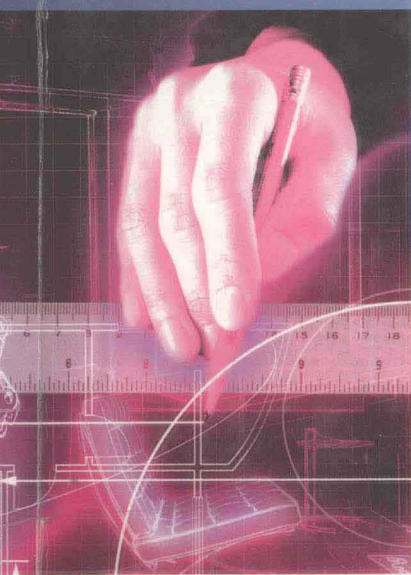


XIAOXUE SHUXUE KAIFANGTI CESHI YU FENXI

新课程典型案例

小学数学



- 目前市场上绝对没有同类书。
- 切口小，研究深。
- 数据详实，分析透彻。
- 一个题目的测试也能写成分析报告，阅读本书后，您也能做到。

东北师范大学出版社

开放题测试与分析

主编 朱乐平

国家数学课程标准研制组核心成员

特级教师

XIAOXUE SHUXUE KAIFANGTI GESHI YU FENXI

新课程典型案例

小学数学

- 目前市场上绝对没有同类书。
- 切口小，研究深。
- 数据详实，分析透彻。
- 一个题目的测试也能写成分析报告，阅读本书后，您也能做到。

东北师范大学出版社

长春

开放题测试与分析

主编 朱乐平

国家数学课程标准研制组核心成员

特级教师

图书在版编目 (CIP) 数据

小学数学开放题测试与分析/朱乐平主编. —长春:
东北师范大学出版社, 2004.7
ISBN 7 - 5602 - 3930 - 7

I. 小... II. 朱... III. 数学课 - 教学研究 - 小学
IV. G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065134 号

☐责任编辑: 徐 江 ☐封面设计: 宋 超
☐责任校对: 刘云伟 ☐责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)

电话: 0431—5687213

传真: 0431—5691969

网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春方圆印业有限公司印装

长春市西环路 4407 号 (130062)

2004 年 7 月第 1 版 2004 年 7 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 148mm × 210mm 印张: 9.75 字数: 260 千

印数: 0 001 — 5 000 册

定价: 12.50 元

前 言

亲爱的读者，您知道小学生会怎样解决下面这个数学开放题吗？

根据数列的规律在横线上填数，并说明理由。（你能想出几种填法就写几种）

3, 5, 7, _____, _____, _____, …

对这个问题，学生能写出哪些不同的答案？不同年龄（年级）的学生写出的答案会有哪些差异？学生的解题策略有什么规律？学生会觉得这个题目难吗？会有多少名学生对这个题目感兴趣？这个问题放到哪一个年级教学比较合适？……或许我们能够在办公室里凭感觉回答这些问题，但这仅仅是感觉！学生的真实情况如何呢？我们必须走向学生！让学生去解决这个问题，我们静心地去看，看一看学生到底是怎样解决这个问题的，对学生的各种分析思路作认真的统计，并进行理性的分析。对数学教育我们不仅要依靠经验和感觉，更要依靠真实的统计数据和理性的分析。

本书作者选择了一些数学开放题并对学生进行测试，在取得了大量数据的基础上，对学生的解题策略进行了研究，写成了分析报告。每一个报告主要包含以下内容：

1. 提出问题。主要阐述研究问题的背景。
2. 调查形式。调查采用书面测试和个别访谈相结合的形式。
3. 测试的问题、对象和过程。阐述测试学生的是一个什么样的开放题，被测试的学生是哪几个年级的，年龄是多少岁，共有多少名，以及如何进行测试和访谈的过程。
4. 测试的结果及其分析。这是报告的主体部分，主要阐述学生

解决某一个开放题的情况，如学生做出了哪几个答案，能够有序地思考问题的学生占测试总人数的百分比是多少，有哪几种不同的解题策略，不同年级学生的解题策略有什么共同的特点，有多少名学生认为这是一个有趣的数学问题，认为这个开放题比较难的学生数占测试总人数的百分比是多少等等。同时，报告对为什么会出现这样的结果作了比较详细的分析。

5. 对小学数学教学的启示。通过对测试结果的分析、比较和研究，进一步得出对小学数学教学的启示。如某一个开放题通过对不同年级学生的测试，根据难度分析可以得出这个问题放在哪一个年级教学比较合适。

6. 进一步研究的问题。通过测试可以发现，学生的思维非常活跃，也非常复杂，需要我们对一些问题作进一步的讨论。作者对这些问题发表了一些自己的看法，也十分希望读者能够积极参与。

我们知道，国家《数学课程标准》不但在正文中使用了“开放题”这个名词，而且在案例中也列举了多个开放题，这个数学教学的纲领性文件之所以积极鼓励教材和教学中使用开放题，是由于开放题有着十分丰富的教育价值。本书作者为开发和利用开放题丰富的教育价值做了一些基础性工作，书中提供了大量的测试数据和分析，试图为广大的数学教师在自己的教学中更好地使用开放题提供参考。同时也希望为数学教材的编者在教材中编写开放题提供依据。如果还能为数学教育研究者提供一些可供参考的数据和分析，为寻找我国学生的解题特点做一点基础性的工作，那更是一件值得高兴的事。

本书提供了作为教师如何进行数学教育研究的一种方法。书中的极大部分作者都是小学数学骨干教师，他们用自己的行为强调“在测试、访谈、统计的基础上再进行定性的分析”这样一种研究方法。或许这种分析还带有“稚气”，但这是他们自己打印题目，选择班级，测试访谈，统计数据，研究分析，最后写出的真实的统计数据，体现的是自己的真实感受，分析中用的是他们自己的“语言系统”，说出了自己想说的话。这是最可贵的！一名教师如果能不断地从小课题研

究入手，实实在在地进行研究，对一些数学教学现象进行理性的分析，说自己的分析与感受，而不是硬套理论，说大话，那么，这名教师一定会快速地提高自己的专业水平。

由于时间紧张，水平所限，书中错误和不当之处，敬请读者提出批评，给予指正。

朱乐平

2004年6月于杭州

目 录

前 言 /1

小学生找出“较复杂图形中线段”的解题策略研究 /1

小学生解决“五小格涂色”问题的策略研究 /11

小学生解决“等分三角形”问题的解题思路研究 /19

小学生解决“不同的拿法”问题的调查与研究 /30

小学生解决“奇妙的四位数”问题的策略研究 /40

小学生解决“涂带圈的正方形”问题的策略研究 /47

小学生对“打靶问题”的解题策略研究 /54

小学生解决“邮递员送信”问题的分析与研究 /64

小学生解决“还有几个角”问题的调查与研究 /77

小学生在九宫格中去掉一个L形的

解题策略的研究 /83

小学生解决“图形的分类”问题的调查与研究 /91

五、六年级学生解决“设计花坛”

问题的策略的研究 /99

小学生解决“等分正方形”问题的

解题策略的调查与研究 /112

小学生解决“去掉凸字形”问题的调查与研究 /120

从“八角钱”问题看小学低年级学生的

有序性思考 /130

从小学生的拼图策略中看空间观念的发展 /139

小学生“拼图游戏”的解题策略的研究 /148

小学生对一天时间的认定的调查与分析 /157

- 小学生找出“奇妙数表中数值之间规律”的
分析与研究 /164
- 一年级儿童解决“九鸡关三笼”问题的研究 /173
- 小学生找出“图形的异同”的思维过程研究 /180
- 小学生解决“找规律填数”问题的分析与研究 /191
- 对小学六年级学生解决“复杂行程问题”的
分析与研究 /203
- 小学生解决“拼图计算周长”问题的
解题策略研究 /217
- 小学生解决“比较异分母分数大小”问题的
策略的研究 /227
- 小学生解决“购物”问题的调查与研究 /236
- 小学生解答“特殊三角形面积”问题的
解题策略的研究 /244
- 小学生解决生活中数学问题的调查与研究 /250
- 关于小学高年级学生数学能力的特征的研究 /259
- 小学生找出“与众不同的数”的调查与研究 /270
- 小学生解决“蚂蚁搬米”问题的调查与研究 /278
- 小学生对“安排餐桌”问题的解题策略研究 /291
- 小学生解决“上、下相差2”问题的调查与研究 /299

小学生找出“较复杂图形中线段”的 解题策略研究

朱乐平

一、问题的提出

许多数学教师都有这样的经验：解决一个数学问题时学生常常有自己的解题策略，对同一年龄段的学生来说，他们的解题策略既有共性又有个性。但当学生去解决某一个数学问题时，他们到底会运用怎样的解题策略，采用不同策略的学生人数各有多少，这些问题并不十分清楚。为此，笔者给出一个几何问题，让小学四、五、六年级的学生找出“较复杂图形中的线段”，试图从学生的解题中发现学生的解题策略，并分析学生解题策略的心理特征。

二、测试的问题、对象和过程

1. 测试的问题

下面的图形中一共有多少条线段？请把图形中的线段都写出来。（请尽可能详细地写出过程）

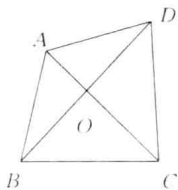


图 1

如果你认为解题已经完成，请选择：

- (1) 你认为这个题目：①很有趣；②比较有趣；③没有趣。
- (2) 你认为这个题目：①很难；②比较难；③不难。

2. 测试的对象

按照现行的小学数学教材,本地区四年级及四年级以上的学生已经学过了线段的概念,知道了线段的表示方法。因此,测试的对象选择了小学四、五、六年级的学生各一个班,年龄分别是 11, 12, 13 岁,人数分别为 50, 49, 51 人。

3. 测试和访谈过程

某天上午,在学生不知情的情况下,由班主任协助组织进行测试。在测试前,没有给学生任何的解题提示,也没有读题,直接让学生独立地解答,并自我记录做题时间。如果学生自己认为解题已经完成,就把测试卷交给老师,学生在解题过程中,没有任何的讨论与交流,整个测试过程基本反映了学生独立地在自然情景下解答这一几何问题的水平。测试后,我们对学生的解题情况进行初步整理,在整理的基础上,选择了部分学生一一进行访谈。测试与访谈在同一个上午完成。

三、测试结果

1. 四、五年级有半数以上的学生能正确解答这个几何问题,六年级学生解答这个题目的正确率超过 80%。

对学生的解题试卷进行批改和统计后,我们发现:四、五、六年级学生解答这个几何题的正确率分别是 52%, 54% 和 84.3%。有一部分学生不能正确地数出图中的线段数,四、五、六年级的学生在数线段时有遗漏(少数线段)的学生比例分别是 18%, 18% 和 7.8%。数出的线段有重复(多数线段)的人数比例分别是 30%, 28% 和 7.9%。重复数线段的学生数明显比少数线段的学生数多。

2. 四、五、六年级学生的解题策略已呈现出多样性,学生认知图形存在着结构性心理特征。

通过分析四、五、六年级学生的测试卷,我们发现学生的解题策略是多样的,学生在解决上述测试题时,主要有以下几种策略:

策略一:“顺序”型。按字母顺序数出所有线段。即先数出以 A 点作为一个端点的所有线段,再分别数出以 B, C, D 点作为一个端点的所有线段,最

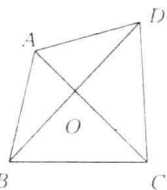


图 2

后，除去重复的线段。

A 点：AB，AO，AC，AD 共四条线段。

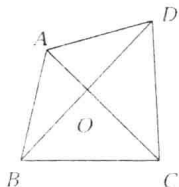
B 点：BC，BO，BD 共三条线段。

C 点：CO，CD 共两条线段。

D 点：DO 一条线段。

一共有 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ 条线段。

下面是一名四年级学生的解答：



解答：(请尽可能详细地写出过程)

AB, AC, AD, BC, BD, BO, CO, DO。

图中一共有10条线段。

这种答案是按照 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的“顺序”得出的，在被测试的学生中采用这种策略的四年级学生有 32%，五年级学生有 24%，六年级学生有 50%。

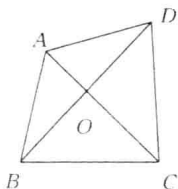
策略二：“由外到内”型。先找四边形外围线段，再找内部线段。即分别写出：

AB，BC，CD，DA；

AC，BD；

AO，BO，CO，DO。

下面是一名五年级学生的解答：



解答：(请尽可能详细地写出过程)

答：共有10条线段 AD, DC, CB, BA, AC,

BD, BO, AO, DO, CO。

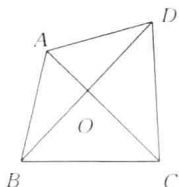
在被测试的学生中，采用这种策略的五年级学生有 16%，六年级学生有 23%，而四年级采用这种策略的学生只有 4%。

策略三：“由内向外”型。这类学生的解题思路正好与上面策略二的解题思路相反。即先数出图形中内部的线段，再数外部的线段。在被测试的学生中，采用这种策略的四、五、六年级学生分别有12%，6%和4%。

策略四：“对称”型。按照图形中各线段的某种“对称”位置找出所有线段。找出线段的顺序是：

$AC, BD; AB, DC, AD, BC; AO, OC, BO, OD$ 。

下面是一名五年级学生的解答：

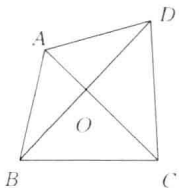


解答：（请尽可能详细地写出过程）

$AC, BD, BC, AD, DC, AB, OB, DO,$
 $AO, CO.$

在被测试的学生中，采用这种策略的四、五、六年级学生分别是：6%，8%和10%。

策略五：“三角”型。把要数线段的这个图形分解为几个三角形，然后数出每一个三角形的线段数，再去掉重复的线段，就得到要数的线段数。下面是几名六年级学生的解答：



解答：（请尽可能详细地写出过程）

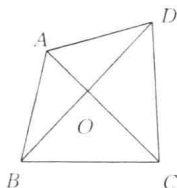
一共有10条线段
由3条射线组成的有4个三角形，一共12条，减去
重复4条，等于8条。
再加上2条，线段分别由A和B表示。



这是一名学生用“三角”型法找出线段的解题过程，尽管结果正确，但思考的过程有错误。

$\triangle AOB$ 3条
 $\triangle BOC$ 3条
 $\triangle DOC$ 3条
 $\triangle AOD$ 3条
 其中 $\triangle AOD$ 有2条重复
 $3 \times 4 - 2 = 10$ 条

$\triangle BAD$ 内有6条线段， $\triangle BOC$ 内有3条线段， $\triangle ABC$ 内有6条线段， $\triangle ODC$ 内有3条线段， $\triangle ACD$ 内有6条线段，共重复14条。
 $6 + 3 + 6 + 3 + 6 - 14 = 10$ 条，分别为：AD、AB、DO、BC、BD、CO、OC、AC、AO、DC。



上下两名学生的解答过程都说有14条重复线段，但他们数的三角形的个数是不一样的，读者可以想一想他们是怎样得到“重复线段是14条”这个结论的。

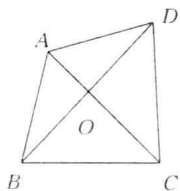
解答：（请尽可能详细地写出过程）

共8个三角形，24条线段（包括重复的）

其中重复14条。

$$24 - 14 = 10 \text{ (条)}$$

四年级学生中只有 1 人采用这种策略, 占做对人数的 3.8%, 五年级没有学生采用这一策略, 六年级学生中有 5 人采用这一策略, 占做对人数的 11.6%。除了上述策略外, 还有一些学生是运用了上面两种策略的组合, 下面是一名六年级的学生运用“对称”和“顺序”的策略解决问题的过程:



解答: (请尽可能详细地写出过程)

$AD, BC, DC, AB, AO, BO, CO, DO, AC, DB.$

从以上的几种解题策略中, 我们可以看到, 小学生在观察和分析复合图形时, 认知结构上具有“顺序”、“对称”、“封闭”及其组合的某种认知特征。

3. 四、五、六年级学生数线段时已有一定程度的规律性。

能正确找出图中所有 10 条线段的学生中, 四、五、六年级分别有 68%, 75% 和 88.4% 的学生解答有规律, 26%, 18% 和 7% 的学生解答有部分规律, 仅仅 6%, 5% 和 4.6% 的学生, 笔者没有发现明显规律。学生呈现答案的规律性与结论的正确性有着十分密切的关系。一般来说, 答案呈现的规律性越强, 答案的正确性就越高。具有“顺序”、“对称”、“封闭”及其组合的认知特征, 对学习效果起着积极的作用。

4. 题目的有趣性、难度和答题的正确率之间有着比较密切的关系。

对小学四、五、六年级的学生来说, 他们对这个几何题有趣程度、难度的认定以及客观上他们对这个题目解答的正确程度存在着一个有趣的关系。

表 1 各年级学生对题目有趣程度认定的比例

年 级 \ 项 目	很有趣	比较有趣	没有趣
四年级	64%	36%	0%
五年级	51%	40.8%	8.2%
六年级	15%	60%	25%

表 2 各年级学生认定题目难度的比例和实际答题的正确率

年 级 \ 项 目	各年级学生认定的题目难度			学生答题的正确率
	很 难	比较难	不 难	
四年级	8%	84%	8%	52%
五年级	0%	4%	96%	54%
六年级	0%	3%	97%	84.3%

从表 1 可知,四、五年级的学生认为这个几何题有趣的程度远远超过了六年级的学生。我们在对四年级学生的个别访谈中发现,学生认为有趣的主要原因是题目有一定的难度,题目有一定的挑战性。如问四年级学生为什么说题目有趣时,一名学生说:“这个题可以考考我们的智商,而且可以看看我们的眼力好不好。”另一名学生的回答是:“就是它上面有很多线段,让我们找有几条线段,多的话,有点眼花缭乱,那么找起来就很好玩的。”联系表 1 和表 2 可以看出,100%的四年级学生认为这个题目比较有趣或者很有趣,认为这个题目比较难或很难的学生占了 92%。所以,笔者认为,这个几何题比较适合四年级(11 岁)的学生进行学习。一方面,多数学生觉得比较有趣,觉得有一定的难度,另一方面,有 52% 的学生运用不同的

策略解决了这个问题。如果我们在教学中,让学生在独立解决问题的基础上,进行讨论与交流,那么学生就能相互启发,从而促进他们有较大发展。

我们在对六年级学生的个别访谈中发现,六年级的学生(特别是数学能力比较强的学生)基本上都认为这个题目“没有趣”,问他们为什么说这个题目没有趣,回答都是“题目太容易”,有些学生还说,这个题目对于二、三年级的同学可能会比较有趣。由此我们是否可以认为,对小学生来说,一个题目的有趣程度与这个题目的难度及其挑战性有很大的关系,对数学能力比较强的学生来说,当题目有一定的难度和一定的挑战性时,他们会认为题目比较有趣,从这个意义上说,这部分学生更愿意“爬坡”,而不愿意“走平路”。

从表2可知,对于五、六年级的学生来说,没有学生认为这个题目很难,认为比较难的学生也分别只有4%和3%,换句话说,五、六年级的学生几乎都认为这个题目是容易的,但实际答题的正确率五年级只有54%,六年级只有84.3%,由此我们是否可以认为,对这样的开放性问题,由于学生在解题时比较容易入手,很容易找到几条线段,所以学生会认为题目比较容易,但他们没有比较清晰地认识到题目的要求是要找出所有的线段。事实上,如果不是有序地去思考这个问题,要想把所有的线段都找出来是有一定难度的。从这个意义上说,这个年龄段的学生对解决这个几何问题尚处于不知“天高地厚”的阶段。

四、对小学数学教学的启示

从上面这个几何题的测试和分析中,我们可以得到对小学数学教学的几点启示:

1. 小学数学教学内容的选择要适合学生的年龄特征,选择的数学问题要具有挑战性,以激发学生学习数学的兴趣。

2. 小学生解决数学问题的策略具有多样性,无论是思考问题的顺序,还是表现的形式都具有极强的个性。小学数学教育要提倡解题策略的多样化,要承认学生的差异,尊重学生的个性,促进每一名学

生在原来的基础上发展。

3. 要重视学生有序地考虑问题和解决问题的能力培养。

4. 在教学中适度地引进开放题,对培养学生学习数学的兴趣将有一定的帮助。

五、讨论的问题

1. 为什么部分学生不能按照他们选定的规律找出所有的线段?为什么有重复线段的学生数比有遗漏线段的学生数多?

从上面的结论中可知,四、五级的学生,分别有 48% 和 46% 的学生不能正确地解答这个几何题。笔者对这部分学生的试卷作了分析后发现:有许多学生在开始呈现答案时,表现出很强的规律性,在不能完整解答此题的五年级学生中,有 45% 的学生开始呈现答案时表现出“顺序”型的结构,但这部分学生不能一直按这一规律写出所有答案。常常在最后出现重复或者遗漏。四、五、六年级的学生在数线段时有遗漏(少数线段)的学生比例分别是 18%, 18% 和 7.8%。数出的线段有重复(多数线段)的四、五、六年级学生人数比例分别是 30%, 28% 和 7.9%。重复数线段的学生数明显地比少数线段的学生数要多。

为什么部分学生不能按照他们选定的规律找出所有的线段?为什么有重复线段的学生数比有遗漏线段的学生数要多?这些问题都需要进一步的研究。笔者认为,可能与学生的短时记忆能力有关,也可能与学生对这种数学模型掌握的牢固程度有关。如果短时记忆的能力比较弱,那么在找线段的过程中,就可能“忘记”了原来的规律;如果对具备某种规律的数学模型掌握得不够牢固,或者在找线段的过程中,模糊了这种结构,从而产生了重复或者遗漏的现象。又由于学生在直觉上可能会感觉到这个图形中线段很多,从而他们可能会认为找出的线段“少写”还不如“多写”。你认为这样的分析有道理吗?谈谈你对这个问题的看法。

2. 从上面学生解答的正确率中可知,四年级学生答题的正确率是 52%,五年级学生答题的正确率只增加了 2%,即只有 54%,而