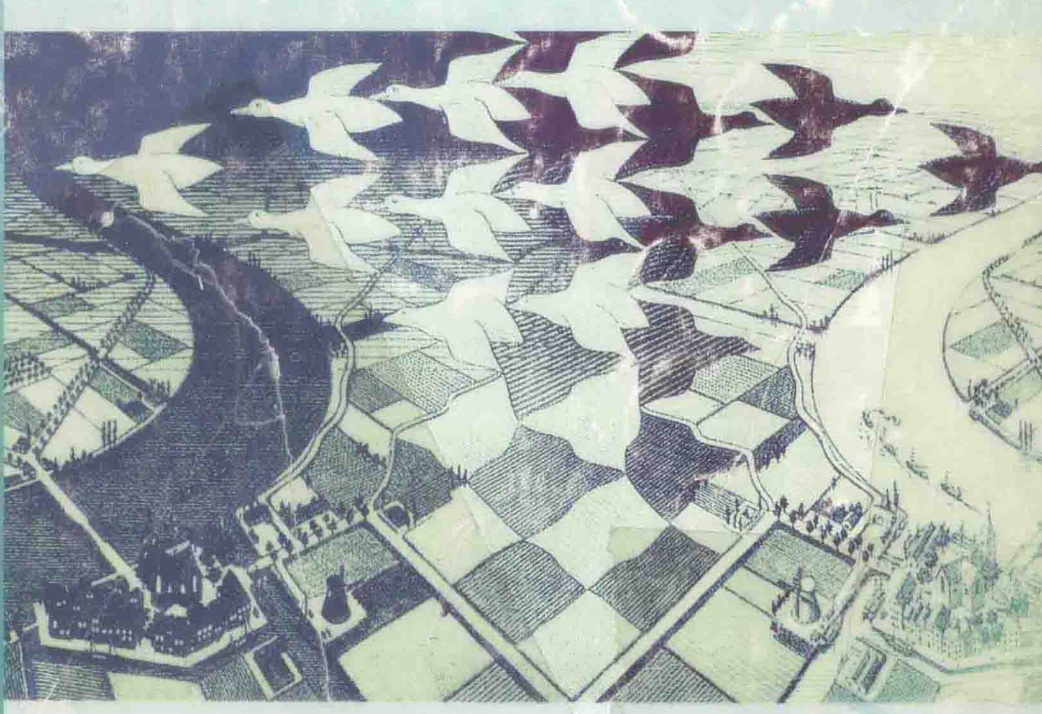
全日制高级中学课本（必修）

数学 第二册

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著

教学参考书

JIAOXUECANKAOSHU



北

学 出版社

全日制高级中学课本（必修）

数　学　第二册

教 学 参 考 书

教育部《中学数学实验教材》研究组编著

北 京 师 范 大 学 出 版 社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

全日制高级中学课本数学第二册教学参考书/教育部《中学数学实验教材》研究组编．—北京：北京师范大学出版社，2002

ISBN 7-303-06062-6

Ⅰ．全…　Ⅱ．教…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 007362 号

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）
出版人：赖德胜
北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：185mm×260mm　印张：9.5　字数：226 千字
2004 年 5 月第 3 版　2006 年 8 月第 3 次印刷
印数：4 501～6 500 册　定价：10.50 元

前　言

本书是根据北京师范大学出版社2003年7月出版的由教育部《中学数学实验教材》研究组编著的《全日制高级中学课本·数学(必修)》第二册(上、下)编写的,2004年4月又进行了修订。其内容是介绍本册教科书各章的教学目的、教学要求、教学内容编排、重点难点、课时建议,以及详细的教材分析、教学建议和教学问题研究,同时给出了本册教科书各章节练习、习题、复习题、研究题的参考答案或提示,供执教教师在教学中参考使用。

本书是在多年实验教学的基础上,根据本教材的编写意图,整理和收集了许多教师的教学经验,参阅了一些同类内容的教学资料编著的。其中第七章由高存明编写,第八章、第九章由邱万作编写,第十章由连四清编写,第十一章、第十二章由罗声雄编写。全书由高存明统稿审定。希望各执教教师、教研员能在教学实践中继续不断总结,不断创新,用自己的勤奋和智慧来充实、完善这本教学参考书,为我国基础教育高中阶段的数学教育事业的发展而共同努力奋斗。

2004年5月20日

目　录

第七章　平面向量

Ⅰ. 教学要求

1. 理解向量的概念，掌握向量的几何表示. 了解向量平行(共线)的概念.

2. 掌握向量的加法、减法的运算法则及其算律.

3. 掌握数乘向量运算及其算律，掌握向量平行的充要条件.

4. 理解平面向量分解定理，理解平面向量坐标的概念.

5. 掌握平面向量的数量积及其几何意义，会用向量的数量积运算处理有关长度、角度和面积的度量问题. 掌握向量垂直的充要条件.

6. 掌握平面向量的直角坐标运算. 掌握平行向量和垂直向量坐标间的关系.

7. 熟练掌握两点的距离公式、中点公式，理解定比分点公式. 掌握平移公式.

Ⅱ. 教材内容编排、重点与难点及课时分配

1. 内容分析

在高中数学中引入平面向量一章有其重要的意义. 几何改革的必由之路是尽快用代数化方法学习几何. 在初中学习实验与推理几何的基础上，到了高中用代数方法学习几何是顺理成章的事. 由于向量具有一套优良的运算通性，向量本身又有几何表示，所以用向量运算研究几何既不失几何的直观性，又能使用代数方法，因此它是极好的中学教学内容，是中学几何改革的一条较为理想的途径. 向量在几何、代数两大学科之间架起了一座桥梁，使数与形更好地结合起来.

本章编写的指导思想是，用“点的相对位置”和“平移”引入向量概念. 把平面几何中的全等与平行、相似和投影的性质分别转化为向量的加法、数乘向量和数量积的运算及其算律. 最后在直角坐标系中，把向量运算完全代数化，为学习解析几何做好理论准备.

由图形的性质引入向量运算可使学生能更好地理解向量运算的几何背景和实质，这样学生就可更好地掌握向量工具去学习几何.

本章内容共分三大节：一、向量及其线性运算；二、向量的内积与度量；三、向量的直角坐标运算及基本公式. 其中第一大节是全章的基础.

2. 教材的重点和难点

本章的重点是平行向量基本定理和平面向量分解定理. 难点是向量概念的引入和平行向量基本定理的证明.

3. 课时分配

本章教学时间约为 16 课时，具体分配如下：

§1　向量及其线性运算(共 5 课时)

1.1　向量的概念　　约 1 课时

Ⅲ. 教材分析与教学建议

§1　向量及其线性运算

1.1　向量的概念

本章首先分析如何在几何中表示最基本的几何量:“两点的相对位置”,从而引入有向线段概念.再用相等的有向线段的集合来表示具有大小和方向的量,建立向量概念和向量的几何表示.

教学目标:

(1)掌握有向线段和向量的区别;

(2)理解向量仅有大小和方向两个要素,向量可以在平面上任意平移;

(3)在平面上给定一点,可用向量确定另一点的位置.

第3个教学目标非常重要,这是因为几何中最重要的任务之一就是确定点的位置,学生只有理解如何用向量表示点的位置,才能正确地使用向量工具研究几何.

教材分析与教学建议:

(1)在本章把方向作为已知概念,没有加以说明. 如果学生基础较好可以做如下说明.

在几何学中,通常用一组平行直线表示空间的一个方向,用一组平行射线表示一个指向或方向. 方向相同或相反,则表示方向的射线或直线一定平行;反之,一组直线或射线平行,则它们表示的方向相同或相反. 要让学生了解方向与平行的关系,以便加深学生对平行的理解.

(2)严格地讲,本章对向量没有严格的定义,只是做直观的描述.具有方向和大小的量不一定是向量,具有大小和方向且满足加法运算律的量才能称为向量.教学中要紧紧把握向量的大小、方向两个要素,同向且等长的有向线段表示同一个向量.教材中对向量的种种描述,都为下一节正确理解向量运算打下基础.

(3)向量在物理学中分为三种基本类型:具有大小但无特定位置的向量称为自由向量;沿

直线作用的向量称为滑动向量；作用于一点的向量称为胶着向量. 本章研究的向量主要是自由向量，其他两种向量一般不涉及，因此教学中最好先不提及力向量，并且不要由力的概念引入向量. 要紧紧围绕两点的相对位置和位移两个概念引出自由向量的概念.

(4)用向量可确定一点相对于另一点的位置，这是用向量研究几何的依据. 无论在数轴上，还是在建立坐标系的平面上，通过相对于原点的向量可定义点的坐标，通过两点确定的向量可计算任一向量的坐标. 因此，教学中应对使用向量确定点的位置这件事给予足够的重视. 教学时，教师要通过例题让学生知道如何用向量确定点的位置，还要使学生知道，如何根据向量说清一点相对于另一点的位置. 初学向量的学生在谈 A 地相对于 B 地的位置时，往往只谈两地的距离，而不谈方向，通过这种训练可加强学生对向量的大小、方向两要素的理解.

本小节的重点是如何用向量确定点的位置，难点是同向且等长的有向线段表示同一向量，即向量相等概念. 只有向量相等的概念十分清楚，才能熟练地进行向量的加法和减法运算.

1.2 向量的加法与减法

本节由位移的合成引入向量的加法法则，由平行四边形的特征性质(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，即四边形的另一组对边也平行且相等)证明加法交换律. 减法是从相反向量概念引入的，减去一个向量等于加上它的相反向量.

教学目标：

(1)熟练掌握向量加法和减法的三角形作图法则.

(2)知道加法交换律依赖于平行四边形的特征性质.

(3)记住在平行四边形中，一条对角线向量等于两条相邻边向量的和，另一条对角线向量等于这两条相邻边向量之差.

(4)理解作向量的和与差与作图位置无关.

教材分析与教学建议：

(1)用质点位移的合成引入向量的加法，是一个很成功的方法. 学生比较容易理解，并可以克服由数量加法到向量加法所产生的困扰.

(2)在证明向量加法的交换律时，应用了一个平行四边形的充要条件：一组对边平行且相等. 证明前可复习这一定理，证明时要使学生清楚每一步的理由.

由加法交换律的证明又可得到求两个向量和的平行四边形法则.

向量加法结合律的证明用到两个向量求和的三角形法则，可让学生自己验证，以巩固这一法则. 也可在课上对照图形做简单说明，课下由学生书面完成.

(3)向量的减法是通过相反向量引入的. 通过相反向量把减法运算转化为加法运算. 因此，加法运算是最基本的运算.

(4)向量的加减法完全不同于数量的加减法. 学生对向量加减法的掌握要有一个过程，必须反复地练习才行. 教学时，应把求向量和、差的作图法则和特点说清楚. 例如向量加法的三角形法则的特点是，“各个加向量首尾相接，和向量是首指向尾”. 向量减法的三角形法则的特点是，“减向量和被减向量同起点，差向量是由减向量终点指向被减向量终点”等. 减法运算是加法运算的逆运算，也可从这一性质强化学生对减法法则的认识.

(5)用位置向量的语言说明表达式$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$的向量的减法规律十分有用. 要反复使用“任一向量等于它的终点向量减去它的起点向量”(相对于一个基点)这个法则. 这对学生熟练掌握减法法则很有帮助.

本小节的重点是向量加法交换律的证明. 难点是求两条向量的差.

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$
$=\overrightarrow{BA}$

1.3 数乘向量

本小节是由相同向量加法的简记引进数乘向量运算的. 由加法运算律和具体数值例子说明分配律成立，然后通过例题把数乘向量与图形的放大、缩小和相似联系起来.

教学目标：

(1)理解整数乘向量，有理数乘向量，负数乘向量的意义和运算法则.

(2)理解数对向量加法分配律的几何意义，能熟练地用分配律进行向量运算.

教材分析与教学建议：

(1)教材对数乘向量的引入比较细致. 首先通过相同向量的连加引入整数乘向量的概念，然后通过等分向量引入分数乘向量的概念，然后再给出数乘向量的定义. 在学生已有了感性认识的基础上，讲数乘向量的定义时，首先应强调数乘向量的结果是一个向量，然后分别说明它的长度和方向，从而明确数乘向量的几何意义.

(2)数乘向量的运算律.

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(向量对于数乘的分配律)；

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$(数与向量的结合律).

教材没有证明这两条运算律，建议对它们分别作如下说明：

在一条直线上位移了 $\lambda\boldsymbol{a}$，又位移了 $\mu\boldsymbol{a}$，其结果是位移了 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$；

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 伸缩了 λ 倍，再伸缩 μ 倍，其结果是伸缩了 $\lambda\mu$ 倍.

教材中，向量对数乘的分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 进行了验证，未作严格证明. 由于向量的加法和数乘向量的运算与多项式运算类似，学生容易接受. 向量对于数乘的分配律，可用加法结合律，先对 λ 是整数、分数进行证明，对 λ 是无理数的情形，可用极限理论进行严格证明(从略). 由于相似三角形的判定性质和数乘向量的分配律是等价的，在一般教科书上，分配律的证明，使用了相似三角形的判定性质(可参考大学空间解析几何教材). 教材是以相似系数为 3 的具体例子，用分配律判定两个三角形相似.

(3)最后给学生总结目前学到的有关向量的运算：加法、减法和数乘向量. 加法、减法和数乘向量的综合运算，叫做向量的线性运算.

1.4 平行向量

数乘向量运算是刻画平行向量性质的运算，为使学生更深刻地理解平行向量的性质，我们专设一小节来学习平行向量. 平行向量基本定理是向量几何的基础，是几何代数化的起点. 掌握这个定理就可从理性上理解向量代数在几何中的各种应用.

教学目标：

(1)理解并熟练掌握平行向量基本定理. 会用表达式 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 表示平行向量之间的关系.

(2)会用基本定理证明简单的平行问题.

教材分析与教学建议：

(1)平行向量定理是一个非常重要的定理，它是建立向量的坐标及其运算的理论依据. 这一定理在教材中未给出证明. 现证明如下：

$\lambda=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，取 $\lambda=|\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$，则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时，取 $\lambda=-|\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$，则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. $\Rightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$

如果还存在另一个实数 λ'，使 $\boldsymbol{b}=\lambda'\boldsymbol{a}$，

则 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda'\boldsymbol{a}$，即 $(\lambda-\lambda')\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\lambda'=0$，即 $\lambda=\lambda'$.

以上证明对学生不作要求.

(2)平行向量基本定理给出了平行向量的另一等价的代数式,应用这一定理,可以通过向量的运算解决几何中的平行问题. 讲解例 2 应使学生知道这一点.

1.5 平面向量分解定理

平面向量分解定理表明,平面内的任一向量,都可沿两个不平行向量进行分解. 这就是说平面内任意三个向量都是线性相关的.

教学目标:

(1)能直观理解平行向量分解定理,对定理的证明可不作要求.

(2)掌握选择基底和线性表示的基本技能.

(3)掌握直线的向量表达式,理解表达式中参数 t 的意义. 熟练掌握线段中点的向量表达式.

(4)会用向量方法证明简单的几何题,掌握用向量证题的最基本方法.

教材分析与教学建议:

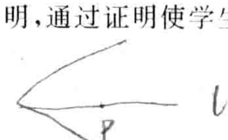
(1)平面向量分解定理有着十分重要的意义. 这个定理告诉我们,平面上取定两个不平行的向量作为基向量,则平面上的任一向量,都可以表示为基向量的线性组合. 于是向量之间的运算转化为对两个向量的线性运算. 由此可见,将平面上的向量表示为基向量的线性组合是十分重要的基本技能,训练这种技能是本小节的教学重点之一.

(2)教材中给出了平面向量分解定理的严格证明. 证明涉及存在性和唯一性,这一点在教学上存在争议. 很多教师认为,涉及存在性和唯一性的证明,多数学生不理解,最好不讲. 但作者认为,讲解存在性和唯一性是必要的,可培养学生对事物深入思考的习惯,使学生更加理解数学的实质.

(3)教学开始可在斜线分割的格纸上,选择两个基向量,再任选几个向量,让学生把这几个向量沿基向量进行分解,分别写出它们的表达式. 还可平移任一个向量,看看这个向量在两个基向量的方向上的分向量如何变化,让学生直观上体会“分解式的存在性和唯一性”,然后再给出证明.

(4)例 2 是证明直线的向量表达式,分为充分和必要两个过程进行证明,通过证明使学生加深对充要条件和直线“方程”的理解. 证明的关键是

$$\text{点 } P \text{ 在直线 } l \text{ 上} \Leftrightarrow \text{存在实数 } t, \text{使} \overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}.$$



从$\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}$这个表达式中,又可认识参数 t 的几何意义. 当 $t=\dfrac{1}{2}$时,得到线段 AB 中点的向量表达式. 线段中点的向量表达式是十分有用的公式,要求学生熟练掌握.

(5)例 3 介绍了求向量分解式系数最常用的方法. 解题的关键是,写出$\overrightarrow{AM}$关于基底$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$的两个表达式,由分解的唯一性,得出方程求解.

§2 向量的内积与度量

2.1 轴及向量在轴上的射影

这一节主要内容是,两个重要的基础公式:

对数轴上任意三点 A,B,C,有 $AB+BC=AC$.

设轴的正向到向量$\overrightarrow{AB}$的方向的转角为 θ,$\overrightarrow{AB}$在轴上的正射影为$\overrightarrow{A'B'}$,则

$$A'B'=|AB|\cos\theta.$$

大家不要小看这两个简单的公式，它们是整个度量几何的基础.

教学目标：

(1)掌握轴的概念.

(2)熟练掌握轴上向量的数量的加法运算($AB+BC=AC$)和射影公式.

(3)理解本节定理所讲的向量射影的性质.

教材分析与教学建议：

(1)一个向量与轴共线，它才有数量，否则，向量的数量没有意义.

(2)公式 $AB+BC=AC$ 虽然简单，但它非常重要，它是理解其他度量公式的基础. 要多做练习让学生熟练掌握.

(3)在数学与实际应用中，常常需要求一个向量在某个方向或轴上的正射影分量，它是内积运算的几何基础，在教材中，我们直接由三角函数的定义给出了正射影公式：

$$A'B'=|AB|\cos\theta$$

没有单独证明. 教学时，最好给出证明，强化学生对这个公式的理解. 证法是把轴 l 作为 x 轴建立直角坐标系，应用三角函数的定义直接给出. 这小节还证明了一个定理：两个向量和在轴上的射影，等于每个向量在轴上射影的数量和. 这个定理为下一节证明内积分配律打下基础.

本小节的重点是轴上向量的坐标运算和射影公式；难点是正确理解轴的概念.

2.2 向量的内积

本小节主要内容是三个：1. 两个向量夹角定义；2. 向量内积的定义及几何意义；3. 内积运算的 5 个基本性质；4. 内积运算律.

教学目标：

(1)掌握向量内积的定义和几何意义.

(2)熟练掌握用内积运算求向量在某个方向上的射影数量.

(3)熟练掌握用内积运算求证两个向量垂直.

(4)熟练掌握内积的运算律，并能用内积运算证明简单的几何问题.

教材分析与教学建议：

(1)两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，揭示了长度、角度及向量投影之间的深刻联系，它反映了欧氏空间所具有的最本质的特征.

(2)内积的定义是教学中的难点. 为了减少理解的困难，可着重强调两个向量的内积等于一个向量的长度与另一个向量在这个向量方向上正射影数量的乘积，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot(|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle),$$

于是，两个向量的内积变成了两个数量的积，这样学生就比较容易理解了. 这种解释还可加强学生对内积所表达的几何意义的理解.

如果学生在物理中学过功的概念，也可举功的计算，说明内积的意义.

(3)教材根据内积的定义，直接得到内积运算的 5 条重要性质. 这 5 条性质是欧氏空间中最基本的 5 个度量公式，在下一节可以看到，它们都可转化为用相应的坐标表示.

(4)向量内积运算的三条算律，重点是分配律. 通过内积分配律证明，要让学生理解射影计算转化为内积运算的过程，知道如何把射影运算的性质转化为分配律.

(5)通过三个例题，让学生学习用内积运算证明几何问题的基本方法. 证明过程中，最好分析每一步运算的几何意义. 由于用内积运算律证几何题有一定的难度，开始要求不要过高.

本小节的重点和难点都是内积分配律及其证明.

2.3 余弦定理和正弦定理及其应用

本小节的主要内容是：余弦定理和正弦定理及其在解三角形中的应用.

教学目标：

(1)掌握余弦定理和正弦定理．会用这两个定理进行一些恒等变形.

(2)会解三角形和实际测量问题.

(3)掌握两边夹角求三角形和平行四边形的面积.

教材分析与教学建议：

(1)余弦定理和正弦定理是欧氏空间度量几何的两个最重要的定理，它们是整个测量学的基础.

(2)余弦定理是勾股定理的推广，教材使用向量法证明这个定理．用向量法证明的关键是把$|\boldsymbol{a}|^2$表示成$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$的形式．该方法再一次体现了向量是研究几何问题的有力工具.

(3)本节在讲完余弦定理后给出了一个证明的例题，主要是培养学生根据图形性质进行恒等变形的能力.

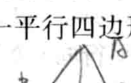
(4)已知两边夹角或三边求解三角形，可直接用余弦定理解决．书中没有相应的例题，对重点学校的学生讲完余弦定理后，直接做练习，应该不困难．如学生水平较差可补充一个直接用余弦定理的计算题，如练习 1 中的第(1)题.

(5)用余弦定理求三角形的三个内角时，若用余弦定理求出一个角，再由正弦定理求另一个角时，最好用余弦定理求出三角形的最大角(例 4)．解这类题的一般思路是：①先判断出最大(小)的边；②求最大(小)边所对角的余弦值；③根据求得的余弦值确定最大(小)角的值.

(6)书中缺判断三角形的形状的练习，可适当补充．判断三角形的形状一般是指判断三角形是钝角三角形、锐角三角形还是直角三角形．设$\triangle ABC$的最大角是α，如果$\cos\alpha>0$，$\cos\alpha=0$，$\cos\alpha<0$，则$\triangle ABC$分别是锐角三角形、直角三角形、钝角三角形．这类题实质上和“求三角形最大角”是同一类型的题，但它不一定要求出角的具体值．解这类题目的一般思路是：①确定三角形的最大边，例如a；②计算$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$(事实上只需计算$b^2+c^2-a^2$；根据$\cos A$的符号，确定$A$的范围).

(7)正弦定理是表示三角形中的边与角关系的又一定理，本小节是用两个向量$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{CA}$在y轴上的射影数量相等这个事实证明的．正弦定理表示了三角形两个角和它们的对边的关系，因此，正弦定理可以解决两类斜三角形问题：①已知两角和任一边，求其他两边和一角；②已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，从而可进一步求出其他的边和角．本小节应用正弦定理解三角形时，没有作一般性讨论，建议课后作为选做题，让学生自己研究，得出结论.

(8)在三角形的面积这一单元建议补充平行四边形的面积公式：设一平行四边形的两邻边分别为a，b，其夹角为θ，面积为S，则$S=ab\sin\theta$.



(9)在面积单元的例 1，说明如何由三角形的三边求其面积．建议在课后让学有余力的学生证明三斜求积公式：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

2.4 实习作业

本节主要是通过测量两个目标的距离，让学生理解正弦定理在测量中的应用.

教学目标：

掌握利用基线测量两点距离的方法.

§3　向量的直角坐标运算及基本公式

3.1　向量的直角坐标运算

本小节内容分两个单元：向量的直角坐标和向量的直角坐标运算. 先在直角坐标系中把向量的分解式简写为有序实数对表示，再利用向量加法、数乘向量和内积的运算律求证向量直角坐标运算法则.

教学目标：

(1)理解向量的直角坐标，知道点的坐标与向量坐标的关系. 会正确地根据向量的长度和转角求向量的坐标.

(2)理解向量的直角坐标运算，并熟练地进行向量的坐标运算.

(3)知道有向线段两个端点的坐标，会计算有向线段表示的向量的坐标.

教材分析与教学建议：

(1)本小节是由平行向量的基本定理得到向量在直角坐标系中的分解式，从而得到向量在直角坐标系中的坐标概念. 向量在直角坐标系的坐标分别是向量在 x 轴和 y 轴上投影的数量. 要讲清楚平面向量的坐标与点坐标之间的关系，由于平面上任一点相对于原点的位置向量确定了该点的位置，因而位置向量就成为建立向量坐标与点的坐标之间联系的桥梁. 一个基本的事实是，"平面上任一点 A 的坐标就是该点相对于原点位置向量$\overrightarrow{OA}$的坐标，反之亦然". 由这一事实及重要的向量等式$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，可得到平面上任一向量$\overrightarrow{AB}$的坐标，即终点的坐标减始点的坐标.

(2)向量的坐标运算使向量运算完全数量化，它将数与形紧密地结合起来，使得用向量来求解几何和物理问题更加方便.

(3)教材中的例 3 是向量线性运算的综合运用. 它们给出一种重要的解题思路：要求平面上一点的坐标，只需求出该点位置向量的坐标. 用向量方法求解也有多种方法，如教材中例 3 是用求点 D 的位置向量的办法求解，另外还可利用$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$的条件求解：设 $D(x,y)$，则$\overrightarrow{DC}=(2-x,5-y)$.

因为　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4-0,3-1)=(4,2)$，又 $ABCD$ 是平行四边形，

所以　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即$(4,2)=(2-x,5-y)$. 由此得方程组$\begin{cases}2-x=4,\\5-y=2.\end{cases}$

解得 $x=-2$，$y=3$，即　$D(-2,3)$.

这题还可利用 3.2 节的中点公式求解.

本节重点是向量直角坐标的运算法则，难点是点的坐标与向量坐标的关系.

3.2　平行向量的坐标关系

本节主要内容：1. 平行向量的坐标关系；2. 定比分点公式和中点公式.

教学目标：

(1)理解平行向量基本定理与向量平行的坐标关系式之间的关系，并能互相转化.

(2)理解向量平行充要条件的三个坐标表达式：

$$\begin{cases}a_1=\lambda b_1,\\a_2=\lambda b_2,\end{cases}\quad a_1b_2-a_2b_1=0,\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

$a_1b_2=a_2b_1$

之间的关系，并能灵活应用它们判断两个向量平行.

$(a_1\ b_1)$　(a_2,b_2)

(3)理解定比分点的定义.知道如何由向量的定比分点的表达式推出定比分点的坐标表达式,能用定比分点表达式确定点的位置.

教材分析与教学建议:

(1)建议让学生自己探求平行向量坐标之间的关系.可从复习向量基本定理和向量平行的充要条件(向量表达式)开始,逐步引导学生完成推导过程. 可通过较精确的画图,让学生直观地理解平行向量的坐标分量之间的比例关系.

(2)对向量平行的充要条件,三个不同的表达式,应加以分析. 其中第一个最基本,记住第一个,其他两个也容易记住了. 这三个表达式各有其优点,但要引导学生主要应用第二个解问题. 第二个等式的左端 $a_1b_2-a_2b_1$ 实际上是两个平面向量(a_1,a_2),(b_1,b_2)的外积表达式,又是这两个向量张成的平行四边形的面积(参看本章的研究课题),所以记住 $a_1b_2-a_2b_1$ 这个量,对学生进一步学习数学会有帮助.

(3)教材中给出了运用向量运算求定比分点的坐标计算公式.整个推导过程实际上给出了求定比分点的向量计算方法,学生不记定比分点的坐标计算公式,仍能较快地算出定比分点的坐标.记住定比分点公式有一定的困难,也不容易长期记住,所以让学生掌握推导过程更重要.

(4)教学中要强调中点公式的重要性. 中点公式是研究图形中心对称的重要关系式,以后到处用到它,学生要牢记. 例 3 给出了求平行四边形第四顶点的又一种方法. 这个例题讲解之后,可让学生总结这题的各种解法,以使学生体会平行四边形、向量、对称等知识的内在联系.

教学重点是向量平行的充要条件(坐标表示)和中点公式. 难点是定比分点坐标计算公式的应用.

3.3　垂直向量的坐标关系

本小节主要内容是把两向量垂直的充要条件"内积等于 0",转化为坐标表示,然后举例说明它的应用.

教学目标:

(1)会用两个向量垂直的坐标条件,判定两条向量是否垂直.

(2)给出一个向量,会按要求的条件写出与它垂直的向量的坐标.

教材分析与教学建议:

(1)在学生知道两向量内积的坐标运算法则后,两向量垂直的充要条件很容易转化为坐标表示,转化过程可引导学生自己完成.

(2)在讲完本节例 2 后,可增加一个思考题:边向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的内积的符号与$\triangle ABC$ 的形状(锐角、直角、钝角三角形)有什么关系?进一步加深对向量垂直条件的理解.

(3)例 3 给出了由已知一个向量的坐标,求与它垂直向量坐标的方法.记住与(a,b)垂直的两个特殊向量$(-b,a)$,$(b,-a)$是有益的. 可精确地画出图来(连同射影分量),让学生理解它们之间的关系.

$a_1a_2+b_1b_2=0$

(4)例 4 是一个综合题,培养学生用向量方法解综合题能力.

本小节的重点是两个向量垂直条件的转化过程.难点是直观理解两个向量垂直时,它们的坐标关系.

3.4　平移

本小节的主要内容是推导平移公式.

教学目标:

(1)能熟练地利用点的平移坐标变换公式计算点的坐标.

(2)能正确写出平移变换后图形的函数表达式.

教材分析与教学建议：

(1)平移是一种基本的几何(保距)变换，它在初等数学中十分有用. 平移概念在初中学习函数图形时就已开始使用. 在前面研究函数时，又再次使用了它. 平移本身就是一个向量. 用向量的运算推导平移公式简单明了. 因此，我们在学习向量的基础上，专门设计了平移公式这一小节，以利于学生对向量的理解，并促使学生用向量知识去解决一些有关的数学问题.

(2)坐标轴的平移变换公式将在第二册解析几何中学习. 点的平移和轴的平移两个变换公式，实际上，一个是坐标系不动，点平移；一个是点不动，坐标系平移. 这两个运动是相对的. 如果坐标系不动，点 $P(x,y)$ 平移向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ 到点 $P'(x',y')$，则 $x'=x+a_1$，$y'=y+a_2$，这个平移变换也相当于点 P 不动，把坐标系平移向量 $(-\boldsymbol{a})$. 这两种变换的结果使点在坐标系中的相对位置是一样的，即点 P 在坐标系的位置与点 P 在新坐标系中的位置是一样的. 如果坐标系平移的向量也记为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，则轴的平移公式就是

$$x'=x-a_1,\ y'=y-a_2.$$

这里只讲点的平移变换公式，但教师应对两个平移变换公式有深刻的理解，掌握这两个变换公式之间的关系.

(3)有一些函数虽是不同的函数，但它们在坐标系中的图像只是位置不同，形状大小完全相同，并且经过平移变换可以重合. 例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 的图像平移变换 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，得新图像对应的函数是 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$，这个函数的图像如果平移 $-\boldsymbol{a}$，则得到的图像就是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像. 由此可见，平移变换是研究函数性质的有力工具. 通过变换，复杂的函数可转化为简单的函数，未知函数可转化为已知函数.

(4)教材给出了，将函数 $y=f(x)$ 图像平移向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ 之后，得到新图像的函数表达式的一般法则，这个法则可让学生记住，以简化学生做练习的程序.

本小节重点是平移公式，难点是理解平移后的图像表示式.

3.5 距离与夹角公式

本小节主要内容是，由向量的内积的坐标运算直接导出距离公式和夹角公式.

教学目标：

(1)会用向量的内积的坐标运算推导向量长度公式、距离公式和夹角公式.

(2)会把一个向量化为它的单位向量，会求一个向量在另一个向量方向上的射影数量.

(3)会用距离公式和夹角公式解简单几何问题.

教材分析与教学建议：

(1)引导学生自己证明距离公式和夹角公式.

(2)讲完例 3 后，可让学有余力的学生总结向量内积运算与和角公式、余弦定理之间的关系.

(3)在人们没有掌握向量知识以前，处理长度和角度问题，主要使用三角知识中的正弦定理和余弦定理. 由于向量有一套优良运算律，用向量工具处理长度和角度的问题，就更加方便了. 这节虽然讲了公式，但仍要引导学生直接用向量计算解决问题.

教学的重点放在距离公式和夹角公式的应用.

Ⅳ. 测验题

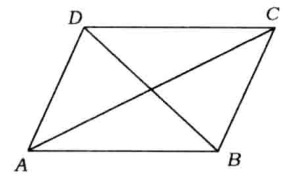


图 7-1

1. 如图 7-1，填空：

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$________；　　(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$________；

(3)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$________；　　(4)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=$________.

2. 化简：

(1)$4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-7\boldsymbol{b}$；

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(8,-5)$，求 $5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

4. 已知$\triangle ABC$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，用向量运算证明：$MN\parallel BC$，且 $MN=\frac{1}{3}BC$.

5. 已知点 $A(2,3)$，分别求点 A 关于原点、x 轴、y 轴的对称点 A_1，A_2，A_3 的坐标.

6. 已知$\triangle OAB$，$O(0,0)$，$A(1,7)$，$B(8,6)$，$AD\perp OB$ 于点 D，求线段 OD 长和点 D 的坐标.

7. 已知函数 $y=\frac{1}{2}x$，把它的图像 C 平移向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$ 到图像 C'，求以 C' 为图像的函数，并分别画出 C，C' 的简图.

8. 在某地区的地图上，以某广场的中心为原点 O，建立坐标系，x 轴指向东，y 轴指向北，一个单位表示实际路程 1 km，一辆汽车从点 $A(5,1)$ 出发，始终沿一个方向匀速行驶，9 min 时路过点 C 有一新建筑，12 min 到达点 $B(-3,7)$. 求：

(1)汽车的位移向量$\overrightarrow{AB}$，并说明位移的距离和方向；

(2)C 地的新建筑相对于广场的中心点 O 的位置向量，并用语言说明新建筑相对于中心广场的位置；

(3)汽车在 AB 段上的行驶速度 $\boldsymbol{v}$(大小、方向)，并求 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴、y 轴上的分量，用坐标表示 $\boldsymbol{v}$.

测验题答案：

1. (1)$\overrightarrow{AC}$；　(2)$\overrightarrow{AC}$；　(3)$\overrightarrow{DB}$；　(4)$\overrightarrow{AC}$.

2. (1)$\boldsymbol{a}$；　(2)$\boldsymbol{0}$.

3. $5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(14,0)$，$2\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}=(-60,41)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-31$.

4. 提示：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

5. $A_1(-2,-3)$，$A_2(2,-3)$，$A_3(-2,3)$.

6. $OD=5$，$D(4,3)$. 提示：$OD=\overrightarrow{OA}\cdot\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$，求 $\cos\angle xOB$，$\sin\angle xOB$.

7. $y=\frac{1}{2}x+2$.　　$y=\frac{1}{2}(x+2)+1=\frac{1}{2}x+2$.

8. (1)$\overrightarrow{AB}=(-3,7)-(5,1)=(-8,6)$，汽车位移为“西偏北 36°52′，10 km”.

(2)由于汽车匀速行驶，AC 段用 9 min，AB 段用 12 min，故

$$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=(5,1)+\frac{3}{4}(-8,6)=\left(-1,\frac{11}{2}\right),$$

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}\approx 5.59.$$