测量误差与不确定度数学原理

崔伟群　杭晨哲　田　锋　著

中国质检出版社

测量误差与不确定度数学原理

崔伟群　杭晨哲　田　锋　著

中国质检出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

测量误差与不确定度数学原理/崔伟群,杭晨哲,田锋著.—北京:中国质检出版社,2013.11
ISBN 978-7-5026-3899-3

Ⅰ.①测… Ⅱ.①崔…②杭…③田… Ⅲ.①测量误差②测量-不确定系统-数学模型 Ⅳ.①P207②TB9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 234572 号

中国质检出版社出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲 2 号(100013)
北京市西城区三里河北街 16 号(100045)
网址 www.spc.net.cn
总编室:(010)64275323 发行中心:(010)51780235
读者服务部:(010)68523946
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 8.5 字数 200 千字
2013 年 11 月第一版 2013 年 11 月第一次印刷

*

定价 49.00 元

误差理论与不确定度理论之间的桥梁

（代序）

JCGM 100:2008 Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement 的第 2.2.4 中提到：不确定度与用误差或者真值出现区间评估被测结果的说法是一致的，但不确定度是实际使用的评估方法，它针对的是可知的被测结果，而不是像误差或者真值那样是不可知的。这就是说从理论上讲，使用误差或者不确定度来评定测量结果都是可行的，二者之间没有天然的鸿沟。

但实际上，误差和不确定度又存在着明显的区别。误差理论的结果一般是给出了最大允许误差的估计值，而不确定度的评估结果指明了一个可知概率的估计区间。两者都同样给出了一个估计区间，只是不确定度理论给出了相应的估计概率。那么我们就要思考，如果知道最大允许误差表示的区间概率，那误差理论是否就能变成不确定度理论？

带着这样的问题，我们从最简单的理论测量误差模型为起点逐渐推导到实际使用的测量误差模型，得到的结果令人欣喜和震惊。在本书第五章第 5 节的特殊情况中得到的区间估计公式(5-12)与不确定度理论传播公式相同。当然，本书除了使用误差理论来证明不确定度理论之外，还引申出了其他的一些非常有用的结论。例如，可以从理论上证明：同一被测量使用相同规格的多台不同仪器测量所得结果的平均值能够减小系统误差的影响；比对结果为什么要使用 Z 比分法评价；定量包装测量结果的不确定度评定方法等。当读者阅读本书时，请不要为繁复的推导过程烦恼，了解模型和掌握结论是我们期望给一般读者最好的礼物。可惜的是，限于篇幅和资金的原因，本书删减了大量引申结论，感兴趣的读者可以带着一个开放的心态自己发掘。在本书的结尾处，我们又遇到了困难。我们的理论介于误差和不确定度这两个原本“势不两立”的兄弟之间，那我们的理论该叫什么名字呢？经过权衡后，我们把最后的结果称为不确定度。当然，我们也相信这是理论自身的选择。

限于作者水平，本书错漏之处在所难免，诚请广大读者批评指正。

最后还要说一句，既然我们从事了计量事业，就希望能够尽自己的绵薄之力，让她变得更好，因此我们把这本书和作者三年的努力献给她。

2013 年 8 月

于中国计量科学研究院

前 言

人类认识客观世界是一个逼近真实的过程。在此过程中，有时由于不能完全掌握产生客观现象的因果关系，导致认识上缺失了因果律，只能通过随机理论来描述；有时由于不能完全真实地掌握或描述客观现象，进而借助粗糙理论来描述；并且有的客观现象不能非此即彼地应用排中律，所以只能借助模糊理论来描述。这就使我们对客观世界的认识具有了不确定性。

在这一人类认识客观世界逼近真实的过程中，我们主要做两件事情。第一是尽量控制或减少认识的不确定性；第二是评估认识的不确定性。特别是实验科学中的测量工作，这两点同样重要。但是在控制或减少的手段有限时，恰当地评估认识的不确定性则显得更为重要。

爱因斯坦说过，“我们的概念和概念体系所以能够得到承认，其唯一的理由就是它们是适合于表示我们的经验的复合；除此以外，它们并无别的关于理性的根据”。因此恰当地评估认识的不确定性，特别是测量结果的不确定性，需要一整套适合于表示我们的经验的复合的概念和概念体系。

1927 年海森堡(Heisenberg)提出了不确定原理，又称测不准原理，首次使用了不确定(uncertainty)一词。

1963 年原美国标准局(NBS)的数理统计专家埃森哈特(Eisenhart)在研究“仪器校准系统的精密度和准确度估计”时提出了测量不确定度的概念。其后各国计量部门逐渐使用不确定度来评定测量结果，但采用的方法不尽相同。

1980 年国际计量局在征求各国意见的基础上，提出了采用测量不确定度来评定测量结果的建议书 INC-1(19880)，1981 年第 70 届国际计量委员会(CIPM)讨论通过了该建议书，形成了 CI-1981。

1986 年国际计量局(BIPM)、国际电工委员会(IEC)、国际标准化组织(ISO)、国际法制计量组织(OIML)、国际理论和应用物理联合会(IUPAP)、国际理论和应用化学联合会(IUPAC)以及国际临床化学联合会(IFCC)等联合成立了工作组，起草关于不确定度评定的指导性文件，并于 1993 年联合发布了《测量不确定度表示指南》(*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*，简称 GUM)。2008 年又发布了 GUM 的最新修订版。

1999 年我国发布了 JJF1059-1999《测量不确定度评定与表示》。2012 年，我国又发布了新版的 JJF 1059.1—2012。

然而直至目前，计量界对于不确定度的认识依旧有分歧，这主要源于所有标准规范只是原则性地规定了应该如何进行测量不确定度评定，而大量关于不确定度评定的参考书籍也主要着眼于如何进行评定，并未给出关于不确定度的数学和测量学原理的清晰阐述，从而导致对不确定度认识的分歧。

本书从计量学的六个定义出发，建立了八类测量误差理论数学模型，并依据数理统计原理，逐步阐述了测量不确定度的数学原理。本书共分五章，内容包括：

第一章概率论及数学基础，对概率论及泰勒级数比较熟悉的读者可以跳过该章。

第二章测量误差，该章以计量学的六个定义为核心，给出测量误差的理论公式。

第三章测量误差理论分析，该章以计量学的六个定义为依据，建立了八类测量误差理论数学模型，并给出使用误差平方期望和误差期望平方的估计评价单次测量值和测量均值的理论公式。

第四章测量数据的统计计算，该章对八类测量误差理论数学模型中误差平方期望和误差期望平方理论公式中的可统计计算部分进行了理论分析；给出了误差平方期望和误差期望平方理论公式中，哪些部分是可以利用已有测量数据进行统计分析得到的，哪些部分是不能够利用已有测量数据统计分析计算的，从而从理论上对八类测量误差理论数学模型中误差平方期望和误差期望平方理论公式的估算进行了区分。

第五章利用概率分布进一步估算及测量不确定度，该章利用已有的最大系统误差信息对第四章中误差平方期望和误差期望平方的不可统计计算部分进

行了估计，从而给出了误差平方期望和误差期望平方的另一种估计值，并且依据概率论，进一步给出了被测量真值所在的区间概率的理论公式及推导过程；最后该章给出了测量标准不确定度的定义，以及八类测量误差理论数学模型所对应的测量标准不确定度的计算公式。

在本书成书过程中，得到中国计量科学研究院的同事们给予的大力支持，在此表示衷心感谢。由于作者的学识有限，书中错漏之处在所难免，敬请读者不吝赐教！

崔伟群

于中国计量科学研究院

2010 年 3 月

目录

第一章　概率论及数学基础 …………………… 1

第一节　基本概念、定义及性质 ………………… 1
第二节　随机变量及其分布 ……………………… 3
第三节　随机变量的数字特征 …………………… 6
第四节　样本及抽样分布 ………………………… 8
第五节　置信区间 ………………………………… 11
第六节　泰勒级数 ………………………………… 11

第二章　测量误差 ………………………………… 13

第一节　基本概念 ………………………………… 13
第二节　测量误差模型 …………………………… 17

第三章　测量误差理论分析 ……………………… 18

第一节　测得值的理论数字特征及测量目的 …… 18
第二节　测量模型Ⅰ的误差分析 ………………… 20
第三节　测量模型Ⅱ的误差分析 ………………… 22
第四节　测量模型Ⅲ的误差分析 ………………… 24
第五节　测量模型Ⅳ的误差分析 ………………… 27
第六节　测量模型Ⅴ的误差分析 ………………… 31
第七节　测量模型Ⅵ的误差分析 ………………… 34
第八节　测量模型Ⅶ的误差分析 ………………… 40
第九节　测量模型Ⅷ的误差分析 ………………… 46
第十节　误差平方期望和误差期望平方及其
　　　　估计的测量学意义 ……………………… 57

第四章 测量数据的统计计算 …… 60

第一节 模型Ⅰ测量数据的统计计算 …… 60
第二节 模型Ⅱ测量数据的统计计算 …… 61
第三节 模型Ⅲ测量数据的统计计算 …… 61
第四节 模型Ⅳ测量数据的统计计算 …… 63
第五节 模型Ⅴ测量数据的统计计算 …… 65
第六节 模型Ⅵ测量数据的统计计算 …… 66
第七节 模型Ⅶ测量数据的统计计算 …… 68
第八节 模型Ⅷ测量数据的统计计算 …… 70

第五章 利用概率分布进一步估算及测量不确定度 …… 77

第一节 真值、系统误差概率分布的测量学原因 …… 77
第二节 利用最大熵原理估计概率分布 …… 77
第三节 模型Ⅰ的进一步估算及区间概率 …… 79
第四节 模型Ⅱ的进一步估算及区间概率 …… 82
第五节 模型Ⅲ-1 的进一步估算及区间概率 …… 84
第六节 模型Ⅲ-2 的进一步估算及区间概率 …… 88
第七节 模型Ⅳ-1 的进一步估算及区间概率 …… 90
第八节 模型Ⅳ-2 的进一步估算及区间概率 …… 93
第九节 模型Ⅴ-1 的进一步估算及区间概率 …… 95
第十节 模型Ⅴ-2 的进一步估算及区间概率 …… 98
第十一节 模型Ⅵ-1 的进一步估算及区间概率 …… 100
第十二节 模型Ⅵ-2 的进一步估算及区间概率 …… 102
第十三节 模型Ⅶ-1 的进一步估算及区间概率 …… 105
第十四节 模型Ⅶ-2 的进一步估算及区间概率 …… 107
第十五节 模型Ⅶ-3 的进一步估算及区间概率 …… 109
第十六节 模型Ⅷ-1 的进一步估算及区间概率 …… 112
第十七节 模型Ⅷ-2 的进一步估算及区间概率 …… 114
第十八节 模型Ⅷ-3 的进一步估算及区间概率 …… 117

第十九节 测量不确定度相关定义 …… 119

附表 …… 121
参考文献 …… 125

第一章 概率论及数学基础

第一节 基本概念、定义及性质

一、随机试验

在概率论中,将具有以下三个特点的实验称为随机试验:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪个结果会出现。

一般随机试验记为 E,简称试验。

二、样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为样本空间,记为 S。

每一个可能结果称为样本点。

三、随机事件

随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称事件。在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生。

每一个样本点组成的单点集称为基本事件。

样本空间 S 称为必然事件。空集 $\varnothing$ 称为不可能事件。

四、事件间的关系及运算

1. 事件间的关系

随机试验 E 的样本空间为 S,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集:

(1) 若 $A\subset B$,则称事件 B 包含事件 A,事件 A 发生必然导致事件 B 发生。

(2) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等。

(3) 事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件,当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A\cup B$ 发生。

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件。

(4) 事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件,当且仅当 A,B 同

时发生时，事件 $A\cap B$ 发生，也记作 AB。

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件。

(5) 事件 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，当且仅当事件 A 发生、B 不发生时，事件 $A-B$ 发生。

(6) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥。基本事件两两互不相容。

(7) 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件或对立事件。事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}=S-A$。

2. 运算定律

在事件运算时，经常要用到下述定律，设 A,B,C 为事件，则有

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(4) 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

五、概率

1. 概念

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 中的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对 $i\neq j$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots)$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1-1}$$

2. 性质

概率具有如下一些重要性质：

(1) $P(\varnothing)=0$

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1-2}$$

(3) 设 A,B 是两个事件，若 $A\subseteq B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1-3}$$

$$P(B)\geqslant P(A) \tag{1-4}$$

(4) 对于任一事件 A：$P(A)\leqslant 1$

(5) 对于任一事件 A：$P(\overline{A})=1-P(A)$

(6) 对于任意两事件 A,B：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-5}$$

六、条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-6}$$

为事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率。

七、全概率公式和贝叶斯公式

设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若

(1) $B_iB_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots,n)$

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分。

设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n) \tag{1-7}$$

称为全概率公式。

设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},i=1,2,\cdots,n \tag{1-8}$$

称为贝叶斯(Bayes)公式。

八、独立性

设 A,B 是两个事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-9}$$

则称事件 A,B 相互独立，简称 A,B 独立。

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，如果对于其中任意 2 个，任意 3 个，…，任意 n 个事件的积事件的概率，都等于各个事件概率之积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

第二节 随机变量及其分布

一、随机变量

设随机试验的样本空间为 $S=\{e\}$，$X=X(e)$是定义在样本空间 S 上的实值单值函数，则称 $X=X(e)$为随机变量。

二、离散型随机变量及其分布律

如果随机变量的全部可能取到的不相同的值是有限个或可列无限多个，这种随机变量称为离散型随机变量。

设离散型随机变量 X 所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$，X 取各个可能值的概率，即事件

$\{X=x_k\}$的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots) \tag{1-10}$$

若 p_k 满足如下条件：

(1) $p_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots)$；

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$。

则称式(1-10)为离散型随机变量 X 的分布律。

三、几种常用的离散型随机变量的分布律

1. 0-1 分布

设随机变量 X 只能取 0 与 1 两个值，它的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k} \qquad (k=0,1;0<p<1) \tag{1-11}$$

则称 X 服从(0-1)分布或两点分布。

2. 伯努利试验、二项分布

设试验 E 只有两种可能结果：A 及 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利(Bernoulli)试验。

设 $P(A)=p(0<p<1)$，此时 $P(\overline{A})=1-p$，将 E 独立地重复进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验，则其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n) \tag{1-12}$$

又称随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记为 $X\sim b(n,p)$。

3. 泊松分布

设随机变量 X 所有可能取的值为 $0,1,2,\cdots$，而各取值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{1-13}$$

其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布。

四、随机变量的分布函数

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$ 称为 X 的分布函数。对于任意实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\}=F(x_2)-F(x_1) \tag{1-14}$$

分布函数 $F(x)$ 具有以下基本性质：

(1) $F(x)$ 是一个不减函数；

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且 $F(-\infty)=0,F(\infty)=1$；

(3) $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 为右连续函数。

五、连续型随机变量及其概率密度

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，使对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt \tag{1-15}$$

则称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度。

概率密度 $f(x)$ 有如下性质：

(1) $f(x)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$；

(3) 对于任意实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$；

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$。

六、几个重要的连续型随机变量分布

1. 均匀分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1-16}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，记为 $X:U(a,b)$。

2. 指数分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1-17}$$

其中 θ 为常数，且 $\theta>0$，则称 X 服从参数为 θ 的指数分布。

对任意有 $s,t>0$：

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\} \tag{1-18}$$

该性质称为指数分布的无记忆性。

3. 正态分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<\infty \tag{1-19}$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯(Gauss)分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。特别地，若 X 服从参数为 $\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布，则称 X 服从标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$。

正态分布具有如下性质：

(1) 概率密度函数关于 $x=\mu$ 对称，即 $P\{\mu-h<X\leqslant\mu\}=P\{\mu<X\leqslant\mu+h\}$。

(2) 当 $x=\mu$ 时，概率密度函数取最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

(3) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

(4) $P\{\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma\}=68.26\%$；$P\{\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma\}=95.44\%$；$P\{\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma\}=99.74\%$。

第三节　随机变量的数字特征

一、数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$。若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k \tag{1-20}$$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x \tag{1-21}$$

数学期望简称期望，又称均值。数学期望具有以下重要性质（以下假设数学期望都存在）：

(1) 设 C 是常数，则有 $E(C)=C$。

(2) 设 X 是一个随机变量，C 是常数，则有 $E(CX)=CE(X)$。

(3) 设 X,Y 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$。

(4) 设 X,Y 是相互独立的随机变量，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$。

(5) 若 Y 是随机变量 X 的函数：$Y=g(X)$（g 是连续函数），则对于离散型随机变量和连续型随机变量，有

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k \tag{1-22}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x_k)f(x)\mathrm{d}x \tag{1-23}$$

二、方差

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\} \tag{1-24}$$

并记 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$，称为标准差或均方差。

随机变量 X 的方差可按下列公式计算：

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{1-25}$$

方差有以下重要性质（以下假设方差都存在）：

(1) 设 C 是常数，则有 $D(C)=0$。

(2) 设 X 是一个随机变量，C 是常数，则有 $D(CX)=C^2D(X)$。

(3) 设 X,Y 是两个随机变量，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \tag{1-26}$$

特别地，若 X,Y 相互独立，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y) \tag{1-27}$$

(4) $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C，即 $P\{X=C\}=1$。

三、几种常用分布的期望和方差

表 1-1 中列举了几种常用分布的期望和方差。

表 1-1　几种常用分布的期望和方差

分布	期望	方差
(0-1)分布	$E(X)=p$	$D(X)=p(1-p)$
二项分布	$E(X)=np$	$D(X)=np(1-p)$
泊松分布	$E(X)=\lambda$	$D(X)=\lambda$
均匀分布	$E(X)=\frac{a+b}{2}$	$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$E(X)=\theta$	$D(X)=\theta^2$
正态分布	$E(X)=\mu$	$D(X)=\sigma^2$

四、协方差及相关系数

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$。而 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 称为随机变量 X 与 Y 的相关系数。

根据协方差定义展开，有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \tag{1-28}$$

根据式(1-26)，对于任意两个随机变量 X,Y 有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y) \tag{1-29}$$

协方差具有如下性质：

(1) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$，$a,b$ 是常数。

(2) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$。

相关系数有如下定理：

(1) $|\rho_{XY}|\leqslant 1$。

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是存在常数 a,b 使 $P\{Y=a+bX\}=1$。

当 $\rho_{XY}=0$ 时，称 X,Y 不相关。并且随机变量相互独立必然不相关，反之则不一定成立。

第四节　样本及抽样分布

一、随机样本

设 X 是具有分布函数 F 的随机变量，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是具有同一分布函数 F 且相互独立的随机变量，则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从分布函数 F（或总体 F，或总体 X）得到的容量为 n 的简单随机样本，简称样本，它们的观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为样本值，又称为 X 的 n 个独立观察值。$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为：

$$F^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i) \tag{1-30}$$

若 X 具有概率密度 f，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度为：

$$f^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i) \tag{1-31}$$

二、统计量

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，若 g 中不含未知参数，则称 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是一个统计量。

常用的统计量有：

样本均值：
$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{1-32}$$

样本方差：
$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right) \tag{1-33}$$

样本标准差：
$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)} \tag{1-34}$$

它们的观察值分别为：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-35}$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right) \tag{1-36}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)} \tag{1-37}$$

三、抽样分布

统计量的分布称为抽样分布。以下为来自正态总体的几个常用统计量的分布。

（一）χ^2 分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则称统计量

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 \tag{1-38}$$