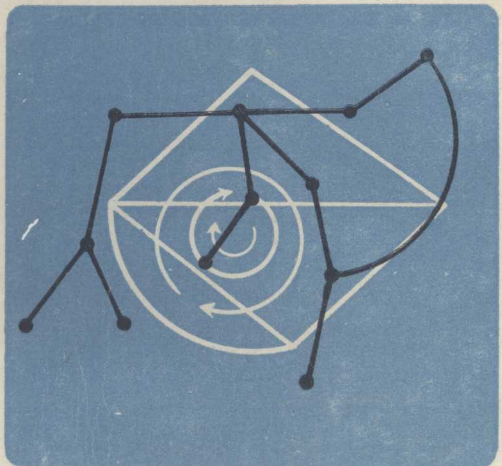


图论引论

TU LUN YIN LUN

陈光迪 方名 编

南京大学出版社

图论引论

陈光迪　方　名　编著

01110438

南京大学出版社

1990·南京

内容简介

本书是作者在南京大学数学系开设图论课所用的教材．共分12章，包括了图论的基本概念、基本内容和基本方法．全书概念清晰，文字通俗易读，并配有一定数量的练习，便于掌握和巩固所学的内容．

本书可作为高等学校数学系、应用数学系、以及管理类等专业的教材，也可供科技工作者参考．

图论引论

陈光迪 方 名 编著

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　　武进第三印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 5.625　字数 125 千

1990年5月第1版　1990年5月第1次印刷

印数 1—1500

ISBN 7-305-00286-0／O·21

定价：2.95元

前　　言

南京大学数学系于1979年春季首次开设图论课，编者就是以此书的初稿，印成讲义作为教材的。后经几次修改，成现在这本书。

本书在使用中，深得学子及同仁的好评。他们认为本书定义清晰简明，且不过于集中。行文简练确切，内容适中，易于学习掌握。认真学完此书后，即可独立在图论领域中进行研究。

本书当时虽作为数学系数学专业和计算数学专业三年级学生使用的教材，但实际上它亦适用于愿意学习和掌握图论知识的工科院校的学生、研究生，以及科技工作人员和管理人员。

图论中的算法是图论应用中的重要内容。但由于当时听课的学生大多是数学专业的，因而，书中未曾论及图论中的算法。好在近来国内外已有此类专书可供参考。

本书主要取材于J.A.Bondy和U.S.R.Murty合著的"Graph Theory With Application"，B.Bollobas著的"Graph Theory, An Introductory Course"，D.R.Fulkerson著的"Graph Theory"以及有关文献资料。

由于编者水平有限，望各方学者多多赐教。

编者

1988年3月

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1

图和子图

1.1 图和简图

现实世界的许多现象有时能简单地用某种图形来表示。这种图形由一些点和某些连接这些点的边组成。例如某工厂工作人员间的师徒关系，通讯网联络关系等等都可用这种图形表示出来。在这种图形中，人们的兴趣仅在于有多少个点，多少条边以及哪些点以边相连接。至于二点间以何种形状的边相连接，人们是不予注意的。用数学的观点抽象地考虑这种图形，人们得到了一个数学模型——图。图论就是研究图的学问。下面我们给图下一个严格的数学定义。

图G是一个有序三元串$(V(G), E(G), \Psi_G)$，其中$V(G)$是非空集合，称为图G的点集，$V(G)$的元素称为G的点；$E(G)$是同$V(G)$无公共元素的另一集合，称为图G的边集，$E(G)$的元素称为G的边；Ψ_G是联系$E(G)$和$V(G)$的单一映射，称为G的关联函数。对每一条边$e\in E(G)$，必存在唯一无序点对uv(u, $v\in V(G)$，它们可以是相同的点)，使$\Psi_G(e)=uv$，我们称e是连接u，v二点的边，而称u，v是e的端点。

举二例说明图的定义。

例 1 $G=(V(G), E(G), \Psi_G)$，其中

$$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

而Ψ_G定义如下：

$$\Psi_G(e_1)=v_1v_2,\ \Psi_G(e_2)=v_2v_3,\ \Psi_G(e_3)=v_3v_3,$$

$$\Psi_G(e_4)=v_3v_4,\ \Psi_G(e_5)=v_2v_4,\ \Psi_G(e_6)=v_4v_5,$$

$$\Psi_G(e_7)=v_2v_5,\ \Psi_G(e_8)=v_2v_5.$$

例2 $H=(V(H), E(H), \Psi_H)$，其中

$$V(H)=\{u, v, w, x, y\},$$

$$E(H)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

而Ψ_H定义如下：

$$\Psi_H(a)=uv,\ \Psi_H(b)=uu,\ \Psi_H(c)=vw,$$

$$\Psi_H(d)=wx,\ \Psi_H(e)=vx,\ \Psi_H(f)=wx,$$

$$\Psi_H(g)=ux,\ \Psi_H(h)=xy.$$

为什么人们把上述的三元串称作为图呢？因为这种三元串可用图形表示出来，而且用图形表示图有助于我们对图的研究。用图形表示图的方法是极其简单的，即$V(G)$的每一元素以小圆圈表示之，$E(G)$的每一元素以连接代表其端点的小圆圈的线表示之。作图形时，我们使线不自身相交，而且使每一线不通过不是其端点的小圆圈。当然，这种要求显然是能达到的。现将G和H的一个图形分别画在下面(图1.1)。

显然，一个图的图形不是唯一的，例如下面图形(图1.2)为G的另一个图形。

一个图的图形仅仅描绘该图的点和边之间的关联关系。然而，人们将常作出图的一个图形且视此图形即为该图。同时分别称图形的小圆圈和线为图形的点和边。

注意，在一个图的图形内，二条边可以相交而交点不是

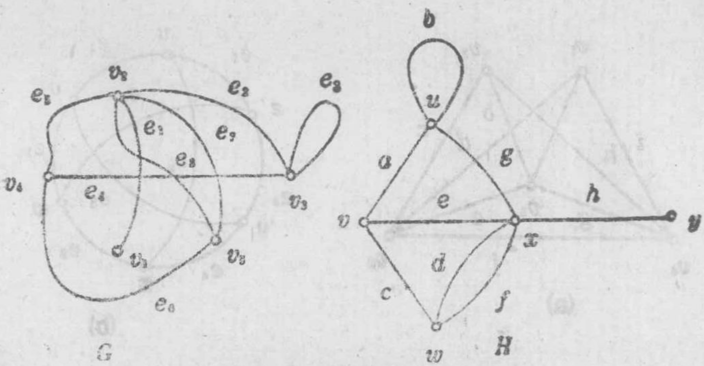


图 1.1 G和H的图形

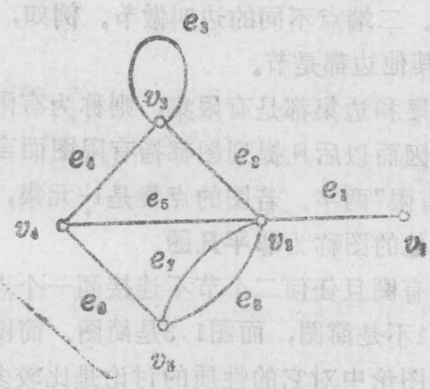


图 1.2　G的另一图形

图的点（例如，图1.1中，G的图形的边e_1和e_8，e_4和e_8等等）。

若图存在一个图形，其边仅在它们的端点相交，则称它为平面图．例如，图1.3a的图是平面图（见练习 1.1.2），图 1.3b不是平面图（证明见第 9 章）。

如图的某点是某边的端点，则称该点关联于该边，亦说该边关联于该点．若二点（可相同）为某边的端点，则说该二

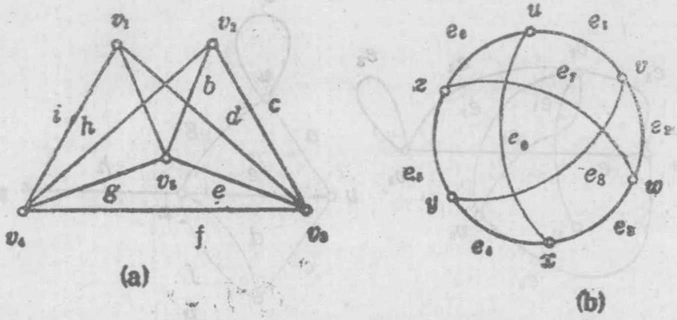


图 1.3 平面图和非平面图

点相邻。同样，关联于同一点的二条边称为相邻。二端点相同的边叫做圈。二端点不同的边叫做节。例如，G的 边 e_3是一个圈，G的其他边都是节。

若图的点集和边集都是有限集，则称为有限图。本书只讨论有限图。因而以后凡提到图都指有限图而言，而不再在“图”字前加“有限”两字。若图的点集是1-元集，则称这种图为**平凡图**。其他的图称为**非平凡图**。

若图不具有圈且任何二个节不连接同一个点对，则称它为**简图**。图1.1不是简图，而图1.3是简图。简图是比较简单的图，因而在图论中对它的性质的讨论是比较多的。

以后，我们用符号$\nu(G)$，$\varepsilon(G)$分别表示图G的点数和边数。在本书中，字母G总表示图。如果在讨论中只出现一个图，那么我们常以G表示它，而且以符号V，E，ν和ε分别代替符号$V(G)$，$E(G)$，$\nu(G)$和$\varepsilon(G)$。

练 习

1.1.1 在日常生活中举几个易于化成图的例子.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.1.2 试证图1.3a为平面图.

1.1.3 若G是简图，则$e\leqslant\binom{\nu}{2}$.

1.2 图的同构

给出两个图G，H。如果$V(G)=V(H)$，$E(G)=E(H)$，且$\Psi_G=\Psi_H$，则称G，H恒等，记为$G=H$。

显然，恒等的图可以恒等的图形表示。有时亦有如此情形：虽则二个图不恒等，但它们能有本质上相同的图形。例如，图1.2中G的图形同图1.1中H的图形有完全相同的形状，只是其点和边的记号不同而已。我们称图G和图H同构。一般言之，所谓二图G，H同构，如果存在二个1-1映射θ：$V(G)\to V(H)$和ϕ：

$E(G)\to E(H)$，使$\psi_G(e)=uv$当且仅当$\psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$。

映射对$(\theta,\ \phi)$，称为G和H间的同构映射。若G和H同构，记为$G\cong H$。

要证明二图同构，必须指出二图间的一个同构映射。

上节例1，例2的图G，H间存在同构映射$(\theta,\ \phi)$，其定义如下：

$$\theta(v_1)=y,\ \theta(v_2)=x,\ \theta(v_3)=u,$$
$$\theta(v_4)=v,\ \theta(v_5)=w.$$

和

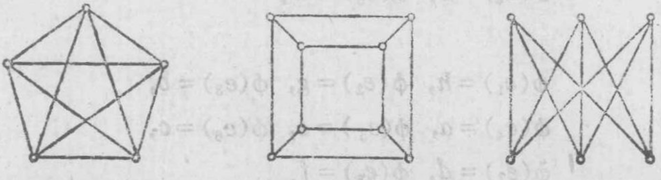
$$\phi(e_1)=h,\ \phi(e_2)=g,\ \phi(e_3)=b,$$
$$\phi(e_4)=a,\ \phi(e_5)=e,\ \phi(e_6)=c,$$
$$\phi(e_7)=d,\ \phi(e_8)=f.$$

同构的图有相同结构的图形。反之，同一个图形如将其点和边分别给予二组不同记号，则得二个同构的图。因我们

的基本兴趣在于结构的性质，故我们常常不给图形的点和边标上符号.点和边没有标上符号的图形，可看作图的一个同构类的表示。给图形的点和边标上符号，主要是为讨论时的方便。譬如，当考虑简图时，我们常将端点为u，v的边记为uv。这种记法不会产生任何不确定性，因为简图内任二点至多只有一条边连接之。

最后，我们定义一些特殊图，它们在以后的讨论中是极为重要的。

若简图中任二不同点都以一条边相连接，则称为**完全图**，如将一切同构的图视作为一个图，则n个点的完全图只有一个，记为K_n。图1.4a表示K_5的一个图形。若图的边集为空集(以后用ϕ表示空集)，则称其为**空图**。如果图的点集V存在分划(X, Y)，使它的每条边有一端点属于X，有一端点属于Y，则称它为**二部图**。而分划(X, Y)称为它的二部分划。若一个二部简图具有二部分划(X,Y)，使X的每一点同Y的每一点有一条边相连接，则称它为**完全二部图**，如果$|X| = m$，$|Y| = n$(此处，$|X|$表示集合X的元素个数)，则将此完全二部图记为$K_{m,n}$。由立方体的边和顶点定义的图(三方图)为二部图(图1.4b)。图1.4c为完全二部图$K_{3,3}$的一个图形。



(a) (b) (c)

图 1.4 (a) K_5 (b) 三方图 (c) $K_{3,3}$

练　习

1.2.1 在上节例1和例2的图G和H间，再求一个异于书中给出的同构映射。

1.2.2 (a)试证：若$G\cong H$，则$\nu(G)=\nu(H)$，

$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$。

(b) 试以例说明(a)的逆定理不成立。

1.2.3 试证：下二图不同构。

1.2.4 二简图G和H同构的充要条件是存在1-1映射θ：$V(G)\to V(H)$，使$uv\in E(G)$当且仅当$\theta(u)\theta(v)\in E(H)$。

1.2.5 设G是简图，$\varepsilon=\binom{\nu}{2}$当且仅当$G$是完全图.

1.2.6 试证：

(a) $\varepsilon(K_{m,n})=mn$。

(b) 若G是二部简图，则$\varepsilon\leqslant\nu^2/4$.

1.2.7 若图的点集可分成k个两两不相交的子集，使得任一边的二端点不属于同一子集，则称它为k部图；若图是k部简图，且每个点同不属于同一个子集的一切点以边连接，则称它为**完全k部图**. n个点的完全m部图，如其每部的点数为$[n/m]$或$\{n/m\}$，则以$T_{m,n}$表示之($[x]$为不超过x的最大整数，$\{x\}$为不小于x的最小整数). 试证：

(a) $\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$，此处$k=[n/m]$；

(b) 若G是n个点的完全m部图，则$\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{m,n})$，等号仅当$G\cong T_{m,n}$时成立.

1.2.8 若图的点集由一切有序k元串所组成，此处，k元串的每一分量为0或1；二点相邻的充要条件为二点仅有一个分量不相同，则称此图为**k方体**。(图1.4b的三方图为三方体)．试证：
k方体有 2^k 个点，有$k\cdot 2^{k-1}$条边，而且它是二部图。

1.2.9 (a) 简图G的**补图**G^c定义如下：1. G^c是简图，2. $V(G^c)=V(G)$且G^c的二点相邻当且仅当此二点在G中不相邻。试作出图 K^c_n 和 $K^c_{m,n}$。(b) 设G是简图，且$G\cong G^c$，则称G为**自补图**．试证：若G为自补图，则$\nu\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$.

1.3 关联矩阵和相邻矩阵

对任何图G相应地存在如下的$\nu\times\varepsilon$阶矩阵：设G的点集为$\{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$边集为$\{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$。以$m_{ij}$表示$v_i$和$e_j$的关联次数($v_i$为节$e_j$的一个端点，称$v_i$和$e_j$关联一次；$v$ 不是e_j的端点，即二者不关联，称v_i和e_j关联0次；e_j是以v_i为端点的圈，称v_i和e_j关联二次。故$m_{ij}=0$，1或2)。用 m_{ij} 作元素，得矩阵$M(G)=[m_{ij}]$，($i=1, \cdots, \nu$；$j=1, \cdots, \varepsilon$)，称它为**G的关联矩阵**。

对G还有另一个$\nu\times\nu$阶矩阵$A(G)=[a_{ij}]$，此处a_{ij}是连接v_i，v_j的边数(称a_{ij}为v_i，v_j 的相邻次数)。称矩阵$A(G)$ 为 **G的相邻矩阵**。图1.5表示一个图G以及它的关联矩阵 $M(G)$ 和它的相邻矩阵$A(G)$。

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	1

G　　　图1.5　　$M(G)$　　　$A(G)$

关联矩阵和相邻矩阵是一个图的二种不同表示形式。但因图的相邻矩阵一般说来要比它的关联矩阵小得多，所以图通常以其相邻矩阵的形式贮存于计算机内。

练　习

1.3.1 让M，A分别表示图G的关联矩阵和相邻矩阵.

(a) 试证：M的每一列之和是2,

(b) A的每列之和表示什么？

1.3.2 让G是二部图．试证：G的点可如此编排，使$A(G)$有下面的形式：

$$\left|\begin{array}{c|c} O & A_{12} \\ \hline A_{21} & O \end{array}\right|$$

此处 $A_{21}=A_{12}'$。

1.4 子图

让H，G是二个图。若有$V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，且Ψ_H是$\Psi_G\,|\,E(H)$（符号 $\Psi_G\,|\,E(H)$ 表示Ψ_G在$E(H)$上的限制映射），则称H为G的**子图**，记成$H\subseteq G$。如果$H\subseteq G$，但$H\neq G$，则记成$H\subset G$，称H为G的**真子图**。若H是G的子图，则称G是H的**母图**。如图G的子图H（或母图），使$V(H)=V(G)$，则称H是G的同顶子图（或同顶母图）。

从图G中删去所有的圈，而且对每一对相邻点间只留下一个节，我们得到G的一个同顶子简图，称其为G的**精简图**。图1.6表示一个图及它的精简图。

设V'是V的非空子集。以V'为点集，以二端点都在V'内的边所成之集为边集，作G的子图。这子图称为G的以V'诱

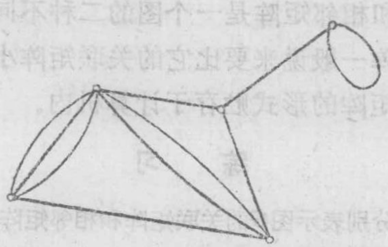


图 1.6 图及其精简图

导的子图，记为$G[V']$，以后，我们称$G[V']$是G的**诱导子图**。诱导子图$G[V\backslash V']$记为$G-V'$。从G中去掉V'的一切点及同它们关联的所有边，即得$G-V'$。若$V'=\{v\}$，我们将$G-\{v\}$简写成$G-v$。

现在，设E'为E的非空子集。G的子图，其点集是E'中边的端点所成之集，其边集是E'，称为G的以E'诱导的子图，记成$G[E']$。以后称$G[E']$为G的**边——诱导子图**。具有边集$E\backslash E'$的G的同顶子图，简记为$G-E'$。从G中去掉E'的一切边，即得$G-E'$。同样，对G加上一个边集E''而得到的图，记为$G+E''$。若$E'=\{e\}$，将$G-\{e\}$简写成$G-e$。若$E''=\{f\}$，将$G+\{f\}$简写成$G+f$。

图1.7 给出上述各种类型的子图的例。

让G_1,G_2是G的子图。若G_1,G_2无公共点，则称G_1,G_2**相离**；若G_1,G_2无公共边，则称G_1,G_2**边相离或边相异**。G_1,G_2之和$G_1\cup G_2$是G的子图，其点集为$V(G_1)\cup V(G_2)$，其边集为$E(G_1)\cup E(G_2)$。如G_1,G_2相离，其和有时记成G_1+G_2。G_1,G_2之交$G_1\cap G_2$是G的子图，其点集为$V(G_1)\cap V(G_2)$，其边集为$E(G_1)\cap E(G_2)$。当然此时自然假定G_1,G_2至少有一个公共点。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com