中学数学复习题

上　　册

武汉市教师进修学院主编

前　言

为了适应我市应届高中毕业生复习的需要，我们根据《一九七九年全国高等学校招生考试复习大纲》（数学部分）编写了这本《中学数学复习题》。本书内容分两个部分：一是按照中学数学各分科的内容，分章节安排例题和习题；二是沟通各部分知识的综合题。全书共约800题，凡有“※”号的，可作为选作题。

参加本书编写和审定工作的有：省教研室梁法驯、陈纪绵，华师一附中王震云，武师附中江志，武昌实验中学陈昌祥，水果湖中学朱尧初，武钢三中胡昌炎，市二中田化澜，市六中胡克俭，市九中刘中枢，市十五中林锡芳，市二十三中潘福铮，市三十五中唐俊，市五十中冷俊华，市六十七中徐龙翔，二七中学周行明，洪山区教研室樊恺，硚口区教研室尹旺忠，江汉区教研室邱应麟，江岸区教研室邹住春，汉阳区教研室傅维民，东西湖区教研室黄来祥以及我院数学教研室熊大寅、郑隆炘、成应�、肖若朴、谈家栋、曾昭新、肖宇光、毛素贞、陈恒、张一民等同志。由于我们水平有限，加以时间仓促，错误和不妥之处在所难免，望同志们批评指正。

本书在编写、印刷过程中，得到武昌县教育局教研室和武昌县印刷厂的同志们的大力支持和热情帮助，特表示感谢。

武汉市教师进修学院

一九七九年元月

目　　录

代 数 部 分

一、数与代数式

例1. 证明：$\sqrt{5}$，$lg7$是无理数．

证：(1)若$\sqrt{5}$是有理数．设$\sqrt{5}=\frac{q}{p}$（p．q为互质的整数)．则$\frac{q^2}{p^2}=5$，$q^2=5p^2$，$\because$ p,q是互质的整数．故q必为5的倍数．令$q=5m$(m为整数)，则$(5m)^2=5p^2$，$p^2=5m^2$又因p．q互质，m是q的约数，故p．m互质．故p也一定是5的倍数．从而与所设p．q互质矛盾．

$\therefore$ $\sqrt{5}$是无理数．

(2)若$lg7$是有理数，设$lg7=\frac{n}{m}$（m．n为正整数），

则$10^{\frac{n}{m}}=7$，$10^n=7^m$。

但10^n个位为0，7^m个位不为0．故所设不能成立．因此$lg7$是无理数．

例2. 若α是不为0的有理数，β是无理数，则它们的和、差、积、商都是无理数．试证之．

证：若$\alpha+\beta=\gamma$（γ为有理数)，则$\beta=\gamma-\alpha$也必为有理数．与题设矛盾，故γ为无理数．同样可证明$\alpha-\beta$，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$等都是无理数．

例3. 化简 $|x-2|+|x+3|+|x-5|$,

解: $x\leq-3$时,原式 $=2-x+(-x-3)+5-x=4-3x$,

$-3<x\leq2$时,原式 $=x+3+2-x+5-x=10-x$,

$2<x\leq5$时,原式 $=x+3+x-2+5-x=x+6$,

$x>5$时,原式 $=x-2+x+3+x-5=3x-4$,

例4. 化简:(1) $(a-1)(a^2+a+1)(a^6+a^3+1)$

(2) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)\cdots\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)$.

解: (1) 原式 $=(a^3-1)(a^6+a^3+1)=a^9-1$

(2) 原式 $=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)\cdots\cdots\left(x^{2^{m-1}}+y^{2^{m-1}}\right)$

$$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)(x^8+y^8)\cdots\cdots\left(x^{2^{n-1}}\ y^{2^{n-1}}\right)$$

$$=(x^8-y^8)(x^8+y^8)\cdots\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)$$

$$=x^{2^n}-y^{2^n}.$$

例5. 计算 $\dfrac{2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$

解：原式$=\left(2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\div\left(x+\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

$$=\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x^3}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}\times\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{2}{x}.$$

例6．若$x^2-9x+14<0$，求$\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{x^2-14x+49}$的值。

解：由$x^2-9x+14<0$得$2<x<7$。

$\therefore\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{x^2-14x+49}=\sqrt{(2-x)^2}+\sqrt{(x-7)^2}$

$$=x-2+7-x=5.$$

例7．化简　$\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$．

解法一：原式$=\sqrt{11-2\sqrt{18}}-\sqrt{11+2\sqrt{18}}$

$$=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}$$

$$=3-\sqrt{2}-(3+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}\ .$$

解法二：$(\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}})^2$

$$=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}-2\sqrt{11^2-72}$$

$$=22-2\sqrt{49}=22-14=8,$$

而$\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$为负，

$\therefore$原式$=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$．

例8．若　$\dfrac{8x}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$为恒等式．

求A、B、C的值．

解：由原式得　$8x=A(x+1)(x-1)+B(x-1)$

$$+C(x+1)^2$$

$$=(A+C)x^2+(B+2C)x-A-B+C$$

取$x=1$时，　得$C=2$，

取$x=-1$时，得$B=4$，

比较系数得 $A=-C=-2$；故$A=-2$，$B=4$，

$C=2$。

例9. 设有多项式 $f(x)$

$$=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$$

1. 如果 $f(x)$ 的系数满足 $p^2-4q-4(m+1)=0$,那么$f(x)$恰好是一个二次三项式的平方。

2. 如果 $f(x)$ 与 $F(x)=(2x^2+ax+b)^2$ 表示同一多项式，那么$p^2-4q-4(m+1)=0$。

证：1. 由$p^2-4q-4(m+1)=0$ 得$4q=p^2-4(m+1)$

$$\therefore\quad f(x)=4x^4-4px^3+[p^2-4(m+1)]x^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$$

$$=[2x^2-px-(m+1)]^2.$$

2. $F(2x^2+ax+b)^2=4x^4+4ax^3+(a^2+4b)x^2+2abx+b^2$，而$f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$；由$f(x)=F(x)$比较系数可得：

$$\begin{cases}-4p=4a, & \text{即}p=-a,\\ 4q=a^2+4b; & \\ 2p(m+1)=2ab, & \text{即}m+1=-b;\\ (m+1)^2=b^2. & \end{cases}$$

$$\therefore\quad p^2-4q-4(m+1)=a^2-[a^2+4b]-4(-b)=0.$$

例10. 证明：每一个形如 $a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2$ 的式子可用至少两种不同的方式表示为两个平方的和。

证明：$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2=a^2b^2+c^2d^2+2abcd+b^2c^2+d^2a^2-2abcd=(ab+cd)^2+(bc-ad)^2$

同样也可以得出。

原式$=(ab-cd)^2+(bc+ad)^2$.

例11. 若 $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$，a、b、c为实数。

求证：$a=b=c$.

证明：$\because a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=3a^2+3b^2+3c^2$

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$。

又 $(a-b)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，$(c-a)^2\geqslant 0$

故 $a=b=c$.

例12. 若 a、b、c 为奇数，证明x为任意有理数时，$ax^2+bx+c\neq 0$.

证明：若 $x=\dfrac{q}{p}$(p.q为互质整数)，$ax^2+bx+c=0$，

即 $a\cdot\dfrac{q^2}{p^2}+b\cdot\dfrac{q}{p}+c=0$ $aq^2+bpq+cp^2=0$.

$\because$ p、q 互质. $\therefore$ p、q不能同时为偶数 .

如p为奇数、q为偶数. 则aq 为偶数，bpq为偶数，cp^2为奇数. 则 $aq^2+bpq+cp^2\neq 0$.

同样、p为偶数、p为奇数时，$aq^2+bpq+cp^2\neq 0$.

p、q同为奇数时 $aq^2+bpq+bq^2$ 为三个奇数之和，也不等于0 .

$\therefore$ x为任意有理数时. $ax^2\pm bx+c\neq 0$.

例13. 若 $x=\sqrt[3]{-\dfrac{b}{2}+\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{2}-\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}}}$

$\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}\geqq 0$.

求 x^3+ax+b 之值 .

解：由公式 $(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$ 得

$$x^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}+\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}\right)+3x$$
$$\times\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}$$
$$=-b-ax.$$

$\therefore\ x^3+ax+b=0$.

例14. 分解因式：$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

解法一：用十字交叉法

原式 $=(2x-3y)(2x+y)-4x+10y-3$

$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$.

附、草式：

$$\begin{array}{cc} 2x & -3y \\ 2x & +y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 2x-3y & +1 \\ 2x+y & -3 \end{array}$$

解法二：令 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3=0$

即 $4x^2-4(y+1)-(3y^2-10y+3)=0$

解之得 $x_1=\frac{3y-1}{2}$，$x_2=\frac{3-y}{2}$.

$\therefore$ 原式 $=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left(x-\frac{3-y}{2}\right)$

$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$.

例15. 分解因式

$$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$$

解：原式 $=[(2x^2+6x+2)+(x^2+x-4)][(2x^2+6x+2)-(x^2+x-4)]-(x^2+5x+6)^2$

$=(x^2+5x+6)(3x^2+7x-2)-(x^2+5x+6)^2$

$=2(x^2+5x+6)(x^2+x-4)$

$$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4)$$

例16. 分解因式 $x^4+x^3+2\frac{1}{4}x^2+x+1-y^2$。

解：原式 $=x^2(x^2+x+2\frac{1}{4}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})-y^2$

$$=x^2[(x^2+2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})+\frac{1}{4}]-y^2$$

$$=x^2[(x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})+\frac{1}{4}]-y^2$$

$$=x^2(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2})^2-y^2$$

$$=(x^2+\frac{1}{2}x+1)^2-y^2$$

$$=(x^2+\frac{1}{2}x+1-y)(x^2+\frac{1}{2}x+1+y)。$$

例17. 分解$x^{12}-y^{12}$为因式：(1)系数在有理数范围 (2)系数在实数范围。

解：(1) $x^{12}-y^{12}$

$=(x^6+y^6)(x^6-y^6)$

$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x+y)(x-y)$
$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$。

(2) 由于$x^4-x^2y^2+y^4$

$=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2$

$=(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)$

∴ $x^{12}-y^{12}=(x^2+y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)$
$(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)(x+y)(x-y)(x^2+xy+$

$+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

习　　题

1. 什么叫做自然数？质数？合数？

2. 什么叫做有理数？无理数？实数？

3. 六种代数运算，在规定0不能做除数以后，哪些运算可以永远在下列范围内实施？

(1) 自然数；(2) 整数；(3) 有理数；(4)实数．

4. 如果α、β都是无理数，能不能说它们的和、差、积、商仍是无理数？

5. 证明：$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{7}$，$\sqrt[4]{11}$，$lg2$都是无理数．

6. 证明：n为任意质数，则$\sqrt{n}$为无理数，$\sqrt[3]{n}$也为无理数．

7. 若数轴上任意两点A、B分别代表数x_1，x_2，则AB的距离等于$|x_1-x_2|$，试证之．

8. 化简 $|2x-1|+|x+2|-|3x-2|$．

〔答：当$x\leqslant-2$时，

$|2x-1|+|x+2|-|3x-2|=1$；

当$-2<x\leqslant\frac{1}{2}$时，

$|2x-1|+|x+2|-|3x-2|=2x-1$；

当$\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{2}{3}$时，

$|2x-1|+|x+2|-|3x-2|=6x-1$；

当 $x>\frac{2}{3}$时，

$|2x-1|+|x+2|-|3x-2|=3$．〕

9. 化简：$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(2x-3)^2}$

〔提示〕$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(2x-3)^2}=|x+3|+|2x-3|$

〔答：　当$x\leqslant -3$时，原式$=-3x$；

当$-3<x\leqslant\frac{3}{2}$时，原式$=6-x$；

当　$x<\frac{3}{2}$时，原式$=3x$〕。

10．展开：$(x+y+z)(x-y+z)(x+-z)(x-y-z)$。

〔答：$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$〕。

11．求$(2x^2+3z-5)^2$展开式中的x^3的项和x^2项的系数。

〔答：x^3项的系数是12；x^2项的等数是-11〕。

12．求$(x^2-3x+1)(x^2-4x-3)(x+2)$展开式中$x^3$项的系数。

〔答：-4〕。

13．化简 $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x-\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$。〔答：1〕

14．化简 $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}$

$+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

〔答：0〕

15．化简：$\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}$。

〔答：0〕

16．　已知 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$，其中$a>0$，$b>0$，

求 $h=\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 的值.

〔提示：分母有理化后化简得

$$y=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x},$$

将x之值代入后讨论得：当$b\geqslant 1$时，$y=b$；

当$0<b<1$时$y=\dfrac{1}{b}$〕.

17. 化简：$\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

〔提示：先将上式分母各自有理化后，利用

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

计算后得结果，

〔答：$\sqrt{2}$〕

18. 化简：$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

〔答：1〕

19. 若$4x^2-4x-15\leqslant 0$，

化简：$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$

〔答：8〕

20. 化简：$\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

〔答：4〕.

21. 化简：$\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$

〔提示：$3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$，类似上法，逐步化简可得.

〔答：$2\sqrt{2}+1$〕

22. 化简：$\sqrt{6-\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$

〔答：$\sqrt{2}+1$〕

23. 化简：$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}$

〔答：$2\sqrt{x-3}+3$〕.

24. 化简 $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$

〔提示：先假定它们的值是t，两边平方得之.

〔答：当$x\geqslant 1$时，原式$\sqrt{4x-2}$

当$x\leqslant 1$时，原式$=\sqrt{2}$〕.

25. 求证：$\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$.

26. 求证$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}=1$.

27. 化简 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$

〔提示：$2+\sqrt{5}=\dfrac{16+8\sqrt{5}}{8}$

$=\dfrac{1+3\sqrt{5}+3\cdot(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3}{8}$

$=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3$.

〔答：$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$〕

28. 化简：$\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

〔答：$\sqrt{10}+\sqrt{2}$〕。

29．若 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$ 为恒等式，求A、B、C之值。

〔答： $A=-\dfrac{1}{2}$， $B=-3$， $C=\dfrac{9}{2}$〕

30．若 $\dfrac{2x+3}{(x-2)(x^2+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+c}{x^2+3}$ 为恒等式，求A、B、C之值。

〔答： $A=1$， $B=-1$， $C=0$〕。

31．若 $x^2=y^2+z^2$，求证：

$$(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(3x-5y)^2$$

〔提示：先证明

$$9x^2+25x^2-30xy=25x^2+9y^2-30xy-16z^2.$$

32．求证：$\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}=1$。

〔提示；令 $\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}=t$

两边立方，即得 $2-t=t^3$〕

33．若 $a>0$，$b>0$，$a^2-b>0$，求证

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

34．x为任意实数，证明x^4+3x^2+2x+6恒为正数。

〔提示：$x^4+3x^2+2x+6=(x^4+2x^2+1)+(x^2+2x+5)$

上式右边两个括号内的三项式都恒为正值〕

35. 若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，求证

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

〔提示：$\because\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=-\frac{c}{z}$ $\quad\therefore\ ay+bx=-xy\cdot\frac{c}{z}$

$$\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}=\frac{xy}{ab}+\frac{z}{c}\cdot\frac{ay+bx}{ab}$$

$$=\frac{xy}{ab}+\frac{z}{c}\cdot\frac{1}{ab}\cdot\left(-xy\cdot\frac{c}{z}\right)=0\text{〕,}$$

36. 若 x、y、z为互不相等的数，试证：

$$\left(\frac{1}{y-z}\right)^2+\left(\frac{1}{z-x}\right)^2+\left(\frac{1}{x-y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2$$

〔提示：利用 $\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(x-y)(y-z)}+$

$$+\frac{1}{(z-x)(x-y)}=0\text{〕}$$

37. 若 $x_1{}^2+y_1{}^2=1$，$x_2{}^2+y_2{}^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=0$

求证：$x_1{}^2+x_2{}^2=1$，$y_1{}^2+y_2{}^2=1$，$x_1y_1+x_2y_2=0$

〔提示：由 $x_1{}^2x_2{}^2=y_1{}^2y_2{}^2$

及$(1-y_1{}^2)(1-y_2{}^2)=y_1{}^2y_2{}^2$

可得 $y_1^2+y_2^2=1$〕,

38. 求证: $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}$

$$+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

39. 若 $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$为含x的整平方式,试证明,$9p^2-14pq+9q^2=0$

40. 若 $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$为含$x$的整平方式,则$a=b=c$,

〔提示:原式 $=3(x^2+2\cdot\dfrac{a+b+c}{3}x+\dfrac{ab+bc+ca}{3})$

若此式为整平方式,则有

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2-\frac{ab+bc+ca}{3}=0$$

即 $\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{3}\right)^2+\left(\dfrac{b}{3}-\dfrac{c}{3}\right)^2\right.$

$\left.+\left(\dfrac{c}{3}-\dfrac{a}{3}\right)^2\right]=0$〕

41. 试证:以m^2+n^2,$2mn$,m^2-n^2为三边的三角形是直角三角形,其中$m>n>o$,

42. 任取一个正奇数,平方后分成两个连续自然数,则以这三个数为边的三角形是直角三角形,

〔提示:这三个数分别是$2n+1$,$2n^2+2n+1$,$2n^2+2n$〕、

43. 若$x+y=a\neq0$,$x^3+y^3=b$,求以a、b表示x^2+y^2