

数学分析教程

Mathematics 下册

宋国柱 任福贤 编 著



南京大学出版社

Mathematics

数学分析教程

下册

宋国柱 任福贤 编 著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程. 下册 / 宋国柱, 任福贤编著. — 2
版. — 南京: 南京大学出版社, 2013. 11
ISBN 978-7-305-12232-3

I. ①数… II. ①宋… ②任… III. ①数学分析—高
等学校—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 228052 号



出版发行 南京大学出版社
社 址 南京明瓦路 22 号 邮 编 210093
网 址 <http://www.NjupCo.com>
出 版 人 左 健

书 名 数学分析教程(下册)

编 著 宋国柱 任福贤

责任编辑 孙 静 吴 华 编辑热线 025-83596997

照 排 江苏南大印刷厂

印 刷 丹阳市兴华印刷厂

开 本 880×1230 1/32 印张 16.625 字数 417 千

版 次 2013 年 11 月第 2 版 2013 年 11 月第 1 次印刷

印 数 1~2 000

ISBN 978-7-305-12232-3

定 价 34.00 元

发行热线 025-83594756 83686452

电子邮箱 Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

编者的话

《数学分析教程》第一版在南京大学数学系连续使用了近二十年. 本书第二版我们对全书作了详细修订. 考虑到本教材是为数学系各专业编写的基础课教材, 在修订过程中, 编者力求做到:

使读者获得广博而坚实的分析基础. 为此, 不但对数列的极限、实数系的基本定理、函数的一致连续性、欧几里得空间的基本性质、向量值函数、函数项级数和含参变量积分、一致收敛性等部分作了适当的加强, 而且还增加了连续性的拓扑学定义、上下连续和霍尔德连续以及凸函数的性质. 此外, 在第 18 章增加了围变函数和 RS 积分的内容, 这不但使得傅里叶级数的某些定理叙述得更为完美, 证明更为简单, 而且还为实变函数论中的 LS 积分打下了基础. 在第 6 章增加了一节“简单的微分方程”, 这既可以增加不定积分的训练, 又可以使后续的常微分方程课得以删去过于简单的内容.

对各种概念的叙述准确严谨, 全书的论证严密, 具有科学性、逻辑性. 例如, 在极限理论中一开始就给出了极限的严格定义, 并由此展开数学分析的全部内容. 极限及连续性的理论都一次完成, 而不采用一度流行过的先方法后理论的两步走方案. 在阐述定积分概念时, 特别强调指出定积分这一极限过程与函数的极限、数列的极限以及级数求和的不同, 并指出在可积性确认以后又可把积分和的极限看成数列的极限. 在论证由方程组所定义的隐函数时, 增加了关于唯一性的几行文字, 避免了不少教材普遍存在的一个疏漏.

加强传统的分析技巧的训练. 为此, 选择了大量具有启发性、典型性的例题, 并注意一题多解, 前后呼应. 其次, 精心选择了一整套习

题,安排在每节后面的是理解概念掌握基本方法所必备的,其中虽也有些较为困难,但为数不多.每章后面的总习题,大部分都有一定的难度,需要适当的技巧.它要求读者融会贯通所学到的数学分析知识,有时还涉及平行学科的有关内容,这些题目在类型上既有广泛性又有代表性,对于立志报考硕士生的读者是有所裨益的.

有广泛的适应性,易教易学.在证明比较困难的定理时,往往先进行适当的分析,以诱导读者的思路.对于较难的例题,在给出解法的同时,指出思想方法,讲清来龙去脉.对于容易模糊的概念,反复强调,不厌其烦.全部习题,书末都附有答案,难题还给出提示.

所有这一切,都是编者所着意追求的,但由于水平所限,力不从心之处在所难免,热切希望得到同行以及广大读者的批评指正.

还需着重指出的是,本书对于实数理论的处理,采用的是逻辑学的方法,这与当前全国流行的种种教材完全不同.编者认为,这对于读者在后继课中理解函数空间的扩张是有好处的.

考虑到当今中学的教材内容,本书不再专门叙述函数概念以及集合的基础知识,这无论对于使用本书的学生、教师,还是用本书来自学的读者都不会产生不便.

全书共 19 章,240 学时可以讲完,对部分要求较低的读者以及学时不够充裕的教师,实数理论、上下连续、霍尔德连续、RS 积分以及微分形式及其积分等内容可部分删去,这不会给整个教学过程带来困难.

本书是编者长期从事数学分析教学工作的结晶.第 1~5 章、第 6~9 章分别由许绍溥、姜东平执笔,第 10~16 章以及第 17 章 17.1~17.4 由宋国柱执笔,第 18~19 章以及第 17 章 17.5 由任福贤执笔.

本书第二版的出版与发行得到了南京大学出版社的大力支持,编者谨此一并表示衷心的感谢.

目 录

第 10 章 数 项 级 数

10.1	级数的敛散性及其性质	1
	习题	6
10.2	正项级数敛散性	7
10.2.1	比较判别法	8
10.2.2	根值判别法 · 比值判别法	14
10.2.3	柯西积分判别法	18
10.2.4	拉贝判别法 · 高斯判别法	20
	习题	29
10.3	任意项级数敛散性	32
10.3.1	绝对收敛定理 · 交错级数收敛判别法	32
10.3.2	阿贝尔判别法 · 狄利克雷判别法	36
	习题	42
10.4	绝对收敛级数的性质	43
10.4.1	绝对收敛级数的可交换性	43
10.4.2	级数的乘法	48
	习题	53
* 10.5	二重级数 · 无穷乘积	54
10.5.1	二重级数	54
10.5.2	无穷乘积	59
	习题	63
第 10 章	总习题	64

第 11 章 函数序列和函数项级数

11.1	函数序列和函数项级数的一致收敛性	68
11.1.1	一致收敛性 · 函数空间	69
11.1.2	函数项级数的一致收敛性判别法	78
	习题	83
11.2	一致收敛函数序列与函数项级数的性质	85
	习题	97
11.3	幂级数	98
11.3.1	幂级数的收敛半径	99
11.3.2	幂级数的性质	103
	习题	108
11.4	初等函数的幂级数展开	109
11.4.1	泰勒级数 · 初等函数的幂级数展开	109
11.4.2	幂级数的应用	120
	习题	125
第 11 章总习题		126

第 12 章 反常积分

12.1	两类反常积分的定义和性质	131
	习题	141
12.2	反常积分收敛判别法	142
12.2.1	非负函数比较判别法 · 绝对收敛定理	142
12.2.2	阿贝尔判别法 · 狄利克雷判别法	145
	习题	149
12.3	反常积分的变数变换及计算	150
	习题	156

第 12 章总习题	157
-----------------	-----

第 13 章 含参变量积分

13.1 含参变量的正常积分	160
习题	169
13.2 含参变量的反常积分	170
13.2.1 一致收敛性及其判别法	171
13.2.2 一致收敛含参变量反常积分的性质	182
13.2.3 应用——反常积分的计算	189
习题	197
13.3 欧拉积分	199
13.3.1 Γ 函数及其性质	199
13.3.2 B 函数及其性质	202
13.3.3 Γ 函数与 B 函数的关系	204
习题	211
第 13 章总习题	212

第 14 章 曲线积分

14.1 第一型曲线积分	216
14.1.1 第一型曲线积分概念及其性质	216
14.1.2 第一型曲线积分的计算方法	219
习题	225
14.2 第二型曲线积分	226
14.2.1 第二型曲线积分概念及其性质	226
14.2.2 第二型曲线积分的计算方法	229
14.2.3 两类曲线积分的关系	236
习题	237
第 14 章总习题	238

第 15 章 重 积 分

15.1	二重积分的定义和性质	241
15.1.1	二重积分的概念	241
15.1.2	二重积分存在的条件	243
15.1.3	可积函数类	246
15.1.4	二重积分的性质	249
	习题	251
15.2	二重积分的计算	252
15.2.1	直角坐标系下的累次积分法	252
15.2.2	二重积分的变数变换	257
15.2.3	极坐标系下二重积分的累次积分法	263
	习题	268
15.3	三重积分	271
15.3.1	三重积分定义·直角坐标系下的累次积分	271
15.3.2	三重积分的变数变换	277
	习题	284
15.4	重积分的应用	285
15.4.1	曲面的面积	286
15.4.2	几何体的质量中心和转动惯量	291
15.4.3	引力	294
	习题	296
15.5	反常重积分	297
15.5.1	无界区域的反常二重积分	298
15.5.2	无界函数的反常二重积分	304
	习题	307
15.6	n 重积分	308

习题	315
第 15 章总习题	315

第 16 章 曲 面 积 分

16.1 第一型曲面积分	318
习题	322
16.2 第二型曲面积分	323
习题	332
第 16 章总习题	333

第 17 章 各种积分的联系 · 场论

17.1 格林公式	335
17.1.1 格林公式	335
17.1.2 平面上第二型曲线积分与路径无关的条件	342
17.1.3 二重积分的变数变换公式的证明	347
习题	351
17.2 奥高公式	353
习题	359
17.3 斯托克斯公式	360
习题	364
17.4 场论	365
17.4.1 数量场的方向导数和梯度	366
17.4.2 向量场的流量和散度	369
17.4.3 向量场的环流量和旋度	372
17.4.4 有势场以及空间第二型曲线积分与路径无关的条件	376
* 17.4.5 应用	378

习题	380
17.5 微分形式及其积分	382
17.5.1 微分的外积	382
17.5.2 微分形式和外微分	388
17.5.3 微分形式的积分	391
习题	397
第 17 章总习题	398

第 18 章 围变函数和 RS 积分

18.1 围变函数	401
习题	409
18.2 RS 积分	410
18.2.1 RS 积分的概念与可积条件	411
18.2.2 RS 积分的性质	415
习题	421
第 18 章总习题	422

第 19 章 傅里叶级数

19.1 傅里叶级数	425
习题	434
19.2 逐点收敛性	435
习题	443
19.3 函数的傅里叶级数展开式	444
19.3.1 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶展开式	444
19.3.2 非周期函数的傅里叶级数展开式	449
习题	455
19.4 一致收敛性及其应用	456
19.4.1 傅里叶级数的逐项求积与逐项求导	457

目 录

19.4.2	傅里叶级数的算术平均和	462
	习题	468
19.5	平均收敛性	469
19.5.1	傅里叶级数的极值性质	470
19.5.2	傅里叶级数的平均收敛 · 三角函数系的 完全性	474
	习题	481
19.6	傅里叶积分	482
19.6.1	傅里叶积分定理	484
19.6.2	傅里叶积分的其他形式	487
19.6.3	傅里叶变换的概念	490
	习题	494
第 19 章	总习题	495
习题答案与提示		500
参考文献		516

第10章 数项级数

级数理论在数学分析以及其他的后继课程、实用学科中有着大量的应用,作为基础课的数学分析,将把级数理论分为三章(数项级数、函数项级数和傅里叶级数)系统地论述,本章首先讨论常数项级数.

10.1 级数的敛散性及其性质

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是一个无穷数列,则表达式

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (10.1)$$

称为**无穷级数**,或简称**级数**.且常记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

其中 a_n 称为级数(10.1)的**通项**.级数(10.1)前 n 项之和

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

称为级数(10.1)的(第 n 个)**部分和**.

例如,把等比数列

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots \quad (a \neq 0) \quad (10.2)$$

各项依次相加可得数项级数

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (10.3)$$

通常称(10.3)为**等比级数**或**几何级数**.它的部分和($q \neq 1$ 时)

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}. \quad (10.4)$$

对于无穷级数(10.1),由于它是无穷项之和,我们自然要问这个无

穷和表示什么数以及如何求这个无穷和数.

定义 若级数(10.1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (\text{有限}),$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 S , S 称作此级数的和, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

若 $\{S_n\}$ 极限不存在(包括极限为 ∞), 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

由定义可知研究无穷级数收敛问题, 实质上就是研究部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛问题, 反之, 任取一数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 则 $\{x_n\}$ 的收敛问题就可以化为级数

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots$$

的收敛问题.

例 1 讨论等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0$) 的敛散性.

解 等比级数部分和

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

故

(i) 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$, 级数

收敛.

(ii) $q > 1$ 时, 显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$; $q < -1$ 时,

$$S_n = \frac{a(1-(-1)^n |q|^n)}{1+|q|},$$

显然 $\{S_n\}$ 是一个发散数列, 故当 $|q| > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

(iii) $q = 1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty$; $q = -1$ 时,

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ a, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

故 $|q| = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 也发散.

综上所述, 当且仅当 $|q| < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛, 且有和

$$\frac{a}{1-q}.$$

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 因为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 且其和为 1.

由于级数与数列有密切联系, 读者不难自行由数列的某些结果来证明关于级数的下述基本性质:

性质 1 (级数收敛的柯西准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是: 任给 $\epsilon > 0$, 存在某个自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对一切自然数 p , 都有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon. \quad (10.5)$$

在(10.5)式中取 $p = 1$, 便得

性质 2(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

由性质 2 可以知道, 如果 $\{a_n\}$ 不收敛或者 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛, 即通项趋于零仅仅是级数收敛的必要条件, 而不是充分条件. 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots,$$

因为

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

因此, 虽然 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 却是发散的.

性质 2 的实用价值在于当 a_n 不收敛于零时, 便可断言级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 今后将用到这个性质.

性质 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, c 为任一常数, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

性质 4 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

性质 5 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得到的级数仍收敛,

且其和不变.

证 设对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得级数是

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots, \quad (10.6)$$

我们令

$$\tilde{a}_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1},$$

$$\tilde{a}_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2},$$

.....

$$\tilde{a}_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k},$$

$$\tilde{S}_k = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \cdots + \tilde{a}_k,$$

则 $\tilde{S}_k = S_{n_k}$ 是收敛数列 $\{S_n\}$ 的一个子序列, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

注 由性质 5 可知若级数 (10.6) 发散, 则原级数 (10.1) 必发散, 但如果 (10.6) 收敛时, 去括号后不一定收敛. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于零, 但去括号后得一个发散级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots.$$

在一定条件下, 若 (10.6) 收敛, 则去括号后所得级数也收敛. 例如当级数 (10.6) 中同一括号内各项符号相同时, 则去括号所得的级数仍收敛.

事实上, 由于当 n 从 n_{k-1} 变到 n_k 时, S_n 将单调地变化, 其值在 $\tilde{S}_{k-1} = S_{n_{k-1}}$ 与 $\tilde{S}_k = S_{n_k}$ 之间, 若记

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = \tilde{S},$$

则当 k 充分大时, $S_{n_{k-1}}$ 和 S_{n_k} 与 $\tilde{S}$ 可相差任意小, 故