数学分析教程

Mathematics

下册

宋国柱　任福贤　编著

南京大学出版社

数学分析教程

Mathematics

下册

宋国柱　任福贤　编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程. 下册 / 宋国柱,任福贤编著. —2版. —南京:南京大学出版社,2013.11

ISBN 978-7-305-12232-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①宋… ②任… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 228052 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左 健

书 名 数学分析教程(下册)
编 著 宋国柱 任福贤
责任编辑 孙 静 吴 华 编辑热线 025-83596997

照 排 江苏南大印刷厂
印 刷 丹阳市兴华印刷厂
开 本 880×1230 1/32 印张 16.625 字数 417 千
版 次 2013 年 11 月第 2 版 2013 年 11 月第 1 次印刷
印 数 1~2 000
ISBN 978-7-305-12232-3
定 价 34.00 元

发行热线 025-83594756 83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

编者的话

《数学分析教程》第一版在南京大学数学系连续使用了近二十年. 本书第二版我们对全书作了详细修订. 考虑到本教材是为数学系各专业编写的基础课教材,在修订过程中,编者们力求做到:

使读者获得广博而坚实的分析基础. 为此,不但对数列的极限、实数系的基本定理、函数的一致连续性、欧几里得空间的基本性质、向量值函数、函数项级数和含参变量积分、一致收敛性等部分作了适当的加强,而且还增加了连续性的拓扑学定义、上下连续和霍尔德连续以及凸函数的性质. 此外,在第 18 章增加了囿变函数和 RS 积分的内容,这不但使得傅里叶级数的某些定理叙述得更为完美,证明更为简单,而且还为实变函数论中的 LS 积分打下了基础. 在第 6 章增加了一节"简单的微分方程",这既可以增加不定积分的训练,又可以使后续的常微分方程课得以删去过于简单的内容.

对各种概念的叙述准确严谨,全书的论证严密,具有科学性、逻辑性. 例如,在极限理论中一开始就给出了极限的严格定义,并由此展开数学分析的全部内容. 极限及连续性的理论都一次完成,而不采用一度流行过的先方法后理论的两步走方案. 在阐述定积分概念时,特别强调指出定积分这一极限过程与函数的极限、数列的极限以及级数求和的不同,并指出在可积性确认以后又可把积分和的极限看成数列的极限. 在论证由方程组所定义的隐函数时,增加了关于唯一性的几行文字,避免了不少教材普遍存在的一个疏漏.

加强传统的分析技巧的训练. 为此,选择了大量具有启发性、典型性的例题,并注意一题多解,前后呼应. 其次,精心选择了一整套习

题,安排在每节后面的是理解概念掌握基本方法所必备的,其中虽也有些较为困难,但为数不多.每章后面的总习题,大部分都有一定的难度,需要适当的技巧.它要求读者融会贯通所学到的数学分析知识,有时还涉及平行学科的有关内容,这些题目在类型上既有广泛性又有代表性,对于立志报考硕士生的读者是有所裨益的.

有广泛的适应性,易教易学.在证明比较困难的定理时,往往先进行适当的分析,以诱导读者的思路.对于较难的例题,在给出解法的同时,指出思想方法,讲清来龙去脉.对于容易模糊的概念,反复强调,不厌其烦.全部习题,书末都附有答案,难题还给出提示.

所有这一切,都是编者们所着意追求的,但由于水平所限,力不从心之处在所难免,热切希望得到同行以及广大读者的批评指正.

还需着重指出的是,本书对于实数理论的处理,采用的是逻辑学的方法,这与当前全国流行的种种教材完全不同.编者认为,这对于读者在后继课中理解函数空间的扩张是有好处的.

考虑到当今中学的教材内容,本书不再专门叙述函数概念以及集合的基础知识,这无论对于使用本书的学生、教师,还是用本书来自学的读者都不会产生不便.

全书共19章,240学时可以讲完,对部分要求较低的读者以及学时不够充裕的教师,实数理论、上下连续、霍尔德连续、RS积分以及微分形式及其积分等内容可部分删去,这不会给整个教学过程带来困难.

本书是编者们长期从事数学分析教学工作的结晶.第1～5章、第6～9章分别由许绍溥、姜东平执笔,第10～16章以及第17章17.1～17.4由宋国柱执笔,第18～19章以及第17章17.5由任福贤执笔.

本书第二版的出版与发行得到了南京大学出版社的大力支持,编者谨此一并表示衷心的感谢.

目　录

第 10 章　数项级数

第 11 章　函数序列和函数项级数

第 12 章　反 常 积 分

第 13 章　含参变量积分

第 14 章　曲 线 积 分

第15章 重积分

第 16 章　曲 面 积 分

第 17 章　各种积分的联系 · 场论

第 18 章 囿变函数和 RS 积分

第 19 章 傅里叶级数

第10章 数项级数

级数理论在数学分析以及其他的后继课程、实用学科中有着大量的应用，作为基础课的数学分析，将把级数理论分为三章（数项级数、函数项级数和傅里叶级数）系统地论述，本章首先讨论常数项级数.

10.1 级数的敛散性及其性质

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个无穷数列，则表达式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{10.1}$$

称为**无穷级数**，或简称**级数**. 且常记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

其中 a_n 称为级数(10.1)的**通项**. 级数(10.1)前 n 项之和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数(10.1)的(第 n 个)**部分和**.

例如，把等比数列

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots,\ aq^n,\ \cdots\ (a \neq 0) \tag{10.2}$$

各项依次相加可得数项级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \tag{10.3}$$

通常称(10.3)为**等比级数**或**几何级数**. 它的部分和 $(q \neq 1$ 时)

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{10.4}$$

对于无穷级数(10.1)，由于它是无穷项之和，我们自然要问这个无

穷和表示什么数以及如何求这个无穷和数.

定义　若级数(10.1)的部分和数列$\{S_n\}$有极限,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (\text{有限}),$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**于S,S称作此级数的**和**,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

若$\{S_n\}$极限不存在(包括极限为∞),则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**.

由定义可知研究无穷级数收敛问题,实质上就是研究部分和数列$\{S_n\}$的收敛问题,反之,任取一数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$,则$\{x_n\}$的收敛问题就可以化为级数

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots$$

的收敛问题.

例 1　讨论等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} (a \neq 0)$ 的敛散性.

解　等比级数部分和

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

故

(i) 当 $|q| < 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \dfrac{a}{1-q}$,级数收敛.

(ii) $q > 1$ 时,显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;$q < -1$ 时,

$$S_n = \frac{a(1-(-1)^n |q|^n)}{1+|q|},$$

显然$\{S_n\}$是一个发散数列,故当 $|q| > 1$ 时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

(iii) $q=1$ 时，$S_n=na\to\infty$；$q=-1$ 时，

$$S_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ a, & n=2k+1.\end{cases}$$

故 $|q|=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 也发散.

综上所述，当且仅当 $|q|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 收敛，且有和 $\dfrac{a}{1-q}$.

例 2　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解　因为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛，且其和为 1.

由于级数与数列有密切联系，读者不难自行由数列的某些结果来证明关于级数的下述基本性质：

性质 1(级数收敛的柯西准则)　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在某个自然数 N，使得当 $n>N$ 时，对一切自然数 p，都有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon. \tag{10.5}$$

在(10.5)式中取 $p=1$，便得

性质 2(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则必有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

由性质 2 可以知道,如果$\{a_n\}$不收敛或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散,但$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛,即通项趋于零仅仅是级数收敛的必要条件,而不是充分条件. 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots,$$

因为

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

因此,虽然 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0\ (n\to\infty)$,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 却是发散的.

性质 2 的实用价值在于当 a_n 不收敛于零时,便可断言级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,今后将用到这个性质.

性质 3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛,c 为任一常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 都收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

性质 4 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

性质 5 收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得到的级数仍收敛,

且其和不变.

证　设对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得级数是

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots. \tag{10.6}$$

我们令

$$\tilde{a}_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1},$$

$$\tilde{a}_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\tilde{a}_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k},$$

$$\tilde{S}_k = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \cdots + \tilde{a}_k,$$

则 $\tilde{S}_k = S_{n_k}$ 是收敛数列 $\{S_n\}$ 的一个子序列,故

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{S}_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

注　由性质 5 可知若级数(10.6)发散,则原级数(10.1)必发散,但如果(10.6)收敛时,去括号后不一定收敛. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于零,但去括号后得一个发散级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots.$$

在一定条件下,若(10.6)收敛,则去括号后所得级数也收敛. 例如当级数(10.6)中同一括号内各项符号相同时,则去括号所得的级数仍收敛.

事实上,由于当 n 从 n_{k-1} 变到 n_k 时,S_n 将单调地变化,其值在 $\tilde{S}_{k-1} = S_{n_{k-1}}$ 与 $\tilde{S}_k = S_{n_k}$ 之间,若记

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{S}_k = \tilde{S},$$

则当 k 充分大时,$S_{n_{k-1}}$ 和 S_{n_k} 与 $\tilde{S}$ 可相差任意小,故