工程数学

复变函数与数学物理方法

郭玉翠 编著

清华大学出版社

工程数学

复变函数与数学物理方法

郭玉翠 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书包含复变函数和数学物理方法两部分。复变函数部分的基本内容有：复数与复变函数的基本概念、复变函数的导数与积分、解析函数的性质和应用、复变函数的幂级数表示方法、留数定理及其应用等。数学物理方法部分的基本内容包括：波动方程、热传导方程、稳定场位势方程的导出、定解问题的提法；分离变量法求解定解问题的过程和步骤；二阶线性常微分方程的幂级数解法和斯图姆-刘维尔本征值问题；贝塞尔函数和勒让德函数的定义、性质与应用；求解定解问题的行波法、积分变换法和格林函数法等。

本书可以作为理科非数学专业和工科各专业本科生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：复变函数与数学物理方法/郭玉翠编著. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-34934-1

Ⅰ. ①工…　Ⅱ. ①郭…　Ⅲ. ①工程数学　Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 321314 号

责任编辑：刘　颖　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　**印　张**：20　**字　数**：482 千字
版　次：2014 年 1 月第 1 版　**印　次**：2014 年 1 月第1 次印刷
印　数：1～3000
定　价：39.00 元

产品编号：053859-01

前　言

在知识爆炸和信息量巨大的今天，处理好传统学科和经典内容与新知识和新内容之间的关系是高等教育教学必须面临的问题之一，在保证经典知识和方法能够传授给学生的同时，适当削减学时和整合知识内容是不得不做的事情，本书就是这种思维方法的产物。因为此前，在许多高等院校工科类专业课程设置上，将复变函数和数学物理方法作为两门少学时课程来安排，而综合性大学和高等师范院校的物理系等却是将复变函数和数学物理方程放在一起称为数学物理方法课程。现在部分高等工科院校也将复变函数和数学物理方法放到一起称为工程数学，目的是减少一些学时。这是可行的：第一，有先例，因为一些综合性大学和师范大学物理系就是这样做的；第二，工科复变函数的若干性质和内容比较容易从高等数学讲过的实变量函数的性质和内容移植过来，相对容易理解，所以合在一起确实可以节省一些学时而不影响基本内容和基本知识的传授。本教材就是体现这些理由的一种实践。

本书的特点是：

(1) 基本知识和基本内容一定要保证。复变函数部分讲述复数与复变函数、复变函数的极限与连续、解析函数、复变函数的积分、复变函数的幂级数以及留数及其应用；数学物理方法部分讲述波动方程、热传导方程、稳定场位势方程(拉普拉斯方程)的导出、定解问题的提法；分离变量法求解定解问题的过程和步骤；贝塞尔函数的定义、性质和应用，勒让德函数的定义、性质与应用；以及求解定解问题的行波法、积分变换法和格林函数法，等等。

(2) 复变函数部分推导简单、由浅入深，以容易理解和掌握为标准，必要的地方采用与实变量函数性质相对比的方法，主要强调复变函数本身的一些性质和特点。数学物理方法部分则突出物理直观，注重物理思想的建立，不仅讲知识，更强调讲方法，充分体现数学物理方法作为数学联系其他自然科学和技术领域最重要桥梁之一的作用，培养学生综合利用数学知识解决实际问题的能力。

(3) 增加例题的选配。由于课上学时少了，内容实际上并未相应地减少，所以学生要想深刻理解教材的知识内容实际上要在课外多花些时间，鉴于此，我们在教材中增加了例题讲解，以帮助学生理解知识内容，复变函数部分在相应的知识点处选配了比一般教材多的例题，教师可以在课上选讲，其他例题供学生自学参考；在数学物理方法部分则在每一章的习题后增加了例题补充作为学生阅读延伸的资料。加“*”号内容可作为选学内容，读者可根

据需要进行取舍。

教材编写者在北京邮电大学讲授复变函数和数学物理方法两门课程多年，教材是在原来所编教材基础上经过精心编撰和补充而成的。但由于笔者水平有限，书中难免会有不当之处，恳请各位师友、读者不吝赐教。

编　者

2013 年 10 月

目　录

第1篇　复变函数

第2篇　数学物理方法

第1篇

复 变 函 数

第1章

复变函数及其导数与积分

1.1 引言

见到方程

$$x^2+1=0,$$

我们的第一反应是它在实数域内没有根.因为要求出它的根遇到了负数开平方的问题.

众所周知,一般实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,都会遇到负数开平方的问题,那么 $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$ 这样的式子有什么意义吗?从有理数的角度来想象这样的数就会认为它们没有任何意义.12 世纪一位印度数学家婆什迦罗(Brahmin Bhaskara)说:"正数的平方是正数,负数的平方也是正数.因此,一个正数的平方根是两重的,一个正数和一个负数.负数没有平方根,因为负数不是平方数."

第一个将负数的平方根这个"显然"没有意义的东西写到公式里的人是 16 世纪意大利数学家卡尔达诺(Cardano),他把 40 看成是 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积.当时连卡尔达诺自己也认为这只是一种纯形式表达而已,没有任何意义,于是他给负数的平方根起了名字,叫"虚数",意指这是虚构的数.尽管不是有意为之,这个概念使数系得到了扩充,使实数域扩大到复数域.

关于复数理论系统的叙述是由瑞士数学家欧拉(Euler)作出的.他在 1777 年系统地建立复数理论,发现了负指数函数和三角函数之间的关系,创立了复变函数论的一些基本定理,并开始把它们用到力学和地图制图学上.用符号"$i=\sqrt{-1}$"作为虚数单位也是欧拉首创的,借助于这个虚数单位,就有 $\sqrt{-9}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=3i$, $\sqrt{-7}=\sqrt{7}\sqrt{-1}=2.646\cdots i$,这样一来,每一个实数都有一个自己的虚数搭档.此外,实数和虚数还能结合起来,形成单一的表达式,例如 $5+\sqrt{-15}=5+\sqrt{15}i$,而这种混合表达式通常称作**复数**.

复数被人们广泛认识和应用,是在两个业余数学家给出了虚数的几何解释之后.这两个

业余数学家是：测绘员威塞尔(Wessel)，挪威人；会计师阿尔刚(Robert Argand)，法国人.按照他们的解释，一个复数，例如 $3+4\mathrm{i}$ 可以像图 1.1 那样表示出来，其中 3 是水平方向的坐标，4 是垂直方向的坐标.

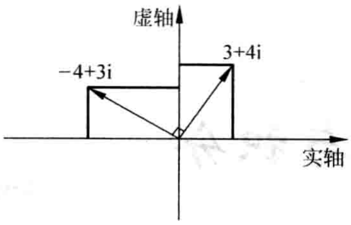

图 1.1

所有的实数(正数和负数)都对应横轴上的点，而虚数则对应纵轴上的点.当我们把横轴上的 3 乘以虚数单位 i 时，就得到纵轴上的虚数 3i.因此一个数乘以 i，相当于逆时针旋转 90°(见图 1.1).

如果把 3i 再乘以 i，又需再逆时针旋转 90°，这下又回到横轴上，不过是位于负数那一边了.这可以帮助我们理解

$$3\mathrm{i}\times\mathrm{i}=-3 \quad 或 \quad \mathrm{i}^2=-1.$$

这个规则同样适合于复数，把 $3+4\mathrm{i}$ 乘以 i，就得到

$$(3+4\mathrm{i})\mathrm{i}=3\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=3\mathrm{i}-4=-4+3\mathrm{i}.$$

从图 1.1 立刻可以看出，$-4+3\mathrm{i}$ 正好相当于 $3+4\mathrm{i}$ 这个点绕原点逆时针旋转了 90°.同样道理，一个数乘以 $-\mathrm{i}$ 就是它绕原点顺时针旋转了 90°.这一点从图 1.1 也可以看出.

最后，我们通过一个例子来说明复数具有现实的应用.

从前有一个富于冒险的年轻人，在他祖父的遗物中发现了一张羊皮纸，上面指出了一项宝藏.它这样写着：

乘船至北纬________，西经________(为了不泄密，隐去了实际经纬度)，就会找到一座荒岛.岛上北岸有一大片草地，草地上有一株橡树和一株松树，还有一座绞架，那是过去用来吊死叛变者的.从绞架走到橡树，并记住走了多少步；到了橡树向右拐个直角再走这么多步，在这里打个桩.然后回到绞架那里，朝松树走去，同样记住所走的步数；到了松树向左拐个直角再走这么多步.在这里也打个桩.在两桩的正中间挖掘，就可找到宝藏.

这张纸指示很明确，所以年轻人就租了一条船开往目的地.他找到了那座岛，也找到了橡树和松树，但令他大失所望的是绞架不见了.经过长时间的风吹、日晒和雨淋，绞架已经糟烂成土，一点痕迹也看不出来了.

我们的这位探险家陷入了绝望，在狂乱中，他在地上乱掘起来.但是地方太大了，一切只是白费力气，他只好两手空空、无功而返了.因此那项宝藏恐怕还在岛上埋着呢！

这是一个令人伤心的故事，更令人伤心的是，如果小伙子懂点数学，特别是复数，他本来是可以找到宝藏的！

把这个岛看成一个复平面，过两棵树画一个轴线(实轴)，过两树中点与实轴垂直作虚轴，如图 1.2 所示.

以两树距离的一半作长度单位，这样橡树位于实轴的 -1 点上，而松树位于实轴的 $+1$ 点上.我们不晓得绞架在哪里，不妨用大写希腊字母 Γ 来表示它的假设位置.这个位置不一定在两根轴上，因此 Γ 应该是复数，即

$$\Gamma=a+b\mathrm{i}.$$

现在来做点小计算，同时使用虚数的乘法.既然绞架在 Γ，橡树在 -1，两者的距离和方位便是 $-1-\Gamma=-(1+\Gamma)$.同理绞架与松树距离为 $1-\Gamma$.将这两段距离分别顺时针和逆时

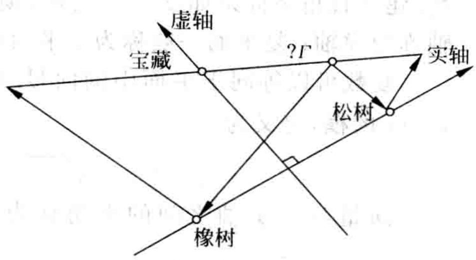

图　1.2

针旋转 90°,也就是按照复数乘法的法则将这两个数分别乘以 $-\mathrm{i}$ 和 i. 这样便得到两桩的位置为

第一根 $(-\mathrm{i})[-(1+\Gamma)]+1=\mathrm{i}(\Gamma+1)+1$,

第二根 $(+\mathrm{i})(1-\Gamma)-1=\mathrm{i}(1-\Gamma)-1$.

宝藏在两桩的正中间,因此我们应该求出上述两个复数之和的一半,即

$$\frac{1}{2}[\mathrm{i}(\Gamma+1)+1+\mathrm{i}(1-\Gamma)-1]=\frac{1}{2}[\mathrm{i}\Gamma+\mathrm{i}+1+\mathrm{i}-\mathrm{i}\Gamma-1]=\frac{1}{2}(2\mathrm{i})=\mathrm{i}.$$

现在看出来了,绞架 Γ 所在的位置在运算过程中消掉了,即不管绞架在何处,宝藏都在 $+\mathrm{i}$ 这个点上!

1.2　复数与复变函数

1.2.1　复数

设 x 和 y 是实数,形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数. 其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位,x 和 y 分别称为 z 的实部和虚部,分别记作 $x=\mathrm{Re}z$,$y=\mathrm{Im}z$.

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等是指它们的实部与虚部分别相等.

如果 $\mathrm{Im}z=0$,则 z 可以看成一个实数,记为 $z=x$,因此复数是实数概念的推广；如果 $\mathrm{Im}z\neq 0$,那么 z 称为一个虚数；如果 $\mathrm{Im}z\neq 0$,而 $\mathrm{Re}z=0$,则称 z 为一个纯虚数.

复数的共轭定义为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

复数的四则运算定义为

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$
$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$
$$\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

复数在四则运算这个代数结构下,构成一个复数域,记为 $\mathbb{C}$.

1.2.2　复平面

$\mathbb{C}$ 也可以看成平面 $\mathbb{R}^2$,称为复平面.

作映射:$\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$:$z=x+\mathrm{i}y\mapsto(x,y)$,则在复数集与平面 $\mathbb{R}^2$ 之间建立了一个一一对应关

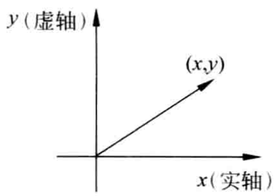

图 1.3

系. 建立直角坐标系如图 1.3 所示，横坐标轴称为实轴，纵坐标轴称为虚轴；复平面一般称为 z 平面或 w 平面等.

复数可以等同于平面中的向量. 向量的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**，定义为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

向量与正实轴之间的夹角称为复数的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$，$\tan(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$，并定义 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$，其中 $\arg z$ 称为辐角主值，并且 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$.

当 $\arg z(z\neq 0)$ 表示 z 的辐角主值时，它与 $\arctan\dfrac{y}{x}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}\right)$，有如下关系（图 1.4，图 1.5）：

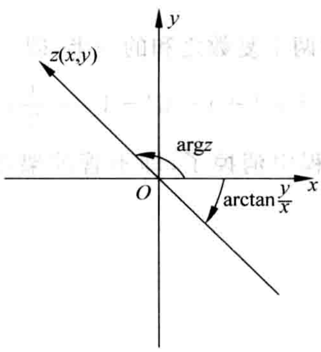

图 1.4

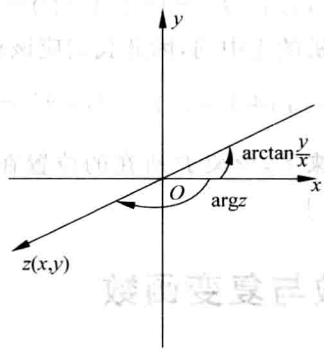

图 1.5

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$

复数的三角表示定义为

$$z=|z|(\cos\mathrm{Arg}z+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}z),$$

或简单写成

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

根据欧拉公式（欧拉公式的证明见 2.5 节）

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

复数还可以表示为指数形式

$$z=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z}.$$

1.2.3 复数加法的几何表示

设 z_1,z_2 是两个复数，它们的加法、减法的几何意义是向量相加减，几何意义如图 1.6 所示.

关于两个复数的和与差的模，有以下不等式：

(1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

(2) $|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

(3) $|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

(4) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

(5) $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$;

(6) $|z|^2=z\bar{z}$.

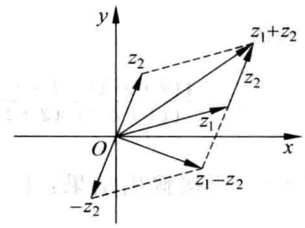

图 1.6

利用复数的三角表示，定义复数的乘幂为

$$z^n=|z|^n(\cos n\mathrm{Arg}z+\mathrm{i}\sin n\mathrm{Arg}z).$$

令 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则有

$$z^{-n}=|z|^{-n}[\cos(-n\mathrm{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(-n\mathrm{Arg}z)].$$

进一步，有

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\mathrm{Arg}z\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{n}\mathrm{Arg}z\right)\right],$$

共有 n 个值.

例 1.1 试用复数表示圆的方程

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,\quad a\neq 0,$$

其中，a,b,c,d 是实常数.

解 由复数及其共轭的定义，上述方程的复数形式为

$$az\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+d=0,\quad 其中\ \beta=\frac{1}{2}(b+\mathrm{i}c).$$

例 1.2 设 z_1,z_2 是两个复数，证明

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\quad \bar{\bar{z}}_1=z_1.$$

证明 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则 $z_1+z_2=x_1+x_2+\mathrm{i}(y_1+y_2)$.

$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$，所以

$\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-\mathrm{i}(y_1+y_2)=x_1-\mathrm{i}y_1+x_2-\mathrm{i}y_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2$,

$\overline{z_1z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=\bar{z}_1\bar{z}_2$,

$\bar{\bar{z}}_1=\overline{x_1-\mathrm{i}y_1}=x_1+\mathrm{i}y_1=z_1$.

利用复数的三角表示，我们可以更简单地表示复数的乘法与除法. 设 z_1,z_2 是两个非零复数：

$$z_1=|z_1|(\cos\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}z_1),\quad z_2=|z_2|(\cos\mathrm{Arg}z_2+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}z_2),$$

于是

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)],$$

即 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$，其中后一个式子应理解为集合相等.