微积分学习指导与习题解析

■ 主　编　郭求知
■ 副主编　赵梅春　宁光荣　李　芳　张少艳

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

微积分学习指导与习题解析

■ 主　编　郭求知

■ 副主编　赵梅春　宁光荣　李　芳　张少艳

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与习题解析/郭求知主编;赵梅春,宁光荣,李芳,张少艳副主编. —武汉: 武汉大学出版社,2014. 2
ISBN 978-7-307-12472-1

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①郭… ②赵… ③宁… ④李… ⑤张… Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 313284 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:韩闻锦

出版发行: 武汉大学出版社　(430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)
印刷: 湖北恒泰印务有限公司
开本:720×1000 1/16 印张:17.5 字数:328 千字 插页:1
版次: 2014 年 2 月第 1 版　2014 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-12472-1　定价:32.00 元

前　　言

本书是与章学诚、刘西垣编著的《微积分》(武汉大学出版社出版)相配套的学习指导书，主要面向使用该教材的学生和教师，也可作为经管类专业本科生“微积分”课程的学习指导书或经管类研究生入学考试的复习用书。

现阶段，我国高等教育日益大众化，“微积分”教与学中存在的问题也越来越受到广大师生关注。因此，我们在编写这本指导书的过程中，立足于“微积分”的基础知识和基础解题训练，在此基础上，提供了一些有拓展性的典型例题和训练题，并归纳总结了各章中出现的历年经管类研究生入学考试试题，期望能满足经管类学生学习“微积分”的需求，也期望能对提高“微积分”的教学质量、对学生掌握“微积分”的教学基本要求起到一定的辅助作用。

本书按《微积分》(章学诚、刘西垣编著，武汉大学出版社出版)的章节顺序编排，为了读者使用的方便，也为了满足部分未使用该教材的经管类学生的需要，编写时注意到使这本书具有相对的独立性。

本书每章内容具体包含：一、本章知识点精要和教学要求；二、典型例题；三、习题解答(提供了《微积分》教材全部课后练习的详细解答，并对教材课后习题进行了分层处理，将教材课后习题分为三类：必做题、选做题、推荐题，其中必做题是学生必须独立完成的作业题，选做题是学生课余必须完成的课外练习，推荐题是给学有余力的学生提供的拓展练习)；四、历年经管类研究生入学考试数学试题本章精选；五、本章基础知识训练题；六、基础知识训练题参考答案。

本书由郭求知担任主编，赵梅春、宁光荣、李芳、张少艳担任副主编。各章的具体编写情况是：郭求知(第一、二、六章)、张玉珍(第三章)、李芳(第四章)、宁光荣(第五、八章)、何胜美(第六章)、张少艳(第七章)、赵梅春(第五、九章)、王芬(第十章)。全书由郭求知统稿。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者

2013 年 11 月

目　　录

第一章　函数及其图形

一、本章基本要求

1. 理解邻域的基本概念和性质.
2. 理解函数的有界性.
3. 理解复合函数的概念，会正确分析复合函数的复合过程和分解过程.
4. 熟悉基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

二、典 型 例 题

1. 典型题一 —— 有界函数

例 1　函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\le 1$.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内是无界的，在 $[1,+\infty)$ 内是有界的.

例 2　证明：$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证　因为

$$\begin{aligned}|f(x)|=\left|\frac{x^2+1}{x^4+1}\right|&\le\frac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\frac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\frac{2x^2}{x^4+1}\\&\le 1+1=2,\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

2. 典型题二 —— 复合函数

例 3 把下列复合函数分解为基本初等函数或有理函数：

(1) $y=\arccos\ln x$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}$；

(3) $y=\sin\ln^{3}(x+1)$.

解 (1) $y=\arccos u,\ u=\ln x$.

(2) $y=\mathrm{e}^{u},\ u=\sin v,\ v=\sqrt{x}$.

(3) $y=\sin u,\ u=v^{3},\ v=\ln t,\ t=x+1$.

说明：将复合函数分解成基本初等函数或有理函数的方法是：从复合函数外层到里层逐层引入中间变量.

三、习 题 解 答

（必做题和推荐题在题中已标注，其余未标注的为选做题）

1. 解下列不等式，并用区间表示不等式的解集：

1) $|x-4|<7$；　　2) $1\le|x-2|<3$；

3) $|x-a|<\varepsilon\ \ (\varepsilon>0)$；　　4) $|ax-x_0|<\delta\ \ (a,\delta>0)$；

5) $x^2-x-6>0$；　　6) $x^2+x-2\le 0$.

解 1) 由题意去掉绝对值符号得 $-7<x-4<7$，解得 $-3<x<11$，即解集为 $(-3,11)$.

2) 由题意去掉绝对值符号得 $-3<x-2\le-1$ 或 $1\le x-2<3$，解得 $-1<x\le1$ 或 $3\le x<5$，即解集为 $(-1,1]\cup[3,5)$.

3) 由题意去掉绝对值符号得 $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$，解得 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$，即解集为 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

4) 由题意去掉绝对值符号得 $-\delta<ax-x_0<\delta$，解得 $\dfrac{x_0-\delta}{a}<x<\dfrac{x_0+\delta}{a}$，即解集为 $\left(\dfrac{x_0-\delta}{a},\dfrac{x_0+\delta}{a}\right)$.

5) 由题意原不等式可化为 $(x-3)(x+2)>0$，解得 $x>3$ 或 $x<-2$，即解集为 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

6) 由题意原不等式可化为 $(x+2)(x-1)\le0$，解得 $-2\le x\le1$，即解集为 $[-2,1]$.

2．判断下列各对函数是否相同，并说明理由：

1）$y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$；　　2）$y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $\sqrt{2}\cos x$；

3）$y=\arcsin(\sin x)$ 与 $y=x$；　　4）$y=\tan(\arctan x)$ 与 $y=x$；

5）$y=\lg(x^2-1)$ 与 $y=\lg(x+1)+\lg(x-1)$；

6）$y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 与 $x=\lg(1-x)-\lg(1+x)$．

解　1）不同，因前者的定义域为 $\mathbf{R}$，后者的定义域为 $(0,+\infty)$．

2）不同，因为当 $x\in\bigcup\limits_{-\infty<k<+\infty}\left(\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,\left(2k+\dfrac{3}{2}\right)\pi\right)$ 时，$\sqrt{1+\cos 2x}>0$，而 $\sqrt{2}\cos x<0$．

3）不同，因为只有在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上两函数才相同.

4）相同.

5）不同，因前者的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，后者的定义域为 $(1,+\infty)$．

6）相同.

3. 求下列函数的定义域（用区间表示）：

1）(必做题) $y=\dfrac{\lg(4-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；　　2）$y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

3）(必做题) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；　　4）$y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$；

5）$y=\sqrt{x^2-4x+3}$；　　6）$y=3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-\dfrac{1}{1-\lg x}$；

7）$y=2^{\frac{1}{x}}+\arccos\lg\sqrt{1-x}$；　　8）$y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$．

解　1）原函数若有意义则必须满足 $|x|-1>0$ 和 $4-x>0$，解得 $x<-1$ 或 $1<x<4$，即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,4)$．

2）原函数若有意义则必须满足 $\dfrac{5x-x^2}{4}>0$ 且 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 0$，解得 $1\leq x\leq 4$，即定义域为 $[1,4]$.

3）原函数若有意义则必须满足 $\dfrac{1-x}{1+x}\geq 0$，解得 $-1<x\leq 1$，即定义域为 $(-1,1]$．

4）原函数若有意义则必须满足 $\begin{cases}x-2\geq 0,\\x-3\neq 0,\\5-x>0,\end{cases}$ 解得 $2\leq x<3$ 或 $3<x<5$，即

定义域为 $[2,3)\cup(3,5)$.

5) 原函数若有意义则必须满足 $x^2-4x+3\geq 0$，即 $(x-3)(x-1)\geq 0$，解得 $x\leq 1$ 或 $x\geq 3$，即定义域为 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

6) 原函数若有意义则必须满足 $\begin{cases} x>0, \\ 1-\lg x\neq 0, \end{cases}$ 解得 $0<x<10$ 或 $x>10$，即定义域为 $(0,10)\cup(10,+\infty)$.

7) 原函数若有意义则必须满足 $\begin{cases} x\neq 0, \\ 1-x>0, \\ \left|\lg\sqrt{1-x}\right|\leq 1, \end{cases}$ 解得 $1-10^2\leq x<0$ 或 $0<x\leq 1-10^{-2}$，即定义域为 $[1-10^2,0)\cup(0,1-10^{-2}]$.

8) 原函数若有意义则必须满足 $x^2-x-6>0$ 且 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leq 1$，解得 $-3\leq x<-2$ 或 $3<x\leq 4$，即定义域为 $[-3,-2)\cup(3,4]$.

4. 求下列分段函数的定义域及指定的函数值，并画出它们的图形：

1) $y=\begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & |x|<3, \\ x^2-1, & 3\leq|x|<4, \end{cases}$ 求 $y(0), y(3)$；

2) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0, \\ x-3, & 0\leq x\leq 1, \\ -2x+1, & 1<x<+\infty, \end{cases}$ 求 $y(-3), y(0), y(5)$.

解 1) 原函数的定义域为 $(-4,4)$，$y(0)=3$，$y(3)=8$．图略.

2) 原函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y(-3)=-\dfrac{1}{3}$, $y(0)=-3$, $y(5)=-9$. 图略.

5. 利用 $y=\sin x$ 的图形，画出下列函数的图形：

1) $y=\sin x+1$；　2) $y=2\sin x$；　3) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

解 1) $y=\sin x$ 的图形如图 1-1 所示． $y=\sin x+1$ 的图形是将 $y=\sin x$ 的图形沿 y 轴向上平移 1 个单位，如图 1-2 所示.

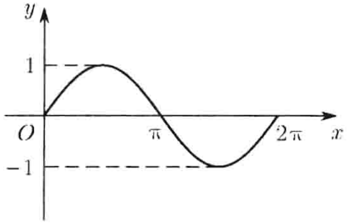

图 1-1

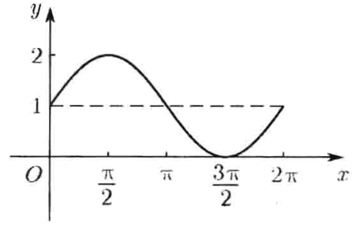

图 1-2

2） $y = 2\sin x$ 是将 $y = \sin x$ 的值域扩大 2 倍，如图 1-3 所示.

3） $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 是将 $y = \sin x$ 向左移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单值，如图 1-4 所示.

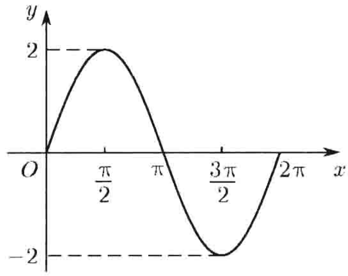

图 1-3

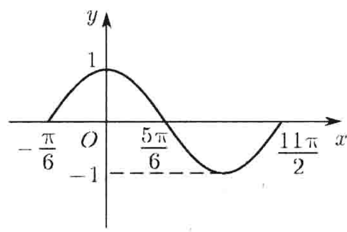

图 1-4

6.(必做题) 在下列区间中，函数 $f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 有界的是(　　).

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

解　$f(x)$ 是基本初等函数的组合，在其定义域内是连续的. 若要使 $f(x)$ 有界，则在其端点处极限值存在.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-\sin 3}{2\times 9} = -\frac{1}{18}\sin 3\,,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{1}{4}\sin 2\,,$$

故选 A.

7.(必做题) 下列区间中，函数 $y = |x^2 - 1|$ 为有界且单调减少的是(　　).

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(-2,-1)$　　D. $(-3,0)$

解　选 C. 可画出函数图像判断，图略.

8. 指出下列函数单调增加和单调减少的区间：

1） $y = \sqrt{4x - x^2}$；　　2） $y = x^5 + 2$；

3） $y = x + \log_2 x$；　　4） $y = 1 - 3x^2$.

解　1） 在 $[0,2]$ 上单调增加，在 $[2,4]$ 上单调减少.

2） 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

3） 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

4） 在 $(-\infty,0]$ 上单调增加，在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

9. 设 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少，a,b 是任意正数，则有(　　).

A. $f(a+b) < f(a) + f(b)$　　B. $f(a+b) < \dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}$

C. $f(a+b)>f(a)+f(b)$　　　　D. $f(a+b)>\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}$

解　选 A. 由于 $\dfrac{f(a+b)}{a+b}<\dfrac{f(a)}{a}$, $\dfrac{f(a+b)}{a+b}<\dfrac{f(b)}{b}$，设 $a\le b$，则

$$2\frac{f(a+b)}{a+b}<\frac{f(a)}{a}+\frac{f(b)}{a}，即 2f(a+b)<\frac{a+b}{a}\big(f(a)+f(b)\big).$$

又 $\dfrac{a+b}{a}>2$，所以 $f(a+b)<f(a)+f(b)$.

10. 指出下列函数的奇偶性：

1) $\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$；　　　　2) $x\sqrt{x^4-1}+\tan x$；

3) $\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$；　　　　4) $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$；

5) $\cos\lg x$；　　　　6) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 1+x, & x\ge 0.\end{cases}$

解　1) 是偶函数，因为

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}+\cos(-x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x=f(x).$$

2) 是奇函数，因为

$$f(-x)=-x\sqrt{x^4-1}+\tan(-x)=-(x\sqrt{x^4-1}+\tan x)=-f(x).$$

3) 是奇函数，因为

$$f(-x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-f(x).$$

4) 是奇函数，因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{a^{-x}-a^x}=-f(x)$.

5) 是非奇非偶函数，因为 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称.

6) 是偶函数，因为 $f(-x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 1+x, & x\ge 0\end{cases}=f(x)$.

11. 判别下列函数是否周期函数，若是，则求出其周期：

1) $\sin^2 x$；　　　　2) $3-|\sin 4x|$；

3) $x\cos x$；　　　　4) $2\cos\dfrac{x}{2}-3\sin\dfrac{x}{3}$.

解　1) 是周期函数. 因为 $\sin^2(x+\pi)=\sin^2 x$，所以周期 $T=\pi$.

2) 是周期函数. 因为 $3-\left|\sin 4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=3-|\sin 4x|$，所以周期 $T=\dfrac{\pi}{4}$.

3) 不是周期函数.

4) 是周期函数. 因为 $\cos\frac{x}{2}$ 的周期为 4π，而 $\sin\frac{x}{3}$ 的周期为 6π，所以函数 $2\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{3}$ 的周期为 12π.

12. 证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调增加，并由此证明：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

证　由于 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$，在 $(-\infty,-1)$ 上，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调增加；在 $(-1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调增加.

因为 $|a+b|\le|a|+|b|$，且 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调增加，所以 $f(|a+b|)\le f(|a|+|b|)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

13. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，$f(x)\ne 0,1$，且对任意实数 x_1,x_2 有 $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$. 求 $f(1),f(-1),f(0)$，并讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性.

解　由 $f(1\cdot x_2)=f(1)f(x_2)$ 得 $f(1)=1$. 由 $f(0\cdot x_2)=f(0)f(x_2)$ 得 $f(0)=0$. 而 $f(-1)f(-1)=f(1)=1$，所以 $f(-1)=\pm1$.

若 $f(-1)=1$，则由 $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$，有 $f(-x)=f(-1)f(x)=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

若 $f(-1)=-1$，则由 $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$，有 $f(-x)=f(-1)f(x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

14. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为周期函数，$f(x)$ 的周期为 2，$g(x)$ 的周期为 3. 问：$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 是否周期函数？若是，求出它们的周期.

解　$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 都是周期函数，周期都是 6.

15. 求下列函数的反函数及其定义域：

1) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$，$x\ne1$；　　2) $y=x^3+7$，$x\in\mathbf{R}$；

3) $y=\lg(1-2x),\ \ x<0$;　　　　4) $y=\sqrt{25-x^2},\ \ 0<x<5$；

5) $y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^2, & x\geq 0;\end{cases}$　　　　6) $y=\begin{cases}2x-1, & 0<x\leq 1,\\ 2-(x-2)^2, & 1<x\leq 2.\end{cases}$

解 1) 由 $y(x-1)=x+3\ (x\neq 1)$，得 $x(1-y)=-y-3$，所以

$$x=\frac{y+3}{y-1},\quad y\neq 1.$$

2) 由 $y=x^3+7,\ x\in\mathbf{R}$，得 $x=\sqrt[3]{y-7},\ y\in\mathbf{R}$.

3) 由 $y=\lg(1-2x),\ x<0$，得 $10^y=1-2x$，故 $x=\dfrac{1}{2}(1-10^y),\ y>0$.

4) 由 $y=\sqrt{25-x^2},\ 0<x<5$，得 $y^2=25-x^2$，故

$$x=\sqrt{25-y^2},\quad 0<y<5.$$

5) 由 $y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^2, & x\geq 0,\end{cases}$ 得 $x=\begin{cases}y+1, & y<-1,\\ \sqrt{y}, & y\geq 0.\end{cases}$

6) 由 $y=\begin{cases}2x-1, & 0<x\leq 1,\\ 2-(x-2)^2, & 1<x\leq 2,\end{cases}$ 得 $x=\begin{cases}\dfrac{y+1}{2}, & -1<y\leq 1,\\ 2-\sqrt{2-y}, & 1<y\leq 2.\end{cases}$

16. 设函数 $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 与 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，求 $g(x)$.

解 因为函数 $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 与 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，所以 $g(x)$ 是 $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 的反函数，所以

$$g(x)=f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x+3}\quad(x\neq -3).$$

17. 设 $y=f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调奇函数. 问：其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是否单调奇函数，何故？

解 因为 $f(x)$ 与其反函数 $f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称，所以，当 $f(x)$ 单调增加时 $f^{-1}(x)$ 也单增，同理 $f(x)$ 单减时，$f^{-1}(x)$ 也单减，所以 $f^{-1}(x)$ 是单调函数. 同时，由反函数定义式及图形可证明 $y=f^{-1}(x)$ 也是奇函数.

18. 求由下列函数复合而成的复合函数：

1) $y=\lg u,\ \ u=v^2+1,\ \ v=\sec x$；

2) $y=\cos u,\ \ u=\sqrt{v},\ \ v=2x+1$.

解 1) $y=\lg(\sec^2 x+1)$.

2） $y=\cos\sqrt{2x+1}$.

19. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 如下，求 $f\big(g(x)\big)$ 和 $g\big(f(x)\big)$：

1） $f(x)=x^2,\ \ g(x)=2^x$ ；

2） $f(x)=\lg x+1,\ \ g(x)=\sqrt{x}+1$.

解　1） $f\big(g(x)\big)=(2^x)^2=4^x$ ； $g\big(f(x)\big)=2^{x^2}$.

2） $f\big(g(x)\big)=\lg(\sqrt{x}+1)+1,\ x\geq 0$ ； $g\big(f(x)\big)=\sqrt{\lg x+1}+1$.

20.(必做题) 将下列函数分解成基本初等函数的复合：

1） $y=\lg\tan^2 x$ ；　　2） $y=\arcsin a^{\sqrt{x}}$ ；

3） $y=2^{\sqrt{\cos x^2}}$ ；　　4） $y=\lg^2\arctan x^3$.

解　1） $y=\lg u,\ \ u=v^2,\ \ v=\tan x$.

2） $y=\arcsin u,\ \ u=a^v,\ \ v=\sqrt{x}$.

3） $y=2^u,\ \ u=\sqrt{v},\ \ v=\cos w,\ \ w=x^2$.

4） $y=u^2,\ \ u=\lg v,\ \ v=\arctan w,\ \ w=x^3$.

21.(推荐题) 在下列函数对 $y=f(u),\ u=g(x)$ 中，哪些可复合成 $f\big(g(x)\big)$，其定义域为何？

1） $f(u)=\sqrt{u},\ \ g(x)=\lg\dfrac{1}{2+x^2}$ ；　　2） $f(u)=\lg(1-u),\ \ g(x)=\sin x$ ；

3） $f(u)=\arccos u,\ \ g(x)=\lg x$ ；　　4） $f(u)=\arcsin u,\ \ g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

解　1） 令 $u=g(x)$，则 $u=\lg\dfrac{1}{2+x^2}<0$，所以 $f(u)=\sqrt{u}$ 无意义.

2） $f\big(g(x)\big)=\lg(1-\sin x)$，因为 $1-\sin x\neq 0$，所以 $x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$.

3） $f\big(g(x)\big)=\arccos(\lg x)$， $-1\leq\lg x\leq 1\Rightarrow 10^{-1}\leq x\leq 10$.

4） $f\big(g(x)\big)=\arcsin\dfrac{x}{1+x^2}$， $-1\leq\dfrac{x}{1+x^2}\leq 1\Rightarrow x\in\mathbf{R}$.

22. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f\big(f(x)\big)$ 和 $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

解　$$f\big(f(x)\big)=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}\quad\left(x\neq 1,\ x\neq\frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}\quad \left(x\neq 1,\ x\neq \frac{1}{2},\ x\neq \frac{1}{3}\right).$$

23. 设 $g(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 2,\end{cases}$ 求 $g(x)$.

解 设 $u=x+1$，则 $x=u-1$，所以 $g(x+1)=g(u)$.

当 $0\le x\le 1$ 时，$g(u)=(u-1)^2$，$1\le u\le 2$.

当 $1<x\le 2$ 时，$g(u)=2(u-1)$，$2<u\le 3$.

所以 $g(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\le x\le 2,\\ 2(x-1), & 2<x\le 3.\end{cases}$

24.(推荐题) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\ge 0,\\ 1-x^2, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(x)+f(-x)$.

解 当 $x>0$ 时，$f(x)+f(-x)=(x^2-1)+1-(-x)^2=0$.

当 $x<0$ 时，$f(x)+f(-x)=1-x^2+(-x)^2-1=0$.

当 $x=0$ 时，$f(x)+f(-x)=-2$.

所以 $f(x)+f(-x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ -2, & x=0.\end{cases}$

25.(推荐题) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 3,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le 2,\end{cases}$ 求 $f(x)+g(x)$.

解 $f(x)+g(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2.\end{cases}$

26. 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x\ (x\neq 0,1)$，求 $f(x)$.

解 由于

$$\begin{aligned}f(x)&=2x-f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x-\left(2\cdot\frac{x-1}{x}-f\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\\&=2x-2+\frac{2}{x}+\left(2\cdot\frac{1}{1-x}-f(x)\right)\\&=2x-2+\frac{2}{x}+\frac{2}{1-x}-f(x),\end{aligned}$$