，可以将它们解出来，用显式表示. 方程组余下的变量 x_2，x_4称为自由变量(free variables). 称 x_2，x_4为自由变量，是因为我们可以自由地选择它们的值. 一旦选定，方程组(1.2.2)就可以确定 x_1，x_3，x_5的值，从而得到原方程组的一个解. 例如，当取 $x_2=1$，$x_4=-1$，从(1.2.2)可以解得 $x_1=3$，$x_3=-5$，$x_5=3$，原方程组的一个解为 $x_1=3$，$x_2=1$，$x_3=-5$，$x_4=-1$，$x_5=3$. 方程组(1.2.2)中的解称为原方程组的通解，因为它给出了所有解的显式表示.

在这个例题里，必须注意到，自由变量的出现，是因为线性方程组的主元列数(主元列数就是基本变量的个数)少于总的未知量个数. 主元列数为3，总的未知量个数为5，所以剩下的两个未知量就自然地成为了自由变量. 自由变量的个数等于总未知量个数减去基本变量个数，也就是等于总未知量个数减去主元列数的差值.

通解(1.2.2)中的表示是解集的参数表示，自由变量作为参数出现. 求解一个方程组就相当于找到解集的参数表示或者空集. 在方程组有解时，且有自由变量，则解集就可以有多种参数表示. 如在(1.2.1)中，我们可以把 x_1，x_3当作参数变量，求出用 x_1，x_3表示的 x_2，x_4，x_5. 我们也可以得到方程组通解的显式表达 $x_2=4-x_1$，$x_4=-6-x_3$，$x_5=3$. 方程组无解时，解集没有参数表示.

例 1.2.3 求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\-x_1-x_2+x_5=-1,\\-2x_1-2x_2+2x_5=1,\\x_3+x_4+3x_5=3,\\x_1+x_2+2x_3+2x_4+4x_5=4.\end{cases}$$

解　首先对增广矩阵用初等行变换化简为阶梯矩阵(或化为行最简形)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从阶梯矩阵写出对应的等价线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_5=3, \\ 0=3. \end{cases}$$

其中出现了一个矛盾方程 $0=3$，对任意的变量取值，都不可能满足这个方程，所以原方程组无解. 这个现象也反映出系数矩阵的主元列数与增广矩阵的主元列数不等，系数矩阵的主元列比增广矩阵的主元列少 1.

类似于例 1.2.2 和例 1.2.3，对任意一个线性方程组，运用初等行变换将其增广矩阵化为阶梯形(行最简形)，再写出对应的等价方程组，依据等价方程组是否没有包含矛盾方程，可以判断方程组有无解. 我们可以得到下面的定理.

定理 1.2.1　一个线性方程组有解当且仅当增广矩阵的最右边一列不为主元列，即当且仅当增广矩阵的阶梯形式没有如下形式的行：

$$[0 \ \cdots \ 0 \ b],$$

其中 b 不为零.

在线性方程组有解时，如果没有自由变量，则方程组有唯一解；如果至少有一个自由变量，则方程组有无穷多解.

我们利用系数矩阵与增广矩阵的主元列数，可以将上面的定理重新叙述如下：

定理 1.2.2　一个线性方程组有解当且仅当系数矩阵与增广矩阵有相同的主元列数. 在线性方程组有解时，如果主元列数等于未知量个数，则方程组有唯一解；如果主元列数少于未知量个数，则方程组有无穷多解.

推论 1.2.1　齐次线性方程组一定有解. $m\times n$ 的齐次线性方程组只有零解当且仅当其系数矩阵的主元列数等于未知量个数 n. $m\times n$ 的齐次线性方程组有非零解当且仅当其系数矩阵的主元列数小于未知量个数 n.

推论 1.2.2　若 $m<n$，则 $m\times n$ 的齐次线性方程组有非零解.

下面的步骤概括了如何求出并表示线性方程组的所有解.

使用初等行变换求解线性方程组的步骤如下：

(1) 写出方程组的增广矩阵.

(2) 使用初等行变换法得到等价的阶梯矩阵. 判定方程组是否有解. 如果无解，则停止；否则，进行下一步.

(3) 继续进行初等行变换化简，得到行最简形.

(4) 写出行最简形矩阵对应的线性方程组.

(5) 改写第四步得到的每个非零方程，将其中的基本变量显式表示出来，得到方程组的解.

我们将在第 4 章向量空间中继续揭示方程组有无解的判定，以及方程组有无穷多解时解的结构.

* §1.3 线性方程组的应用

§1.3.1 经济学中的线性方程组

假设一个经济系统的经济分为很多行业，例如制造业、服务行业、通信业和娱乐行业等，一个经济实体的经济分为很多部门. 我们知道每个部门一年的总产出，并准确了解其产出如何在经济的其他部门之间分配或交易. 把一个部门产出的总货币价值称为该产出的价格. 诺贝尔奖获得者——经济学家列昂惕夫(Wassily Leontief)[1]教授对投入产出模型证明了下面的结论：

存在赋给各部门总产出的平衡价格，使得每个部门的投入与产出都相等.

下面的例题说明如何求平衡价格.

例 1.3.1 商品交换的经济模型.

假设一个原始社会的部落中，人们从事三种职业：农业生产、工具和器皿的手工制作、缝制衣物. 最初，假设部落中不存在货币制度，所有的商品和服务均进行实物交换. 我们记这三类人为 F，M，C，假设农民 F 留他们收成的一半给自己、$\frac{1}{4}$ 收成给手工业者、$\frac{1}{4}$收成给制衣工人. 手工业者将他们的产品平均分成三份，每一类成员得到$\frac{1}{3}$. 制衣工人将一半的衣物给农民，并将剩余的一半平均分给手工业者和他们自己. 综上所述，可得如下表格：

	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

该表格的第一列表示农民生产产品的分配，第二列表示手工业者生产产品的分配，

① Wassily W Leontief. Input-Output Economics[J]. Scientific American, 1987(10): 15—21.

第三列表示制衣工人生产产品的分配.

当部落规模增大时，实物交易系统就变得非常复杂，因此，部落决定使用货币系统. 对这个简单的经济体系，我们假设没有资本的积累和债务，并且每一种产品的价格均可以反映实物交换系统中产品的价值. 问题是，如何给三种产品定价，就可以公平地体现当前的实物交易系统.

解　这个问题可以利用经济学家列昂惕夫提出的经济模型转化为线性方程组. 对这个模型，我们令 x_1 为所有农产品的价值，x_2 为所有手工业产品的价值，x_3 为所有服装的价值. 由表格的第一行，农民获得的产品价值是所有农产品价值的$\frac{1}{2}$，加上$\frac{1}{3}$的手工业产品的价值，再加上$\frac{1}{2}$的服装价值. 因此，农民总共得到的产品价值为

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3=x_1.$$

利用表格的第二行，将手工业者得到和制造的产品价值写成方程，我们得到第二个方程

$$\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=x_2.$$

最后利用表格的第三行，我们得到

$$\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=x_3.$$

这些方程可写成齐次方程组：

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3=0,\\ \frac{1}{4}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=0,\\ \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{3}{4}x_3=0.\end{cases}$$

该方程组对应的增广矩阵的行最简形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

它有一个自由变量 x_3. 令 $x_3=3$，我们得到解(5，3，3)，并且通解包含所有(5，3，3)的倍数. 由此可得，变量应按下列的比例取值：

$$x_1:x_2:x_3=5:3:3.$$

这个简单的系统是封闭的列昂惕夫生产—消费模型的例子. 列昂惕夫模型是我们理解经济体系的基础. 现代应用则会包含成千上万的经济实体，并得到一个非常庞大的线性方程组.

例 1.3.2　假设一个城镇有三个主要生产企业:煤矿、电厂、钢铁公司组成它的经济系统，每个行业的产出在各个行业中的分配如下表所示，每一列中的元素表示占该行业总产出的比例.

一个简单的经济系统

产出分配			购买者
煤矿	电厂	钢铁公司	
0.0	0.4	0.6	煤矿
0.6	0.1	0.2	电厂
0.4	0.5	0.2	钢铁公司

以第三列为例，钢铁公司的总产出分配如下：60% 分配到煤矿，20% 分配到电厂，余下 20% 分配到钢铁公司(钢铁公司把这 20% 当做部门运营所需的投入). 因考虑了所有的产出，所以每一列的小数加起来必须等于 1.

把煤矿、电厂、钢铁公司每年总产出的价格(即货币价值)分别用 p_C，p_E 和 p_S 表示. 试求使得每个行业的投入与产出都相等的平衡价格.

解 沿列可以看出每个行业的产出分配到何处，沿行则可以看出这个行业的所需的投入. 例如，第一行说明煤矿接收(购买)了 40% 的电厂产出和 60% 的钢铁公司产出，由于电厂和钢铁公司的总产出价格分别是 p_E，p_S，因此煤矿必须分别向电厂和钢铁公司支付 $0.4p_E$ 和 $0.6p_S$元. 煤矿的总支出为 $0.4p_E+0.6p_S$. 为了使煤矿的收入 p_C 等于它的支出，所以

$$p_C=0.4p_E+0.6p_S.$$

交易表格的第二行说明了电厂分别要向煤矿、电厂、钢铁公司各部门支付 $0.6p_C$，$0.1p_E$，$0.2p_S$. 因此电厂的收支平衡条件是

$$p_E=0.6p_C+0.1p_E+0.2p_S.$$

交易表格的第三行导出了最后一个收支平衡条件

$$p_S=0.4p_C+0.5p_E+0.2p_S.$$

综合上面三个方程得到一个线性方程组：

$$\begin{cases} p_C-0.4p_E-0.6p_S=0, \\ -0.6p_C+0.9p_E-0.2p_S=0, \\ -0.4p_C-0.5p_E+0.8p_S=0. \end{cases}$$

用初等行变换将增广矩阵化为行最简形(为简单起见，保留两位小数)，即

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

写出方程组的通解：$p_C=0.94p_S$，$p_E=0.85p_S$，其中 p_S为自由变量. 每个 p_S的取值都确定一个平衡价格的取值. 如果我们取 p_S 为 100 万元，则 $p_C=94$ 万元，$p_E=85$ 万元. 换句话说，如果煤矿产出价格为 94 万元，则电厂产出价格为 85 万元，钢铁公司产出价格为 100 万元，那么每个行业的收入和支出相等.