自然數原本

數数论

薛海明 薛星 著

自然数

素数

数数

数数与自然数

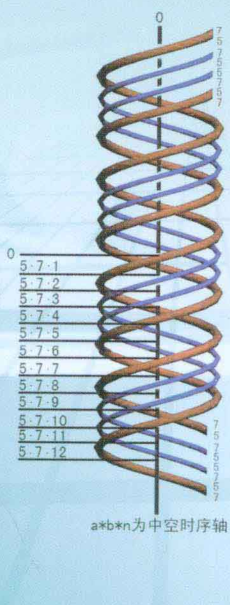
薛氏筛法

因子的同步分布

同因子的对应分布

异因子的对应分布

素数与偶数的关系



山西出版传媒集团
山西科学技术出版社

数数论

自然数原本

薛海明 薛星 著

自然数

素数

数数

数数与自然数

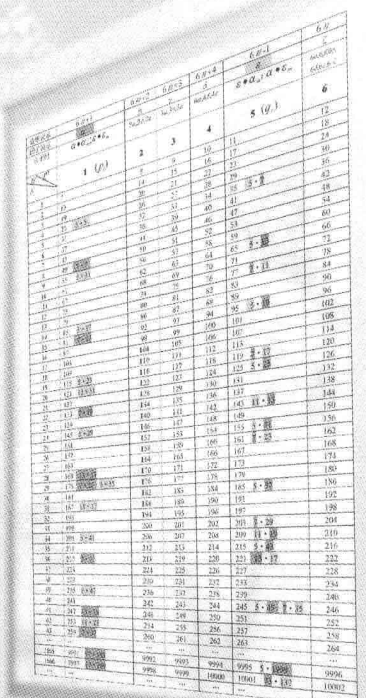
薛氏筛法

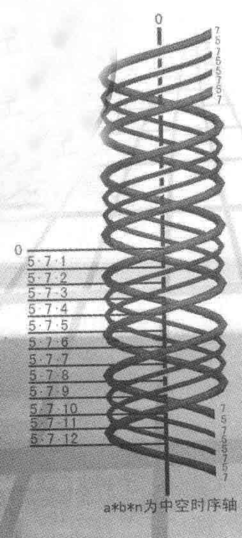
因子的同步分布

同因子的对应分布

异因子的对应分布

素数与偶数的关系





山西出版传媒集团
山西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

自然数原本数数论 / 薛海明，薛　星著. —— 太原 :山西科学技术出版社，2013.6
ISBN 978-7-5377-4472-0

Ⅰ. ①自… Ⅱ. ①薛… ②薛… Ⅲ. ①数论-筛法 Ⅳ. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 121317 号

自然数原本数数论

著　　者　薛海明　薛　星
执行主编　张景刚
出　　版　山西出版传媒集团·山西科学技术出版社
　　　　　(太原市建设南路 21 号　邮编:030012)
发　　行　山西出版传媒集团·山西科学技术出版社
　　　　　(电话:0351-4922121)
经　　销　全国新华书店
印　　刷　山西力新印刷科技开发有限公司
电　　话　0351-4922072(编辑室)
E - mail　haozglion@sohu.com
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　30
字　　数　620 千字
版　　次　2013 年 8 月第 1 版
印　　次　2013 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5377-4472-0
定　　价　100.00 元

谨以此书献给二十一世纪的科学事业

内容介绍

数数作为产生自然数的原本形式，它已有上万年的历史。虽然有史以来，人们就已应用数数这一计数方法，但在数学研究领域却完全忽略了“數数计数”这种基本的数学形式，使之成为数学研究中的一项空白。在本书讨论的整个过程中，根据數数这种原本形式表现出的性质与规律，创造出了“薛海明筛法”，从根本上改变了“古典筛法”以及现代数论中应用的一些新的筛法理论工具，并对素数的判别，合数的分解，求素数的分布个数，孪生素数的分布，哥德巴赫猜想等有关素数难题全部归纳为系列化讨论。它将系统地告诉我们，商数、余数、合数、素数、偶数、各种因子等多种不同形式的有序分布规律与各数之间的关系。这种全部运用系列化探讨自然数的方法，对数学的发展有着深远的意义，也是开启对數数性质、规律研究的一部原创数学专著。

几 点 说 明

一、“數”“数”两字的用法

在本书讨论过程中,对于“数(shù)”与“数(shǔ)数(shù)”两词的使用非常之多,为使讨论时的方便,则采用“数”字的繁简两种字体以示区别。当为繁体“數”字时,读 shǔ;当为简体“数”字时,读 shù。如所说的“數(shǔ)数(shù)”一词,本书则用“數数”的形式进行区别而不加注音。再如本书内的“數值”和“数值”“倒數”和“倒数”“数起源于數”等这些概念和词组中,它们表示的都是不同的数学涵义,因此,在阅读本书时,则应注意“數”“数”这两字的不同使用方法。

二、例题范围

为阅读方便,能使讨论时的规律或一些计算结果在书内查对,但因书内筛法表的具体范围所限,所举例题多是万内之数,对于万以上的数,读者则可通过介绍的计算方法或规律,进行检查。

由于本书的规律与性质,都是建立在數数这一原本基础上的,它涉及许多新的性质与规律。它们互相之间的关系又较为复杂,为了避免混乱的情况发生,每种规律的表示方式或符号的使用,一般不进行变动,阅读时应注意各个表示式的说明。

本书所讨论的自然数性质,全部与产生自然数的原本形式——數数规律有关,因此,有许多新的概念或定义,都是在數数这一基础上引用或形成的,所以在阅读本书时,假定读者有很多数学知识,除第一章、第二章不需阅读外,但必须从第三章“數数”开始读起,不然,对后面讨论时的各个概念是不易看懂的。

三、其它

本书中的公式与表示式,有些与其他数学书中有所不同,这是由于在某些应用中有所不同所引起的。希在阅读中注意各式的说明。

符 号 说 明

$a,b,c,d,\cdots$在未有声明时，一般表为自然数或先后顺序。

$A,B,C,D,\cdots$在未有声明时，一般表为自然数或先后顺序。

W 表示为一个自然数在筛法表中分布位置公式的代号。

$M.m$ 表示为任一自然数，特指计数量。

$N.n$ 表示自然数的一个项数、序数，也称为计序量，专指因子的排列序数或计序量。

$R.r.$表示为数数时的单位或它的值，也表为整除中的余数部分。

L 表为筛法表中的列数。$L^{1)}$，$L^{5)}$，$L^{s)}$特表第一列、第五列数或第 s 列中的数，特别注意右上标的数不表为 L 的指数。

L_N 表示一自然数在列表中的序数，当表为 L_n 时，特表示一因子在列表中的序数。

K 表示该数为一合数，也称为“数出值”，特表示该列数为合数列。

P 未声明时也表示任一素数。一般表示为 $6n+1$ 形的素数或该形式素因子。

q 未声明时也表示任一素数。一般表示为 $6n-1$ 形的素数或该形式素因子。

π 表示为筛法表中的列数为素数列(即素数与合数混合分布的列数因筛后全为素数，故称为素数列)。

φ 表示为孪生素数。

θ 表示为筛法表中上下两数在对应分布形式中的对应中心位置，一般指实项中心位置。当表为ϑ时，则指虚项中心位置。

C 一般表示为數数时的次数。

S 一般表示为列数、序数号或一个编码形式的自然数。

$\underrightarrow{1^{R)}}$數数时的启數位置与數数方向的符号，简称“數数号”。

H 表为一种互相數数的一种數数形式，也称为“互數规律”。

Z,Z_m.前者表示为數数时的一个周期，后者表示为周期数。

Q 表示为周期率。δ、σ、$\sum$表示數的和。

$\prod$表示数的乘积。d 表示为公差关系。

α 表示为 $6n+1$ 形的自然数或计数因子。α_m 表示该形数为计序因子。

β 表示为 $6n+2$ 形的自然数或计数因子。β_m 表示该形数为计序因子。

γ 表示为 $6n+3$ 形的自然数或计数因子。γ_m 表示该形数为计序因子。

δ 表示为 $6n+4$ 形的自然数或计数因子。δ_m 表示该形数为计序因子。

ε 表示为 $6n-1$ 形的自然数或计数因子。ε_m 表示该形数为计序因子。

ζ 表示为 $6n$ 形的自然数或计数因子。ζ_m 表示该形数为计序因子。

$\updownarrow$ 表示为两数之间的对应关系。

Λ、$\triangle$表示一数列内，分布在上部分区域中各数的位置。

V、∇表示一数列内，分布在下部分区域中各数的位置。

有些符号未有列出，在阅读时请看该符号或其公式的说明。

序 言

1978年2月17日,《人民日报》几乎用两个整版篇幅登载了徐迟[①]的报告文学《哥德巴赫猜想》,众多地方报刊也同时转载,一时间,这篇文章轰动了整个中华大地。有多少读者被我国著名数学家陈景润[②]那种不畏艰苦、勇攀高峰的动人事迹所感动。又有多少读者被哥德巴赫[③]猜想这一举世瞩目的世界难题所吸引。这是因为在数学研究领域内,有人曾作了如下的比如:"自然科学的皇后是数学,数学的皇冠是数论,哥德巴赫猜想则是皇冠上的明珠"。为了摘取这颗明珠,全球数学界有成千上万学者呕心沥血,为之奋斗了两个多世纪。因此,当这篇文章报道后,曾几何时,在国内大中小学里引起了一股"数学热潮"。我作为一名读者,虽被陈景润那种顽强的拼搏精神和取得的杰出成就所感染,但对哥德巴赫猜想这一难题来说,则是望而却步的。从报告文学这篇文章中可以看出,陈景润在证明哥德巴赫猜想过程中,他不仅应用了古典筛法,精深地钻研了华罗庚[④]的《堆垒素数论》《数论导引》以及在圆内整点问题、球内整点问题、华林问题、三维除数问题等之上改进了中外数学家的结果,同时还涉及解析数论、代数数论、函数论、泛函分析等等学科。从1742年开始,德国数学家哥德巴赫发现:"每一个大偶数都可以表示为两个素数之和"这一猜想以来,整个18世纪没有人能证明它,整个19世纪没有人能证明它,从20世纪20年代开始有点进展后,到1973年陈景润发表他的最好的全部结果止。在这二百几十年的研究历史中,包括赫赫有名的世界大数学家欧拉[⑤]在内,许多国家的知名数学家都为之付出了艰苦地劳动,但对哥德巴赫猜想的彻底解决仍有一段漫长道路。从这篇报告文学中不难看出,要攻克哥德巴赫猜想这一问题,将是最困难最困难的。对数论研究领域不甚了解的我们这些门外汉来说,真可谓是"想骑着自行车到月球上去"的一种幻想。难怪当年出版的陈景润所著的《初等数论》一书中,他曾认为在最近几十年,关于哥德巴赫猜想、费尔马[⑥]大定理等世界著名难题是不可能得到证明的,并告诫我们不要走入歧途,不要为此浪费时间和精力。

也可能当年是一种巧合,在一个偶然机会中,我对百以内的自然数进行了多种有序形式的排列,并有意或无意识地对这些数采取了不同方法的數数过程,却发现用其中一种方法竟能够把素数与合数区别开来。于是接着用这种方法对千以内的自然数列,也进行了同样方法的數数过程,同时把得到的素数与《算术一千题解答》这本书里的"千以内素数表"进行对照,结果发现该表却印错四处,经过反复验算,都证明用數数方法所找出的素数是正确的。在高度兴奋中,我把这种數数方法又做了进一步的改进,并对万以内的自然数列进行了同样检验。经改进后的方法中,对素数的检验速度不仅加快,其结果也证明是准确无误的。这一意外的发现,使我既惊奇又振奋,但自己却不能解释其中的原理。數数与自然数之间是否存在着

①徐迟(1914.10.15–1996.12.13),中国现代散文学家,诗人。

②陈景润(1933.5.22–1996.3.19),中国著名数学家。

③哥德巴赫(Goldbach C,1690.3–1764.11),德国数学家。

④华罗庚(1910.11.12–1985.6.12),世界著名数学家。

⑤莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler,1707.4.5–1783.9.18),瑞士数学家和物理学家。

⑥费尔马(Pierre de Fermat,1601–1665),法国著名数学家,被誉为"业余数学家之王"。

一种未知关系？素数在自然数中的具体分布规律是什么？用數数方法所得到的素数与哥德巴赫猜想之间是否有一定的联系？对于区别素数与合数的这种數数方法，在数学研究中是否能够找到答案？带着以上这些疑问，使我一下投入到对自然数的探讨之中。

伟大的科学巨匠爱因斯坦[①]曾强调指出："提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已。而提出新问题，新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要有创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步"。当从《1、2、3，…》到《无穷无尽的数》这些通俗读物开始，以及其他关于自然数这方面的大量书籍杂志的阅读，并查阅了华罗庚的名著《数论导引》，翻遍了《数学词典》的有关解释。虽未找到用數数形式寻找素数这种方法，然而从对许多资料的查阅过程中，对数论里所讨论的那些深奥的数学知识则多少有了一些了解。同时也进一步认识到，用數数形式判别素数与合数的这种方法，在数论的今后研究中，将会起到非常重要的作用。

《周易》也称为《易经》，它是我国最古老的一部经典著作，也是灿烂的中华文化的总源头。在《周易·系辞》中说："上古结绳而治，后世圣人，易之以书契"，这里"书契"是指在骨头上或竹、木、石片上刻字。从《周易·系辞》里这段话的意思可以看出，在上古时期已经用结绳记数的形式作为对日常事件的记录方法，然后对这些绳结进行數数并处理这些绳结所记录的事件。后来改用在骨头、竹、木、石片上刻画符号来代替结绳方法，这就是文字发明的开始。显然數数这种方法的产生当在文字发明之前，虽无资料可考证，但數数这种方法的产生，最少也有上万年的历史。可以说，數数是产生自然数的一种最原本形式。在华罗庚的《数学的用场与发展》一书中，对数与數的关系、数与量（读作 liàng）的关系时说："数起源于數，如一、二、三、四、五……一个、两个、三个……量（读作 liàng）起源于量（读作 liáng）。先取一个单位作标准，然后一个单位一个单位地量，天下虽有各种不同的量，如尺、斤、斗、秒、伏特、欧姆和卡路里等等，但都必须通过数才能确切地把实际的情况表达出来。所以"数"是各种各样不同量的共性，必须通过它才能比较量的多寡，才能说明量的变化"。从《周易·系辞》到《数学的用场与发展》，不论古今中外的历史记载还是从研究自然数性质的纯数学领域内，在数学发展的漫长历史中，我们除认为數数是一种最简单的计数方法与产生自然数原本形式外，对于數数这种原本形式的性质、规律来说，却找不到任何研究结果或方法。显然在自然数列内，用數数这种形式判别素数与合数的方法，在今天的数学研究中是找不到理论根据的。同时也说明我们现在对于數数这种原本形式的性质、规律还缺乏更深的认识或了解。

从人类文明刚刚开始发展的时候起，人们在自然数中就已经注意到一个独特的事实，有些数的性质好像十分孤独，这就是素数，如：

$$2,3,5,7,11,13,17,19,\cdots$$

这些数只能被 1 和它们自己本身除尽，除此之外，就再也不能被其他任何数整除了。对于这些数的识别，在数论研究中最古老最基本的方法就是"古典筛法"。它是希腊数学家、天文学家埃拉托色尼[②]（公元前三世纪）所创造的。这是在自然数中寻找素数时的一种最简单最实用的方法，一般称之为"埃氏筛法"。直到 1920 年前后，作为研究哥德巴赫猜想这一问题的一种方法，才由挪威数学家维果·布朗首先对"埃氏筛法"作了具有理论价值的改进，称之为"布朗

①阿尔伯特·爱因斯坦（Albert Einstein，1879.3–1955.4），物理学家，思想家，哲学家，美国、瑞士双重国籍。

②埃拉托色尼（Eratosthenes，约公元前 274–公元前 194），古希腊地理学家，天文学家，数学家和诗人。

筛法”[①]。1950年前后，又有挪威数学家西尔贝格[②]对埃氏筛法作了另一重大改进，称为“西尔贝格筛法”。除此之外，还有不同形式的“加权筛法”等方法。经改进后的这些筛法，都是建立在“集合论”“函数论”这些基础上的，它们都具有一定的理论价值。在哥德巴赫猜想的证明中，陈景润的最好结果就是利用加权形式的西尔贝格筛法所得到的。这是筛法理论的最卓越的运用结果，在国际上并且一致地将这一结果称为“陈景润定理”。但是，作为筛选素数的方法来说，埃氏筛法仍是一种非常实用的筛法。因此，“现在所做出之素数表，无一不由此法略加变化而得者”（见华罗庚著《数论导引》）。

经过改进后的这些筛法，在哥德巴赫猜想这一问题的研究中，不仅起着非常重要的作用，而且推动了整个解析数论的发展。但是，包括埃氏筛法在内的以上所有这些筛法，没有一种能够表明合数或是素数在自然数列中的分布规律，正是由于这一原因，使得“目前对哥德巴赫猜想及整个解析数论的研究，正处于一个期待着新突破的相对停滞阶段”（见潘承洞、潘承彪著《哥德巴赫猜想》）。所谓哥德巴赫猜想就是指将偶数表为两素数和的问题。例如：

$$6=3+3,\quad 8=3+5,\quad 10=3+7,$$
$$12=5+7,\quad 14=3+11,\quad 16=5+11,\cdots$$

问题之简单，证明之困难不能不说明我们对素数甚至整个自然数的性质知道的极其肤浅所造成的。

由于人们认为“素数”是组成自然数的基本材料，因此在数论研究中，大部分问题都与它有关。判别给定的一个整数是否为素数，或是将一个大合数分解为素因子的乘积，这在数论研究中，同样是一个最基本最古老的问题。公元前50年左右，我国第一部数学名著《九章算术》[③]与公元前三世纪欧几里得[④]的《几何原本》都分别地介绍了辗转相除法。在《孙子算经》[⑤]一书中，更有闻名于世的“中国剩余定理”（即孙子定理）。对以上问题的研究中，在历史上曾吸引了包括费马、欧拉、勒让德[⑥]和高斯[⑦]在内的大批数学家。由于素数在数论中占有特殊地位，许多数学家都用了大量的时间和精力来研究这个问题。例如：$2^{131}-1$是否素数？由23个1组成的数是否为素数？怎样分解31487694841572361？对于类似这样的数，总想寻求一个素数的判别方法和对大合数的分解方法，这对计算机科学来说也是很有价值的。但是至今为止，仍然没有一个很好的素数判别方法，人们虽一般偏向于认为存在着素数判别的多项式算法，然而至今仍未能找到。

通过对大量的数学资料进行查证，用數数这种形式作为区别素数与合数的方法，在数学研究中不仅找不到理论根据，就是在所谓的各种筛法以及现在对素数的判别和大合数的分解方法中，也找不到这样的數数形式。从具体到抽象这是数学发展的一条重要大道，既然在自然数列内用數数的形式能够区别素数与合数，那么數数与素数或合数之间就必然存在着相应的关系，显然通过对數数这种原本形式的讨论，也一定能够找到它们之间所存在的规律。

我们还在咿咿呀呀学语的幼儿时，第一次接受到的文化知识教育就是數数这种方法。这

---

①维果·布朗（Viggo Brun 1885.10–1978.8），挪威数学家。

②西尔贝格（Selberg，Atle，1917.7.6–），挪威数学家。

③《九章算术》，约公元一世纪前后。

④亚历山大里亚 欧几里得（约公元前330–前275），古希腊数学家。

⑤《孙子算经》，约四、五世纪。

⑥勒让德（Adrien Marie Legendre，1752–1833），法国数学家。

⑦高斯（Johann Carl Friedrich Gauss，1777.4–1855.2），德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家。

不仅由于數数是最最简单的一种计数方法，更主要因为數数这种方法也是我们人类认识自然、改造自然的一种基本形式。从人类文明发展过程中的原始社会起，通过數数与结绳记数的方法到现代计算机这种高科技的普及，在这几千年甚至上万年的漫长历史中，“数起源于數”，这已成为一种公理化模式。自然数产生以来，人们就已对它不断地进行了研究，虽然至今为止，数学已成为无所不包的庞大体系，也是科学技术发展的重要工具，但对于产生自然数这一原本的數数形式的认识或了解，却并不十分深刻。我们不论在考古发现的文物中，还是从数学研究的所有文献资料中都可以看出，除了认为自然数的产生起源于數数过程，或对数学的演变与发展有所了解外，对于數数与自然数之间所存在的性质与规律的研究则是很少的。所谓《自然数原本數数论》，就是通过图表形式和具体的數数方法，对數数这种原本形式与自然数之间所存在的各种规律进行讨论的一种数学理论。

克林凯尔[①]有句名言：“最容易和最简单的东西往往是最难找到的”那样，当对这一最简单的數数形式通过多方面地论证后，使区别素数与合数的这种方法，进一步发展为新的筛法理论——“薛氏筛法”。在对薛氏筛法表逐步进行讨论时将会惊奇地发现，自然数中的许多性质都与數数规律紧紧地联系着。有些性质或规律是我们已知的，有些正处于研究阶段，而有更多性质或规律则是从未发现过的。不论是筛选素数的方法，还是讨论自然数的各种规律以及各方面的理论根据，与前面提到的任何一种筛法都有本质上的不同。把合数分解成素因子的乘积式，是算术基本定理在构造方面研究的问题，但在对筛法表的填写过程中，自然数的这种性质则被明显地表现出来。而用最简单的加法形式，则可填写出一个完美的素数、合数分解两用表。同时涉及素数、合数、因子、除数、被除数、商数、余数等互相之间的各种关系。在今天的数论研究中，像素数的判别与大合数的分解、哥德巴赫猜想、孪生素数猜想、素数幻方猜想等自然数中至今未能解决的难题，它们分别依不同的性质或规律存在于自然数中。在薛氏筛法表内的具体數数实验条件下，它们的这些性质或规律则被充分地揭示出来。对于研究自然数的这些性质来说，如果仅凭现今数论中那些不同的数论函数理论、集合理论、圆法、三角和估计法以及密率等这些证明方法，来解决以上这些难题不但是非常困难的，也可能是无法解决的。

在对薛氏筛法的系统讨论中，全部是在數数这一原本基础上进行的。对于这一筛法理论的研究，并不亚于发现一种新的数学体系。对于数论的今后研究来说，也将会涉及其中许多问题的改进。

由于作者水平有限，虽然产生自然数这种原本形式的數数方法极为简单，但因它的性质、规律和所涉及的问题较多，因此，很可能还有许多性质或规律等待着我们对它进行更深地探讨和发掘。同时在这些讨论过程中，被引用的一些新的概念、定义、定理及公式的运用等方面，难免出现这样或那样的许多问题。因此，切望读者不吝赐教，这是作者最大的心愿。（有任何建议和意见请发邮件至 sxzzxhm@163.com）

本书由太原理工大学卢准炜、陈俊杰，山西大学燕居让、张连平，太原师范学院王川龙长治学院王政庭等六位大学教授推荐出版，作者在此对他们深表感谢！同时对参与编辑和审稿老师们的辛苦付出，表示衷心的谢忱！

薛海明

①克林凯尔，德国学者，《外国名言一千句》。

目　录

第一章　自然数

1.1　数是什么

“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学”，那么数究竟是什么呢？我们能够明确地回答这个问题吗？一般也可能会借助于某种客观事物来加以说明。比如路旁边有三行树，按惯例可數出：一、二、三、四、五、六、七、八、九来，每行九棵树，这样，就可以计算出这三行树数共有 $3 \times 9=27$

在这里，27 就是这些树的一个数目。用數出的这些数并加以计算，用来回答上面的问题，似乎可以说明数的本质。即：①通过对空间事物數数这种方式得到了数；②数可以使用一定的方式进行运算；③一个数同空间事物相联系时，可表明这些事物量的多少。

由于应用数的实际场合是那么多，所以也会常常错误地认为数就是我们这个物质世界的属性，数本身同客观事物不可分割。因此，这里有必要把数以及有关数的一些基本性质或概念首先弄清楚。

数的各个概念，它都是由人类生活和生产实践的需要而逐步形成发展起来的。在自然数发展史的最初阶段，由于计量的需要，通过对空间事物进行數数这一原本形式的计数方法，因此，由计量而计数，产生了“自然数”（亦称正整数）这一概念。像上面用數数的方法所數出来的树数，就叫做自然数。“1”是自然数的基本单位，任何自然数都是由若干个“1”所组成的。自然数是无限多的，在自然数中是找不到最大的自然数。也可以说在數数这一基本过程中，只要有可數的事物，就能够不断地數下去。因为自然数是數出来的，如果數出的这个数是 a，那么就会很容易地找到与 a 相邻的下一个数 $a+1$。$a+1$ 则称为 a 的“后继数”，一个数的后继数，就是紧接在这个自然数后面的数，也是自然数。例如 1 的后继数是 2，2 的后继数是 3，以此类推。如此下去，显然从 1 开始，每个数都有它的后继数，叫做數数的顺序性或后继性。数学家菲耶诺①指出：所有全体自然数的“个数”是數不完的，即无穷多的。对于自然数的这些性质，在数学史上则称为菲耶诺公理。像 1，2，3，4，5，6，…这些自然数，虽然是从數数过程中产

①菲耶诺（皮亚诺）（Peano，Giuseppe，1858.8–1932.4），意大利数学家。

生出来的，但是，數数并不是产生数的唯一方法。这是因为有些数，像无理数、虚数、复数等，它们是不能靠數数这种方法产生的。但离开了數数也就没有数的概念。比如文史学科的文学，艺术之类，无“数”亦成书。不论是自然数，还是无理数、虚数、复数等不同的数，我们都应该把这些数，看作是由一些遵循着它们自己的内在规律的符号所组成的虚幻世界。如果让我们明确清楚地回答数是什么这一问题，可以用这样一句话来精炼地加以概括它：**数是可以用来进行运算，并且能同客观事物相联系的一些符号。更简单地说，数表示数的对象具有运算属性的符号**。这些符号，就是通常所说的数字。我们现在习惯运用的这些数的符号，一般是指阿拉伯数字而言的。

数与量之间，它们是紧紧联系在一起的。凡是可以测量的事物，就能够通过对它进行數数计量而得到一个数。任何一种事物，都可以用同一类的量做单位来度量它的大小、多少、长短、高低等等。**数就是计量的一种形式，计量的结果就是数**。我们把这些数的符号用书面形式记录下来就为记数，也称写数。对于写出来的这些数的符号则称为数字或数码。下列诸数…，–3，–2，–1，0，1，2，3，…统称为整数。在數数过程中所产生出来的自然数，则是指1，2，3，4，5，6，…这些正整数。

自然数按照數数的顺序所组成的数列，即：1，2，3，4，5，6，…叫做自然数列。

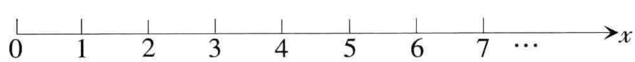
自然数列具有以下一些性质：

（1）自然数列是有始的，自然数列中最前面的一个自然数是“1”，1 是自然数的基本单位。

（2）自然数列是有序的，自然数列里的自然数都是按一定顺序排列着的。如在 1 后面的自然数是 2，在 2 后面的自然数是 3，…这就是说，每个自然数后面都有一个而且只有一个后继数。

（3）自然数是无限的，在自然数列里，不存在最后的数。但在自然数列的最前面添上一个“0”，就成为扩大的自然数列。即：0，1，2，3，4，5，…在扩大的自然数列里，只有“0”不是自然数。

（4）我们把自然数列用下面的数轴形式表示出来：



从数轴中可以看出，这列自然数在数轴中的位置，每个数都处在一个个孤立的位置上。数与数之间的点，是以一定距离这种间断形式进行排列的。自然数列的这一性质，被称为“**自然数的离散性**”。

（5）我们可以任意地写出几个不同的自然数，在这些数中总是可以找到其中最小的一个数或是最大的一个数，这一性质则称为“**自然数的良序性**”。

以上这些性质，是自然数的几个主要性质，我们能够用数的形式去研究空间事物的规律，这与数本身具备的这些性质所分不开的。

1.2　自然数的发展史

数是人类进入文明社会的一种标志，而我们伟大的祖国则是人类文明的发源地之一。在我国云南、贵州、河南、陕西、山西、北京等地都发现了原始人的遗骨和遗物化石。

(1)元谋猿人，在我国云南省元谋县发现，距今170万年，这是我国已知祖国境内最早的人类。

(2)蓝田猿人，在陕西省蓝田县发现，距今约80万年，是一种较原始的人类。

(3)北京人，在北京西南周口店发现，距今50万～40万年。

对于自然数的产生年代虽无法考证，但从上面人类历史的发展年代看，數数的计数形式产生最少也有几万年甚至十多万年的历史。

在远古时代，当原始人类还过着穴居野外生活时，根本不知道什么是文化。他们在和大自然斗争中，慢慢地学会了饲养、种植、开垦田地……也就渐渐有了“有”或“没有”(无)“多”“少”这些数的蒙昧概念。经过很长时间的观察，人们发觉“有”“多”“少”总是依各个个体所组成的。如一个太阳、一个月亮、一个人、一棵树等等，这种现象在人们的脑子里，通过反复多次的认识，这就首先有了“1”这个数的概念。人们长有两只手、两个耳朵、一双眼睛等，这种形式又都是由两个“1”所组成，于是“2”这个数也跟着产生了。而多于三个以上的数时就數不清了，这种现象直到现代还有一些不发达地区存在着相似的形式。例如澳大利亚的波利尼业群岛——南太平洋岛屿，法国殖民地，包括土阿莫土群岛、社会群岛等，以及托列斯海峡群岛——在澳洲与新几内亚之间这些地区中的一些不发达民族的语言里，就只有头几个自然数的名称。他们把3叫做2-1，把4叫做2-2，把5叫做2-2-1，把6叫做2-2-2，6以上的数就叫做“多”，或说成“许多”与“无数”之类的话。人类在漫长的历史中，由于计量的需要，从“1”“2”这种最简单的數数基础上经过不断地发展，才逐步形成用數数进行计量这种最原始的方法，这时虽然还不能使用文字符号来表示自然数，但通过數数的方法却产生了自然数这一最基本的数学形式。因此，一般也把數数这种方法称为计数方法。

早在五六十万年前，我们的祖先就在黄河流域一带生息繁衍，开始了中华民族灿烂的古代文化。如在《易经》这部最古老的经典著作中说：“古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观象于地，观鸟兽之文，与地之宜。近取诸身，远取诸物，于是始作八卦……”从这段记述中可以看出远古时期，在伏羲氏为天下王时，他对日月星辰、山川动物等自然现象通过详细

的观察和了解，终于首创了八卦这一特殊的符号系统。在今天对《易经》的研究中证明，八卦的产生与它的符号表现方式，不仅同數数规律有关，同时也包含着严谨的数学结构。可见在远古时期，我们的祖先已对數数以及自然数这些数学形式进行了深入地研究。在《易经》中还说：“包牺氏没，神农氏作。斲木为耜，揉木为耒，耒耨之利，以教天下，盖取诸益。日中为市，致天下之民，聚天下之货交易而退，各得其所，盖取诸噬嗑。神农氏之后的黄帝、尧、舜氏作、通其变、使民不倦、神而化之、使民宜之……是以天祐之、吉无不利”。从这里又可以看出，在伏羲氏之后的神农氏时期，生产力已有了很大的发展。初步有了简单的耒、耜等生产工具，同时也出现了物质的交易方式。在神农氏之后的黄帝、尧、舜等人，由于他们精通一定事物变化规律，建功立业就像是得到了上天的佑助一样，所以受到了人民的拥戴，显然这些都同对数学知识的具体应用所分不开的。

在我国另一部古书《世本》里曾记载了这样一个有趣的传说：大约在公元前 2500 年的时候，当黄帝族击败了炎帝族并在天下称王之后，曾命令他的臣子羲和去观测太阳，常议去测量月亮，伶伦去编制音乐……后来又叫一个大臣隶首去创造数……显然这一传说是不可信的。还有的人认为：“上帝”是万物的起源，他创造了地球和人，也把数赐给了人间。例如 17 世纪德国大数学家、哲学家莱布尼茨[1]，他在《易经》先天八卦中叫做阳爻“—”与阴爻“--”的这两个符号启示下，提出了二进位制。虽然这种二进位制已在今天的计算机科学中得到了应用，但由于他认为二进制数与先天八卦是相吻合的一种数学形式，同时他又倾向于神秘主义，所以给二进制数加上了宗教的意义。他把所有的数都可以用“0”和“1”表示出来的这个事实，解释为“上帝创造万物”的一个证明。他认为“1”表示上帝，而“0”表示空和无，正像上帝能够从无到有创造万物一样，这是一统天下的明证。并把这一奇异的结论告诉了我国的康熙皇帝，希望中国的皇帝和臣民皈依基督教。在 19 世纪 70 年代，而且还有个名叫克隆尼克[2]的德国人还说：“整数是被亲爱的上帝造成的，其他都是人的工作”。显而易见，以上关于数的产生这些说法，显然是些无稽之谈。恩格斯[3]曾说过：“数和形的概念不是从其他地方，而是从现实世界中得来的”。无数历史事实都可以证明数的产生，是人们在漫长的岁月中，通过对现实世界认识的不断提高与对数学的不断改进而逐步形成的。

最初，人类的祖先为了计数，他们把事物的多少同在身边放一些石子，或在绳子上打些结，或在一根本棒上刻些道道，或者把手指扳上扳下等这些简单形式，与某些事物进行一一对应的原始方法，来对事物的多少进行數数计数的。可以看出，數数这种原始作法，基本上就

①戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646–1716），德国哲学家、数学家。

②克隆尼克（L.Kronecker，1823–1891），德国数学家。

③恩格斯（Friedrich Von Engels，1820.11–1895.8），德国思想家、哲学家、革命家。