高等职业教育课程改革示范教材

工科数学（上册）

主编　杨　军

GONGKE SHUXUE

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

工科数学（上册）

主　编　杨　军
副主编　俞金元　陆　峰　盛秀兰
参　编　岳雪芳

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学 / 杨军主编. 一 南京：南京大学出版社，2010.8

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-07433-2

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 157926 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 高等职业教育课程改革示范教材
书　　名 工科数学(上册)
主　　编 杨　军
责任编辑 蔡文彬　　编辑热线 025-83686531

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 宜兴盛世文化印刷有限公司
开　　本 787×1092 1/16 印张 15 字数 371 千
版　　次 2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-07433-2
总 定 价 54.00 元(上、下册)

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(发行部)

前　言

本书是以高职院校的人才培养目标为依据，针对高职教育工科类专业的特点，结合编者多年的教学实践编写而成。在编写过程中，遵循“数学为基、工程为用”的原则，本书具有如下特点：

1. 强调重要数学思想方法的作用。按照应用型高技能人才对数学知识的实际需求，突出数学知识的基础性地位和工具性作用，强化与实际应用联系较多的基础知识和基本方法。采用“案例驱动”的方式，由实际问题引出数学知识，再将数学知识应用于处理各种生活和工程实际问题。

2. 淡化理论性和系统性。讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂；多用图形、图表表达信息，采用有实际应用价值的案例、示例促进对概念、方法的理解；对基础理论一般不做论证，只给出解释或简单的几何说明。

3. 注重实际应用，强化针对性和实用性。在每一节前增加了学习目标，每一章后增加了小结与复习的内容，帮助学生总结重要结论和解题方法。每一节后都配备了类型合理、深度和广度适中的习题。还有专门与本书配备的练习册，方便学生在做课堂练习时使用。

4. 注重数学建模思想和方法的渗透。通过应用实例介绍数学建模过程，从而加深对数学概念的理解。同时在每章的最后一节专门设计了数学实验，以培养学生运用计算机及相应的数学软件求解数学模型的能力。

5. 设计若干模块，面向专业需求。本书共设计了十一个模块，其中以前三个模块（一元函数微积分学）为基础模块，后八个模块为选学模块，供不同专业选用，以满足工科各专业的特殊需求。

本书分上、下两册，共十一章。参加本书编写的有：陆峰（第一章、第七章、第九章）、杨军（第二章、第六章、第八章）、盛秀兰（第三章、第十章）、俞金元（第四章、第五章）、岳雪芳（第十一章）。全书由杨军修改、统稿、定稿。

本书的出版得到江苏城市职业学院公共课教学部、教务处以及南京大学出版社的大力支持，在此谨表示衷心感谢！

限于编者水平，加上时间仓促，书中难免有不当之处，敬请广大师生和读者批评指正。

编　者

2010 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

本章将介绍集合、函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质，这些内容都是学习本课程必需的基本知识.

第一节　函　　数

学习目标

1. 理解集合概念，掌握集合运算.
2. 理解函数的概念，了解分段函数，能熟练地求函数的定义域和对应法则.
3. 了解函数的主要性质(单调性、奇偶性、周期性和有界性).
4. 熟练掌握基本初等函数的解析表达式、定义域、主要性质和图形.
5. 理解复合函数、初等函数的概念.
6. 会建立实际问题中的函数关系式.

现实世界中，存在着各种各样不断变化着的量，它们之间相互依存，相互联系. 函数就是对各种变量之间的相互依存关系的一种抽象. 微积分学的研究对象是函数. 函数概念是数学中的一个基本而重要的概念. 直到公元 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)才提出现今通用的函数定义，使函数关系更加明确，从而推动了数学的发展和应用.

一、集合与区间

1. 集合的概念

引例：

① 向全班同学介绍自己的家庭；

② 一间教室里的全体学生；

③ 全体实数.

上述几个例子中体现了数学中的一个基本概念——集合.

(1) 集合(简称集)

集合是指具有某种共同属性的事物的总体. 常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 组成集合的事物称为集合的**元素**. 常用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. a 是集合 M 的元素表示为 $a\in M$(读作 a 属于 M). a 不是集合 M 的元素表示为 $a\notin M$(读作 a 不属于 M).

一个集合中，若只有有限个元素，则称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**.

(2) 子集

若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$（或 $B=A$）.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneq B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

(3) 集合的表示

列举法：把集合的全体元素一一列举出来.

例如 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如 $M=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数，$x^2+y^2=1\}$.

对于数集，我们在表示数集的字母的右上角，标上"＊"来表示该数集内排除 0 的集，标上"＋"来表示该数集内排除 0 与负数的集.

(4) 几个常用的数集

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集.

$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；$\mathbf{N}^*=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合，称为整数集.

$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合，称为有理数集.

$\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$.

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合，称为实数集. $\mathbf{R}^*$ 为排除 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数.

2. 集合的运算

(1) 集合运算的种类

集合的基本运算有以下几种：并、交、差.

给定两个集合 A，B，可定义下列运算（如图 1.1）：

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$.

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$.

差集：$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$.

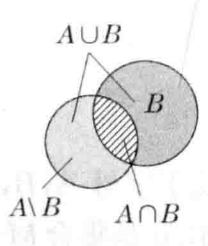


图 1.1

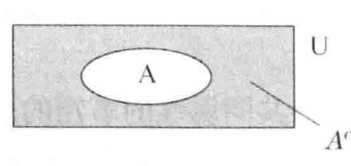


图 1.2

设 A 是一个集合，U 是包含 A 的全集，把 $U\setminus A$ 称为 A 的**余集**或**补集**（如图 1.2），记作 $\mathbf{A}^c$.

(2) 集合运算的法则

设 A、B、C 为任意三个集合，则

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

对偶律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 区间和邻域

(1) 有限区间

设 $a<b$，称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地有

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**；

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为**半开区间**.

其中 a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的**端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**.

从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1.3(a) 与图 1.3(b) 所示.

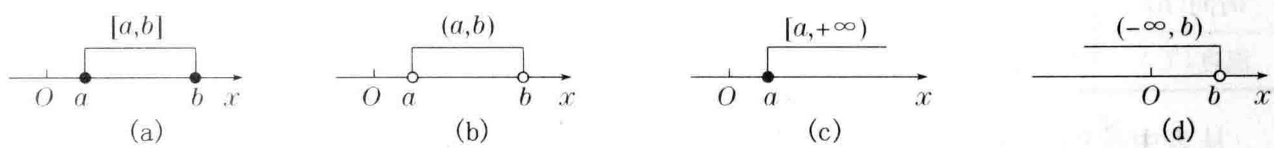


图 1.3

(2) 无限区间

引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），可类似地表示**无限区间**：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}；(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}；(-\infty,+\infty)=\{x\mid |x|<+\infty\}.$$

区间 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 在数轴上的表示分别如图 1.3(c) 与图 1.3(d) 所示.

(3) 邻域

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1.4(a).

(4) 去心邻域

点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，如图 1.4(b)，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

图 1.4

二、函数

1. 函数的概念

在考察某些自然现象或社会现象时,往往会遇到几个变量.这些变量并不是孤立地变化的,而是存在着某种相互依赖关系.

案例 1.1(**自由落体运动方程**) 在自由落体运动中,物体下落的距离 S 随下落时间 t 的变化而变化,下落距离 S 与时间 t 之间的函数关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度,$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$.

案例 1.2(**气温变动**) 某气象站测得某天早上 6 时至晚上 22 时的气温如表 1.1 所示.

表 1.1

时间(h)	6	8	10	12	14	16	18	20	22
温度(℃)	12.1	14.3	17	18.5	20.5	16.8	16.3	15.2	12

从表中我们可以了解当天 6 时至 22 时的气温变化情况.

案例 1.3(**股票曲线**) 股票在某天的价格和成交量随时间的变化常用图形表示,图 1.5 为某一股票在某天的走势图.

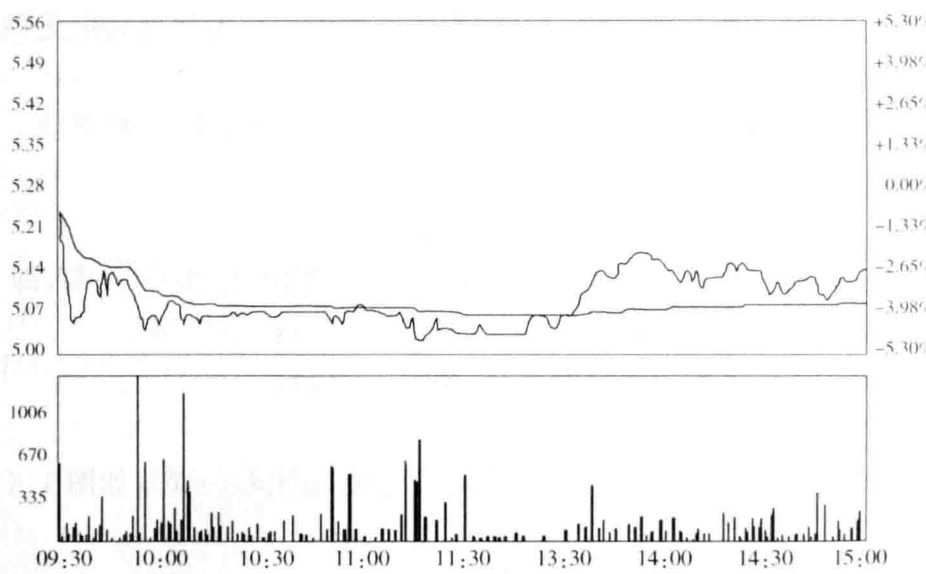


图 1.5

从股票曲线,我们可以看出这只股票当天的价格和成交量随时间的波动情况.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每一个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,其中 x 为**自变量**,y 为**因变量**.数集 D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**.当 x 取遍 D 内的各个数值时,对应的

函数值的全体组成的数集称为函数 $f(x)$ 的**值域**，记为 $f(D)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值只有唯一的一个，称这种函数为**单值函数**；否则，如果有多个函数值与之对应，就称为**多值函数**. 没有特别说明时，本书讨论的函数都是指单值函数.

从函数定义我们可以看出，构成函数的两要素是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

【例 1.1】 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x+2)}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解　函数的定义域是满足不等式组

$\begin{cases}x+2>0\\x+2\neq 1\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 的 x 值的全体. 解此不等式组，得其定义域为：

$$D=\{x\mid -2<x\leqslant 2,且\ x\neq -1\}，或\ D=(-2,-1)\cup(-1,2]$$

【例 1.2】 已知函数 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{1}{x^2}-1$，求 $f(x)$.

解　令 $\dfrac{1}{x}-1=t$，则 $\dfrac{1}{x}=t+1$，代入得

$$f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t.$$

所以 $f(x)=x^2+2x$.

2. 函数的表示法

表示函数的主要方法有三种：解析法(公式法)、表格法、图形法.

(1) 解析法

用数学式子表示函数的方法叫做**解析法**. 如 $y=f(x)$，其中 y 是因变量，f 为对应法则，x 是自变量. 其优点是便于数学上的分析和计算，本书主要讨论用解析式表示的函数，如案例 1.1 表示自由落体运动的路程与时间的函数关系式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$.

(2) 表格法

用表格形式表示函数的方法叫做**表格法**. 它是将自变量的值域对应的函数值列为表格，其优点是直观、精确. 如案例 1.2 气象站测量的某天不同时间的气温.

(3) 图形法

以图形表示函数的方法叫做**图形法**. 其优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势，如案例 1.3 某一股票在某天的走势图.

3. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任意 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**. 图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**，而称 K_2

为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**. 图形特点是函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

如果存在正数 M,使对任一 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**;图形特点是函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 函数 $f(x)$ 无界,就是说对任何正数 M,总存在 $x_1\in X$,使 $|f(x_1)|>M$.

例如:

① $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的,即 $|\sin x|\leqslant 1$.

② 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的. 或者说它在 $(0,1)$ 内有下界,无上界. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的.

(2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**(或**单调减少**)的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如:函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的.

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$).

如果对于任一 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如:$y=x^2$,$y=\cos x$ 都是偶函数. $y=x^3$,$y=\sin x$ 都是奇函数,$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l,使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x\pm l)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的**周期**(一般指最小正周期).

周期函数的图形特点:在函数的定义域内,每个长度为 l 的区间上,函数的图形有相同的形状.

4. 分段函数

案例 1.4(**矩形波的函数表示**) 图 1.6 为一个周期为 2π 矩形波的图形,它在区间 $[-\pi,\pi)$ 内的解析式为:$f(t)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant t<0,\\ A, & 0\leqslant t<\pi.\end{cases}$

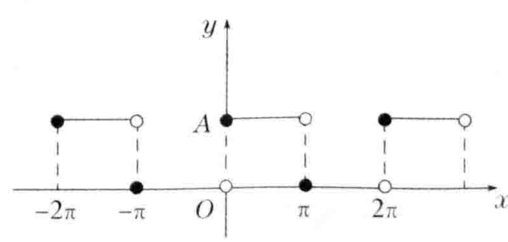


图 1.6

案例 1.5(**出租车收费标准**) 某城市出租车收费标准为:5 km 以内收费 10 元,超过 5 km 至 15 km 的部分每千米加收 1.2 元,超过15 km的部分每千米加收 1.8 元. 这样出租车

载客的收费 f 与行驶千米数 s 的函数关系可表示为：

$$f(s)=\begin{cases}10, & 0<s\leqslant 5,\\ 10+1.2(s-5), & 5<s\leqslant 15,\\ 22+1.8(s-15), & s>15.\end{cases}$$

这两个函数的特点是其由多个表达式构成，在工程实践及日常生活中常常会遇到此类函数. 在不同的定义域上用不同的函数表达式表示的函数称为**分段函数**.

下面介绍几种特殊的分段函数：

(1) 符号函数(如图 1.7)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

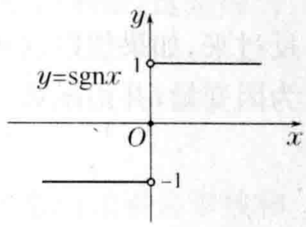


图 1.7

(2) 取整函数(如图 1.8)

设 x 为任意实数，称不超过 x 的最大整数为取整函数，记为 $y=[x]$，即若 $n\leqslant x<n+1$，则 $[x]=n$，其中 n 为整数，因此其数学表达式为：

$$y=\begin{cases}\cdots, & \cdots,\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots, & \cdots.\end{cases}$$

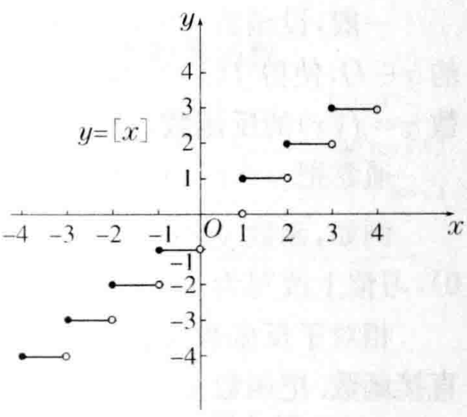


图 1.8

(3) 特征函数

$$y=\chi_A=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

其中 A 是数集，此函数常用于计数统计.

注意：分段函数是一个整体，不是几个函数，分段函数的图形应分段作出，求函数值 $f(x_0)$ 要先判断 x_0 所在的范围，再用对应的法则求函数值.

【例 1.3】(**旅馆定价**)　一旅馆有 200 间房间，如果定价不超过 100 元/间，则可全部出租. 若每间定价每高出 10 元，则会少出租 4 间. 设房间出租后的服务成本费为 20 元，试建立旅馆一天的利润与房价间的函数关系.

解　设旅馆的房价为 x 元/间，旅馆一天的利润为 y 元.

若 $x\leqslant 100$，则旅馆出租 200 间，利润为：

$$y=200(x-20).$$

若 $x>100$，则旅馆少出租 $4(x-100)/10$ 间，出租了 $200-4(x-100)/10$ 间，利润为：

$$y=[200-4(x-100)/10](x-20).$$

综上分析，旅馆利润与房价之间的函数为：

$$y=\begin{cases}200(x-20), & x\leqslant 100,\\ [200-4(x-100)/10](x-20), & x>100.\end{cases}$$

5. 反函数与复合函数

案例 1.6(**商品销售**) 在商品销售中,已知某种商品的价格(即单价)为 m,如果要想用该商品的销售量 x 来计算该商品销售总收入 y,那么 x 是自变量,y 是因变量,其函数关系为:

$$y=mx.$$

反过来,如果想以这种商品的销售总收入来计算其销售量,就必须把 y 作为自变量,把 x 作为因变量,并由函数 $y=mx$ 解出 x 关于 y 的函数关系

$$x=\frac{y}{m}.$$

这时称 $x=\frac{y}{m}$ 为 $y=mx$ 的反函数,$y=mx$ 为直接函数.

一般,设函数 $y=f(x)$ 在 D 上是一一对应的,值域为 $f(D)$,对任意的 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,若把 y 看作自变量,x 视为因变量,所得到的一个新的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$.

通常把 $y=f(x),x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$.

例如,函数 $y=-\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$ 的反函数是 $x=y^2+1(y\leqslant 0)$,习惯上改写为 $y=x^2+1(x\leqslant 0)$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的(如图 1.9). 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点,则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义,有 $a=f^{-1}(b)$,故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点;反之,若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点,则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的(即直线 $y=x$ 是线段 PQ 的垂直平分线).

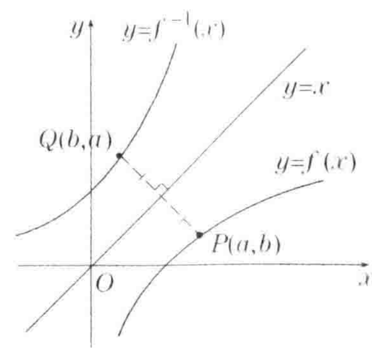


图 1.9

定理 1.1 如果直接函数 $y=f(x),x\in D$ 是单调增加(或减少)的,则存在反函数 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$,且该反函数也是单调增加(或减少)的.

案例 1.7 自由落体运动物体的动能 E 是速度 v 的函数:$E=f(v)=\frac{1}{2}mv^2$(m 为物体的质量),而速度 v 又是时间 t 的函数:$v=\varphi(t)=gt$.

通过中间变量 v 的联系,动能 E 也是时间 t 的函数,即将 $v=\varphi(t)$ 代入 $E=f(v)$ 中得到一个由 $E=f(v)$ 经过中间变量 $v=\varphi(t)$ 复合而成的关于 t 的函数:

$$E=f[\varphi(t)]=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

一般,设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数 $y=f[g(x)],x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**,它的定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$,即 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

函数 g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_1 内，即 $g(D)\subset D_1$. 否则，不能构成复合函数.

例如，函数 $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，函数 $u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ 上有定义，且 $g(D)\subset[-1,1]$，则函数 g 与 f 可构成复合函数 $y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}$，$x\in D$；但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任一 $x\in \mathrm{R}$，$u=2+x^2$ 均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

6. 初等函数

在自然科学与工程技术中，常见的函数大都是初等函数，构成初等函数的元素是常数和基本初等函数.

（1）基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为**基本初等函数**.

① 幂函数

形如 $y=x^{\mu}$（μ 为常数）的函数叫做**幂函数**. 定义域随 μ 值的不同而不同. 例如 $y=x$，$y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$. 常见的幂函数的图像如图 1.10 所示.

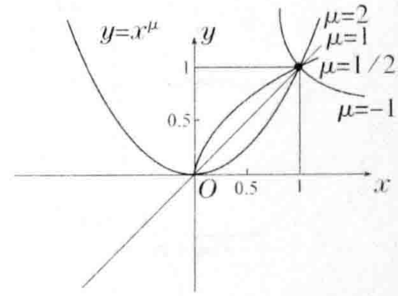


图 1.10

② 指数函数

形如 $y=a^x$（a 为常数且 $a>0$，$a\neq 1$）的函数叫做**指数函数**，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加的，例如 $y=2^x$；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调减少的，例如 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，其图像如图 1.11 所示，它们的图形关于 y 轴对称，且都过 $(0,1)$ 点.

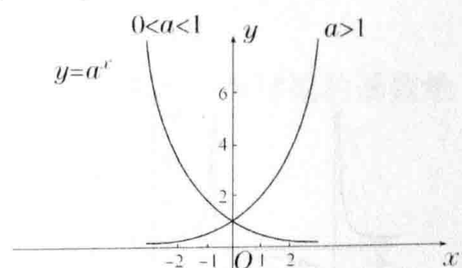


图 1.11

以常数 $\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots$ 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是工程中常用的指数函数.

③ 对数函数

形如 $y=\log_a x$（a 为常数且 $a>0$，$a\neq 1$）的函数叫做**对数函数**. 其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的，如 $y=\log_2 x$；

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的，如 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$，其图像如图 1.12 所示，它们的图形关于 x 轴对称，且都过 $(1,0)$ 点.

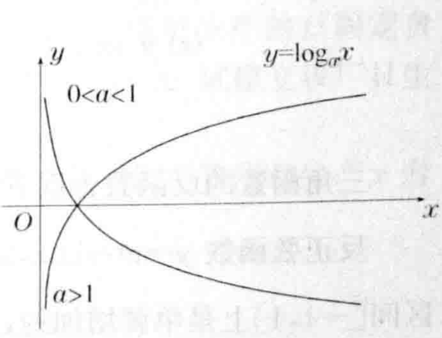
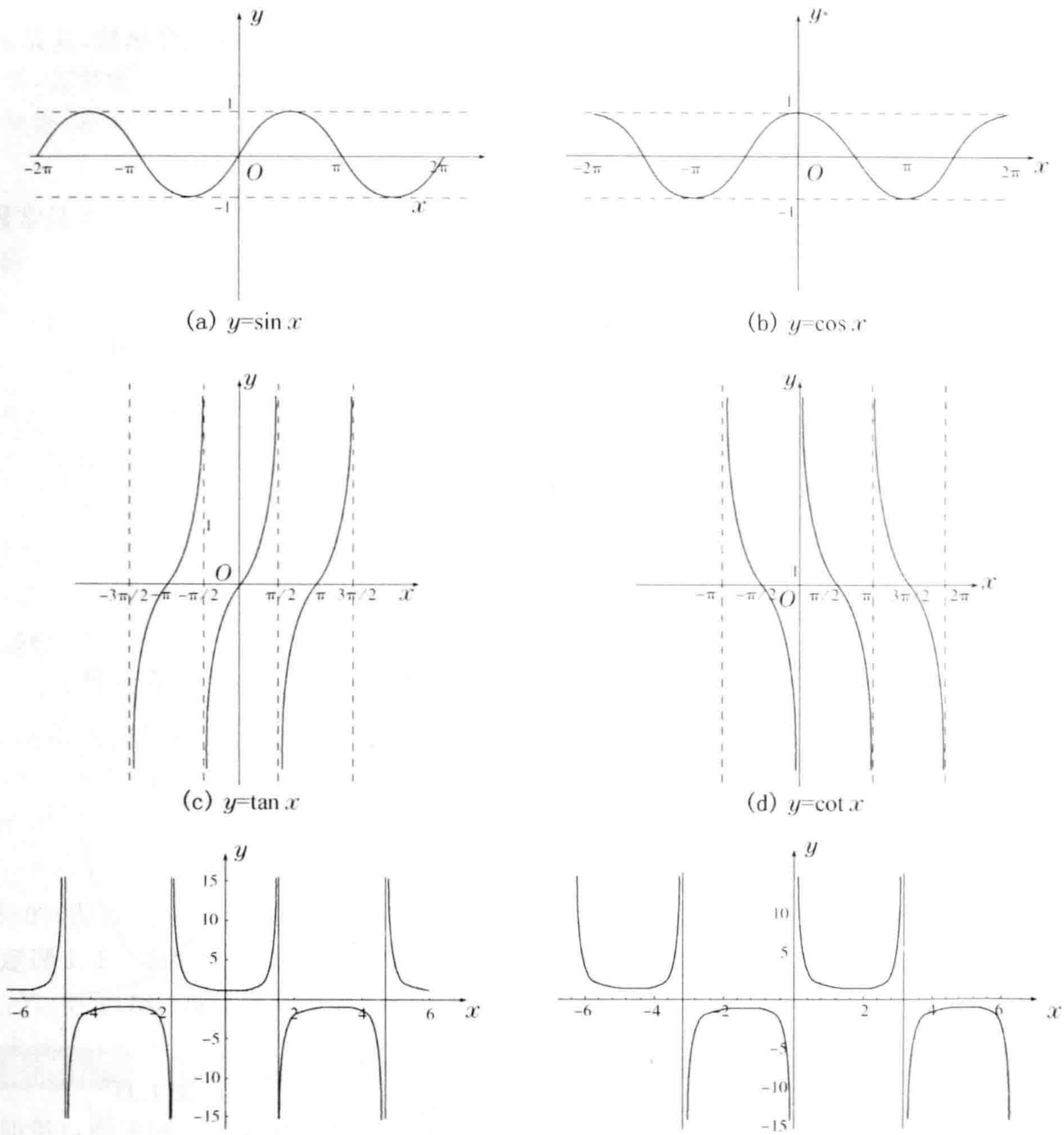


图 1.12

以常数 e 为底的对数函数，称为**自然对数函数**，记做 $y=\ln x$.

④ 三角函数与反三角函数

三角函数包括:正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$、余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$,如图 1.13 所示. 这些函数大家在中学数学中已很熟悉,这里就不再多作介绍了.



(a) $y=\sin x$　(b) $y=\cos x$

(c) $y=\tan x$　(d) $y=\cot x$

(e) $y=\sec x$　(f) $y=\csc x$

图 1.13

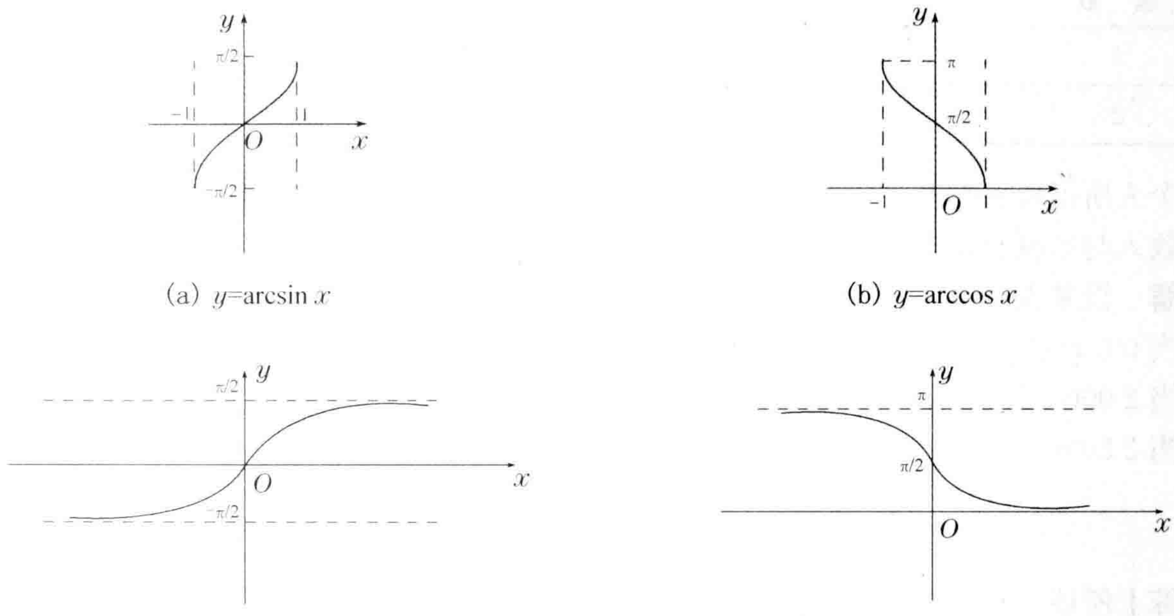
三角函数的反函数为**反三角函数**. 常用的反三角函数有以下四种:

反正弦函数 $y=\arcsin x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,如图 1.14(a)所示,在闭区间$[-1,1]$上是单调增加的,是奇函数.

反余弦函数 $y=\arccos x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$;如图 1.14(b)所示,在闭区间$[-1,1]$上是单调减少的,是非奇非偶函数.

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，如图 1.14(c)所示，在区间$(-\infty,\infty)$上单调增加的，是奇函数.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty,\infty)$，值域为$(0,\pi)$，如图 1.14(d)所示，在区间$(-\infty,\infty)$上是单调单调减少的，是非奇非偶函数.



(a) $y=\arcsin x$　　(b) $y=\arccos x$

(c) $y=\arctan x$　　(d) $y=\operatorname{arccot} x$

图 1.14

(2) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{\cot \dfrac{x}{2}}$等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

7. 函数关系式的建立

为解决实际问题，我们常常要把问题量化，找出问题中变量的关系，建立数学模型，即确定目标函数，再利用相关的数学知识解决这些问题.

【例 1.4】 某工厂生产计算机的日生产能力为 0 到 100 台，工厂维持生产的日固定费用为 4 万元，生产一台计算机的直接费用(含材料费和劳务费)是 4 250 元. 试建立该厂日生产 x 台计算机的总费用函数，并指出其定义域.

解 设该厂日生产 x 台计算机的总费用为 y(单位:元)，则 y 为日固定费用和生产 x 台计算机所需总费用之和，即

$$y=40\,000+4\,250x,$$

由于该厂每天最多能生产 100 台计算机，所以定义域为$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 100\}$.

【例 1.5】 我们知道，当个人的月收入超过一定金额时，应向国家交纳个人所得税，收入越高，国家征收的个人所得税的比例也越高，即“高收入，高税收”. 我国现行的税收制度是