大学数学教与学研究系列之

助教　助学　助考研

高等数学

教与学要览

GAODENG SHUXUE

JIAOYUXUE YAOLAN

（上册）

喻德生◎主编

西南交通大学出版社

Http://press.swjtu.edu.cn

高等数学教与学要览

（上册）

主　　编　喻德生

编写人员（按章节编写顺序排序）

喻德生　李　昆　邹　群　明万元

黄香蕉　王卫东　程　筠　杨就意

胡结梅　徐　伟　陈菱蕙　毕公平

漆志鹏　熊归凤　魏贵珍　李园庭

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教与学要览. 上册 / 喻德生主编. —成都：西南交通大学出版社，2012.8（2013.6 重印）
ISBN 978-7-5643-1621-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①喻… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 176472 号

高等数学教与学要览

（上　册）

主编　喻德生

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	四川五洲彩印有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	21.5
字　　数	478 千字
版　　次	2012 年 8 月第 1 版
印　　次	2013 年 6 月第 2 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1621-1
定　　价	35.00 元

前 言

本书是根据高等学校理工科高等数学课程教学基本要求，结合当前高等数学教学改革和学生学习的实际需要，组织教学经验比较丰富的教师编写的. 它可作为理工科高等数学学习指导书和研究生考试复习资料供学生使用，也可以作为高等数学教学同步教材供教师参考.

该书参照理工科“高等数学”教材基本内容，依照各章知识结构体系——知识单元分节进行编写. 每节包括教学目标、内容提要、疑点解析、例题分析和练习题五个部分，各部分编写说明如下：

一、教学目标 根据高等数学教学大纲基本要求，分层次逐点进行编写. 目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性.

二、内容提要 以各节的知识结构为框架，用树形图表的方式，简明扼要地总结、概括各节的主要内容. 目的是对各节的教学内容进行梳理，使学生掌握各个知识之间的联系，将零散的知识形成系统的知识结构. 在这部分中，通常先列出所述知识点的名称，目的是当你熟悉这个名称的含义时，就不必再往下看.

三、疑点解析 围绕高等数学教学的重点、难点，从不同侧面阐述有关知识点的数学思想、数学方法、教学方法等内容，主要包括对一些概念的理解，一些定理的条件与结论分析，一些解题方法与技巧的总结，各种知识之间的区别与联系等，从而加深对知识的理解、解决高等数学教学中可能出现的问题.

四、例题分析 围绕高等数学教学内容的重点、难点，按每大节 20 个、每小节 10 个左右例题幅度选择一些比较典型的例题，从不同侧面阐述解题的思路、方法与技巧. 每道题均按照“例题+分析+解或证明+思考”的模式编写，运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质，从而在解题过程中，运用“师生对话”机制，使“教、学、思”融于一题，提高学生分析问题和解决问题的能力.

五、练习题 各节大约按例题一半的幅度配备练习题，目的是让学生在各题“思考”的基础上，进一步得到训练.

每章还配有测试卷两套，可作为学生学完各章内容之后，检测自己掌握所学知识的程度之用. 此外，书后附有各节练习题答案或提示，以及测试卷答案.

本书由喻德生教授任主编. 参与本书编写的老师有：第一章第三节李昆，第四节邹群；第二章第一节明万元，第二、第三节黄香蕉；第三章第一节王卫东，第二节程筠；第四章第一、第二节杨就意；第六章第一、第二节胡结梅；第七章第一节徐伟，第二、第三节陈菱蕙；第八章第一节杨就意，第四节毕公平；第九章第一节漆志鹏，第二节熊归凤；第十一章第一、第二、第三节魏贵珍；第十二章第一、第二、第三节李园庭；其余章节及测试题喻德生. 全书修改、统纂定稿喻德生.

由于水平有限，书中难免出现疏漏、甚至错误之处，敬请国内外同仁和读者批评指正.

编者

2012 年 5 月

目　录

第一章　函数与极限 1

第一节　函数的概念与性质 1

第二节　极限的概念与性质 12

第三节　极限的计算 27

第四节　函数的连续性 46

综合测试题 1—A 63

综合测试题 1—B 64

第二章　导数与微分 67

第一节　导数的概念与性质 67

第二节　四种函数的导数 82

第三节　函数的微分 97

综合测试题 2—A 105

综合测试题 2—B 107

第三章　中值定理与导数的应用 109

第一节　中值定理与洛必达法则 109

第二节　导数的应用 123

综合测试题 3—A 140

综合测试题 3—B 142

第四章　不 定 积 分 144

第一节　不定积分的概念与换元积分法 144

第二节　分部积分法与特殊类型函数的积分 158

综合测试题 4—A 173

综合测试题 4—B 174

第五章　定　积　分 177

第一节　定积分的概念与性质 177

第二节　定积分的计算方法 193

第三节　反 常 积 分 206

综合测试题 5—A 216

综合测试题 5—B 218

第六章　定积分的应用 220

第一节　定积分的几何应用 220

第二节　定积分的物理应用......239
综合测试题 6—A......247
综合测试题 6—B......249
第七章　空间解析几何与向量代数......250
第一节　向量及其运算......250
第二节　曲面与平面......260
第三节　空间曲线与直线......271
综合测试题 7—A......284
综合测试题 7—B......286
练习题与综合测试题答案或提示......288

第一章　函数与极限

第一节　函数的概念与性质

一、教学目标

1. 理解函数的概念与性质，了解函数与映射之间的关系；会求函数的定义域、值域以及一些问题的函数表达式；会求解一些有关函数单调性、有界性、奇偶性和周期性的问题.

2. 了解复合函数的概念，会求函数的复合函数或将一个函数分解成一些函数的复合.

3. 了解反函数的概念，了解反函数与直接函数之间的关系；会求函数的反函数.

4. 了解初等函数的概念与性质，会进行函数的运算.

二、内容提要

- 函数
  - 基本概念
    - 函数 $y=f(x)\Leftrightarrow \forall x\in D\xrightarrow{f} y\in R,\ D_f=D$ 为函数 f 的定义域，$R_f=f(D)$ 为函数 f 的值域.
    - 复合函数 $y=f[\varphi(x)]\Leftrightarrow y=f(u)$，定义域 D_1, $u=\varphi(x)$ 在 D 上有定义 ($D\subset u=\varphi(x)$ 的定义域 D_2)且值域 $\varphi(D)\subset D_1$ (u 为中间变量, D 为 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域).
    - 反函数 $x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow \forall y\in f(D)\xrightarrow{y=f(x)} x\in D$ (反函数习惯记为 $y=f^{-1}(x)$).
    - 分段函数 $\Leftrightarrow$ 在定义域内，对应不同的区间，有不同的表达式.
    - 初等函数 $\Leftrightarrow$ 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.
  - 基本性质
    - 有界性：$y=f(x)$ 定义域 D，如 $\exists M>0,\ \forall x\in X\subset D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M \Leftrightarrow f(x)$ 在 X 上有界；否则，$f(x)$ 在 X 上无界. 即对任何 $M>0,\exists x_1\in X\subset D$，使 $|f(x_1)|>M\Leftrightarrow y=f(x)$ 在 X 上无界.
    - 单调性：$y=f(x)$，定义域 D，如 $\forall x_1,x_2\in I\subset D$，且 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$) $\Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调增加(或单调减少).
    - 奇偶性：$y=f(x)$，定义域 D 关于原点对称，如 $\forall -x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$ (或 $f(-x)=-f(x)$) $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶数函数(或奇函数).
    - 周期性：$y=f(x)$，定义域 D，如 $\exists l>0,\ \forall x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$ 为周期函数，l 为 $f(x)$ 的周期(通常取最小正周期).
  - 基本初等函数
    - 定义：基本初等函数 $\Leftrightarrow$ 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的统称.
    - 性质、图像详见教材.

三、疑点解析

1. **关于函数与映射的关系** 映射 $y=f(x)$ 是定义在两个非空集 X,Y 上的，使得对 X 中的每个元素 x，按照对应法则 f，在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应；而函数 $y=f(x)$ 是数集 $D_f\subset\mathbf{R}$ 到数集 $\mathbf{R}$ 的映射. 可见，函数的定义域和值域都是非空数集，而映射的定义域和值域不必是数集；函数是一种特殊的映射，但映射未必就是函数.

函数 $y=f(x)$ 也可以理解为一个变量 y 对另一个变量 x 的依赖关系，使得对每个 $x\in D_f$，通过对应法则 f，有唯一的 $y\in R_f$ 与之对应. 可见，函数是由定义域 D_f、对应法则 f 和值域 R_f 三部分构成. 但是，函数的定义域 D_f、对应法则 f 和值域 R_f 三部分并不完全独立，因为一旦确定了函数的定义域 D_f 和对应法则 f，函数的值域 R_f 也就随之确定.

如果把函数的对应法则 f 理解成一个计算函数值的程序，那么，每输入一个 x，通过这个程序，就可以输出一个函数值 y（见图 1-1）.

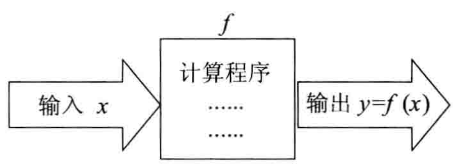

图 1-1

2. **关于确定函数的两个要素** 定义域 D_f 与对应法则 f 是构成函数 $y=f(x)$ 的两个要素. 两个形式上不同的函数，如果它们的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的函数；否则，只要两个函数的定义域或对应法则中有一个不同，它们就是不同的函数.

一般地，如果通过恒等变形可以将一个函数化成另一个函数，那么这两个函数就是相同的；反之，如果不是通过恒等变形，即使把一个函数化成了另一个函数，这两个函数也是不同的.

例如，函数 $f(x)=2\ln|x|$ 与 $g(x)=\ln x^2$ 是相同的. 因为它们的定义域相同，都是 $\mathbf{R}\setminus\{0\}$；再由对数的性质有，$g(x)=\ln|x||x|=\ln|x|+\ln|x|=2\ln|x|$，因此它们的对应法则也相同.

然而，函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 与 $g(x)=x$ 是不同的. 因为尽管它们的定义域相同，都是 $\mathbf{R}$，但它们的对应法则不同. 因为 $\arcsin x$ 表示反正弦函数的主值，即 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，故 $\arcsin(\sin x)$ 应在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，而不是在 $\mathbf{R}$ 上取值.

事实上，当 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，因为 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x-2k\pi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\sin(x-2k\pi)=\sin x$，所以

$$f(x)=\arcsin[\sin(x-2k\pi)]=x-2k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z};$$

当 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ 时，因为 $-\dfrac{\pi}{2}<x-(2k+1)\pi<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin[x-(2k+1)\pi]=-\sin x$，所以

$$f(x)=\arcsin\{\sin[(2k+1)\pi-x]\}=(2k+1)\pi-x,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

综合所述有

$$f(x)=\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x-2k\pi, & 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ (2k+1)\pi-x, & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}\quad (k\in\mathbf{Z}).$$

显然，当 $k=0$ 时， $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\arcsin(\sin x)=x$ ，此时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 才是同一函数.

函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sin(\arcsin x)$ 也是不同的. 因为尽管它们的对应法则相同，即对任意 x ， $f(x)$ 与 $g(x)$都与 x 对应，但它们的定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ ，而 $g(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

3. **关于函数的复合**　函数的复合就是要把两个或两个以上的函数复合成一个函数，但不是任意两个或两个以上的函数都能复合成一个函数. 根据函数的定义，其定义域是非空的. 因此，要使两个函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 能够复合成一个函数，首先要保证复合后所得到的式子 $f[g(x)]$ 中 x 有取值的可能. 如果 x 没有取值的可能，尽管“形式上”可以得到这么一个式子，但这个式子是没有意义的. 也就是说，它不是函数，否则就是定义域是空集的函数，这与函数的定义不符.

那么怎样才能保证复合后所得到的式子 $f[g(x)]$ 中 x 有取值的可能呢？假若 $x=x_0$ 是使得这个式子有意义的一个取值，首先 x_0 必须在 $g(x)$ 的定义域 D 之内，即 $x_0\in D$ ，否则 $g(x_0)$ 没有意义；其次，函数 $g(x)$ 在 x_0 处的值 $u_0=g(x_0)$ 还必须落在函数 $f(x)$ 的定义域之内，即 $g(x_0)\in D_f$ ，否则 $f(u_0)$ 没有意义. 又显然， $g(x_0)$ 在 $g(x)$ 值域之内，即 $g(x_0)\in R_g$ ，因此 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$.

一般地，要使两个函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 能够复合成一个函数 $y=f[g(x)]$ ，必须存在 $x_0\in D_g$ ，使 $u_0=g(x_0)\in D_f$. 也就是说，函数 $f(u)$ 的定义域与函数 $g(x)$ 的值域的交集是非空的，即 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$ ；否则，这两个函数是不能复合的.

如果把复合函数中的两个对应法则 f,g 理解成两个相互关联的计算程序，那么，每输入一个 x ，通过程序 g ，就可以输出（输入）一个函数值 u ，再通过程序 f ，就可以输出一个函数值 y （见图 1-2）.

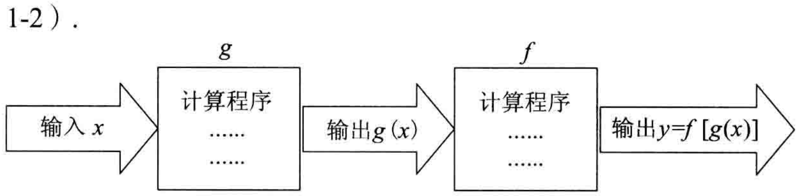

图 1–2

例如，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x-1$ 可以复合为一个函数 $y=\sqrt{x-1}$, 因为函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域

$$D_y\cap R_u=[0,+\infty)\cap\mathbf{R}=[0,+\infty)\neq\varnothing.$$

而函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=1+\mathrm{e}^x$ 是不能构成复合函数的，因为它们通过复合所得到的式子 $\arcsin(1+\mathrm{e}^x)$ 没有意义，也就是

$$D_y\cap R_u=[-1,1]\cap(1,+\infty)=\varnothing.$$

类似地，可以得到两个以上函数可以复合的条件. 例如，三个函数 $y=f(u)$, $u=g(v)$, $v=h(x)$ 能够复合成一个函数 $y=f\{g[h(x)]\}$，也就是必须存在 $x_0\in D_h$，使 $v_0=h(x_0)\in D_g$ 且 $u_0=g(v_0)\in D_f$，即 $D_f\cap R_g\cap D_g\cap R_h\neq\varnothing$；否则，这三个函数是不能复合的.

例如，函数 $y=\ln u$, $u=\sin v$, $v=\dfrac{\pi}{1+x^2}$ 可以复合成一个函数 $y=\ln\sin\dfrac{\pi}{1+x^2}$，因为

$$D_y\cap R_u\cap D_u\cap R_v=(0,+\infty)\cap[-1,1]\cap(-\infty,+\infty)\cap(0,\pi]=(0,1]\neq\varnothing.$$

而函数 $y=\ln u$, $u=\sin v$, $v=-\dfrac{\pi}{1+x^2}$ 则不能复合成一个函数，因为

$$D_y\cap R_u\cap D_u\cap R_v=(0,+\infty)\cap[-1,1]\cap(-\infty,+\infty)\cap[-\pi,0)=\varnothing,$$

所以式子 $\ln\sin\left(-\dfrac{\pi}{1+x^2}\right)$ 没有意义.

4. **关于函数复合的分解**　与函数复合相反，函数复合的分解是将一个函数分解成两个或两个以上函数. 显然，可能有多种方式将一个函数分解成几个不同函数的复合.

例如，函数 $y=\log_a(1+\sqrt{1+\sin^2 x})$ 可以看成是由函数

$$y=\log_a u,\quad u=1+\sqrt{v},\quad v=1+\sin^2 x$$

复合而成的，也可以看成是由函数

$$y=\log_a u,\quad u=1+\sqrt{v},\quad v=1+w^2,\quad w=\sin x$$

复合而成的. 这两种分解都是正确的.

但是，我们毕竟要问，上述两种分解哪一种更可取呢？这需要根据实际应用来判定. 在高等数学，比如说在求函数微分和积分的过程中，往往需要将一个函数看做是由一些基本初等函数或一些简单的初等函数复合而成的，因此这里通常讨论该意义下函数复合的分解. 据此判断，上例中函数 $y=\log_a(1+\sqrt{1+\sin^2 x})$ 的第二种分解是符合要求的，而第一种分解则不太符合这个要求.

5. **关于初等函数**　初等函数是常数和基本初等函数，经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤而成，并能用一个式子表示的函数. 由此可见，经过无限次的四则运算或无限次的复合步骤而成的函数和不能用一个式子表示的函数都是非初等函数. 例如，函数 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是非初等函数，因为它是由无限项（无限个函数）的和构成的；取整函数 $y=[x]$ 也是非初等函数，因为它不能用一个式子表示出来. 但高等数学课程中讨论的函数绝大多数都是初等函数.

6. **关于分段函数**　分段函数是在自变量不同的变化范围内，对应法则用不同的式子表示出来的函数. 这似乎满足非初等函数“不能用一个式子表示出来”的要求，那么是不是分段函数都是非初等函数呢？答案是否定的. 例如，绝对值函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是分段函数，但这个函数与用一个式子表示出来的函数 $y=\sqrt{x^2}$ 实际上是同一个函数，因此绝对值函数是初等函数.

因此，分段函数未必是非初等函数，但一般的分段函数都是非初等函数. 此外，还应注意，分段函数是定义在不同范围内的几个函数构成的一个函数，而不是几个函数. 分段函数的定义域是各段上自变量取值范围的并集.

7. 关于函数的周期性 根据周期函数的定义，易知函数的周期可能不唯一. 甚至，一些常见的周期函数，都是有无穷多个周期的函数. 例如，所有的 $2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 都是正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的周期. 有时，周期函数的周期的多值性会产生歧义，给使用带来不便. 因此，为使周期函数的周期具有唯一性，通常情况下约定"周期"是指函数的最小正周期. 例如，正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的周期通常是指 2π，而不是所有的 $2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$. 这样所指的周期具有唯一性，没有歧义. 但应注意，在周期函数没有最小正周期的情况下，会出现函数有无穷多个周期，但却没有"周期"的现象.

例如，可以证明任意有理数 r 都是狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

的周期.

事实上，设 r 是任意有理数，则当 x 是有理数时，$x+r$ 是有理数，于是 $D(x+r)=1=D(x)$；当 x 是无理数时，$x+r$ 是无理数，于是 $D(x+r)=0=D(x)$. 故对任意的实数 x，恒有 $D(x+r)=D(x)$，因此任意有理数 r 都是利克雷函数的周期.

由于没有最小的正有理数，因此狄利克雷函数有无穷多个周期，但没有最小正周期.

四、例题分析

例 1 设映射 $f:X\to Y, A\subset X, B\subset X$，证明：(i) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$；(ii) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

分析 显然 $f(A), f(B), f(A\cap B), f(A\cup B)$ 均为映射 f 的值域的子集. 证明一个集合是另一个集合的子集，只需证明这个集合的元素都是另一个集合的元素；证明两个集合相等，只要证明它们相互包含.

证明 (i) $\forall y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B$，使得 $y=f(x)\Rightarrow \exists x\in A\wedge x\in B$，使得 $y=f(x)$

$$\Rightarrow y\in f(A)\wedge y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

(ii) $\forall y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B$，使得 $y=f(x)\Leftrightarrow \exists x\in A\vee x\in B$，使得 $y=f(x)$

$$\Leftrightarrow y\in f(A)\vee y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)\Leftrightarrow f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

思考 (i) 举出 (i) 式中真包含的例子；若 f 为一一映射，是否可以得出比 (i) 式更强的结论？若是，写出结论并给出证明；若否，举出反例；(ii) 将以上结论推广到三个集合 $A\subset X, B\subset X, C\subset X$ 的情形.

例 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$. (i) 求函数 $f(\sin x)$ 的定义域；(ii) 讨论 a 为何值时，两函数 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 可以进行加减运算，并求函数 $f(x+a)\pm f(x-a)$ 的定义域.

分析 这是已知简单函数的定义域，要求复合函数定义域的问题. 因此，被复合的中间变量必须落在简单函数的定义域之内.

解 (i) 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$，故由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，解得

$$2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

因此 $f(\sin x)$ 的定义域 $D=\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

（ii）由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，解得

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}.$$

于是当$a\leqslant 1-a$，即$a\leqslant\frac{1}{2}$时，不等式组的解为

$$a\leqslant x\leqslant 1-a；$$

当$1-a<a$，即$a>\frac{1}{2}$时，不等式组$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$无解.

于是当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，两函数$f(x+a)$和$f(x-a)$可以进行加减运算，且函数$f(x+a)\pm f(x-a)$的定义域为

$$D=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant 1-a\}；$$

当$a>\frac{1}{2}$时，两函数$f(x+a)$和$f(x-a)$不能进行加减运算，此时$f(x+a)\pm f(x-a)$无意义.

思考 （i）求函数$f(2\sin x)$的定义域；（ii）讨论a为何值时，两函数$f(x+a)$和$f(a-x)$可以进行加减运算，并求函数$f(x+a)\pm f(a-x)$的定义域；（iii）若$D=[-1,0]$，以上各题结果如何？$D=[-1,1]$呢？

例 3 设$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求$f[f(x)]$.

分析 把$f(x)$看成x，代入$f(x)$中，化简即可. 注意，化简过程中不能扩大或缩小x的范围.

解 $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty),\ R_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 由于$D_f\cap R_f\neq\varnothing$，所以$f(x)$与$f(x)$可以复合，于是

$$f[f(x)]=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\dfrac{x-1}{x+1}+1}=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)+(x+1)}=-\frac{1}{x}.$$

又由$f(x)$的定义域可知$x\neq-1$；由$f(x)$的值域可有$f(x)\neq-1$，解得$x\neq 0$. 故所求的复合函数为

$$f[f(x)]=-\frac{1}{x}\quad(x\neq 0,-1).$$

思考 （i）若$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，结果如何？（ii）若求$f\{f[f(x)]\}$，以上两题结果如何？

注：从本例可以看出，化简所得到的式子，未必就是所求的复合函数. 因为化简未必是恒等变形，它可能改变自变量的取值范围.

例 4 设$f(x)=\begin{cases}2-x,\ x\leqslant 0\\x+2,\ x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2,\ x<0\\-x,\ x\geqslant 0\end{cases}$，求$f[g(x)]$.

分析 先将分段函数$g(x)$看成x代入$f(x)$中，得出关于$g(x)$的分段表达式；再将$g(x)$各段的表达式代入，得出各段关于自变量x的表达式及各段上x的取值范围；最后删除可能出现的取值范围为空集的所谓的“多余段”.

解 因为

$$f[(g(x)]=\begin{cases}2-g(x),\ g(x)\leqslant 0\\2+g(x),\ g(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-x^2, & x^2\leqslant 0\wedge x<0\\2+x^2, & x^2>0\wedge x<0\\2-(-x), & -x\leqslant 0\wedge x\geqslant 0\\2+(-x), & -x>0\wedge x\geqslant 0\end{cases},$$

解不等式，求出各段中自变量的取值范围，得

$$f[g(x)]=\begin{cases}2-x^2, & x\in\varnothing\\2+x^2, & x<0\\2+x, & x\geqslant 0\\2-x, & x\in\varnothing\end{cases}.$$

删除多余段，得所求的复合函数

$$f[g(x)]=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\2+x, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

思考　（i）尝试求出 g 与 f, f 与 f 及 g 与 g 的复合 $g[f(x)], f[f(x)], g[g(x)]$ 以及这两个函数的三重复合；（ii）分段函数的复合函数一定是分段函数吗？如果不一定是，举例说明.

例 5　已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$.

分析　这是已知复合函数，求被复合的中间函数的问题. 而确定一个函数，只要求出其表达式和定义域即可.

解　因为 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得，$1-x\geqslant 1$，所以 $x\leqslant 0$. 故

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\ x\leqslant 0.$$

思考　（i）如果 $\varphi(x)\geqslant 1$，结果如何？$\varphi(x)\leqslant 0$，结果怎样？（ii）若 $f[\varphi(x)]=\sin^2 x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，结果如何？$\varphi(x)\leqslant 0$ 呢？

例 6　设函数 $f(x)$ 满足等式：

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=c\ln x, \tag{1}$$

其中 a,b,c 为常数且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

分析　在已知等式中，有两个函数 $f(x), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是未知的，但若求得其中一个，另一个也就确定了. 因此要利用 $f(x), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 之间的关系，得出另一个等式，通过解方程组求解.

解　以 $\dfrac{1}{x}$ 代入已知等式（1）中的 x，得

$$bf(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=-c\ln x. \tag{2}$$

（1）、（2）两式联立，解得

$$f(x)=\begin{vmatrix}c\ln x & b\\-c\ln x & a\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}a & b\\b & a\end{vmatrix}=\frac{c(a+b)\ln x}{a^2-b^2}=\frac{c}{a-b}\ln x.$$

思考 （i）如果（1）式为 $af(x)+bf\left(\dfrac{2}{x}\right)=c\ln x$，应如何求解？（ii）如果 $a=b$，那么 c 等于多少？能否求出 $f(x)$ 或满足（1）式的某些 $f(x)$？

例 7 证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的任意邻域 $U^{\circ}(0,\delta)$ 内是无界的.

分析 根据定义，对任给的 $M>0$，只要找出某 $x_0\in U^{\circ}(0,\delta)$，使 $|f(x_0)|>M$.

证明 任给 $M>0$，要使

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|>M,$$

必使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$，即 $|x|<\dfrac{1}{M}$. 令 $\delta=\dfrac{1}{M}$，取充分大的正整数 n，使 $x_0=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\in U^{\circ}(0,\delta)$，则有

$$|f(x_0)|>M$$

成立. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任意邻域 $U^{\circ}(0,\delta)$ 内是无界的.

思考 （i）若取充分大的正整数 n，及 $x_0=\dfrac{1}{2n\pi+\alpha}\in U^{\circ}(0,\delta)(0<\alpha<\pi)$，要使 $|f(x_0)|>M$，则 δ 最大应为多少？（ii）$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$，结论如何？应如何证明？$f(x)=\dfrac{1}{x}\tan\dfrac{1}{x}$ 呢？

例 8 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)\ (l>0)$ 上的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 是单调增加的，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也是单调增加的.

分析 根据定义，只需证明，对任意的 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$.

证明 对任意的 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$ 且 $-x_1>-x_2$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 是单调增加的，故有

$$f(-x_1)>f(-x_2).$$

又因为 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)\ (l>0)$ 上的奇函数，所以

$$f(-x_1)=-f(x_1),\quad f(-x_2)=-f(x_2).$$

代入上式并在不等式两边乘以 -1，得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

因此 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也是单调增加的.

思考 （i）若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 是单调减少的，结论如何？（ii）若 $f(x)$ 为偶函数，结论怎样？（iii）若 $f(x)$ 为偶函数且在 $(0,l)$ 是单调增加的，结论是什么？并证明结论.

例 9 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且对任意的 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明：

$$F(x)=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)f(x)\ (a>0,a\neq 1)$$

为偶函数.

分析 $F(x)$ 可以看成是两个函数的乘积，只需证明这两个函数均为奇函数.

证明 令 $\varphi(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，于是

$$\varphi(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1-a^x}-1+\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=-\varphi(x),$$

所以 $\varphi(x)$ 为奇函数.

又依题设，$f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$，因此 $f(0)=0$. 于是

$$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x),$$

所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)$ 为奇函数.

因此 $F(-x)=\varphi(-x)f(-x)=\varphi(x)f(x)=F(x)$，即 $F(x)$ 为偶函数.

思考　（i）若对任意的 x，y，恒有 $f(x+y)=f(x)-f(y)$，结论如何？（ii）若 $F(x)=\left(\frac{1}{1-a^x}-\frac{1}{2}\right)f(x)\ (a>0,a\neq1)$，以上两题结果如何？并给出结论的证明.

例 10　设 $f(x)$ 是在 $\mathbf{R}$ 内有定义的函数，且对任意的 x，存在常数 $C>0$，使 $f(x+C)=-f(x)$，证明：$F(x)=[f(x)]^n\ (n\in\mathbf{N}^+)$ 是周期函数；若 C 是使 $f(x+C)=-f(x)$ 的最小正数，求 $F(x)$ 的所有正周期.

分析　按定义，只需证明，存在常数 $T>0$，使 $F(x+T)=F(x)$.

证明　因为

$$F(x+2C)=[f((x+C)+C)]^n=[-f(x+C)]^n=[-(-f(x))]^n=[f(x)]^n=F(x),$$

所以 $F(x)$ 是以 $T=2C$ 为周期的函数.

若 C 是使 $f(x+C)=-f(x)$ 的最小正数，显然 $T=2C$ 是 $F(x)$ 的最小正周期. 仿上述证明可得，$T=4C,\ 6C,\cdots$ 都是 $F(x)$ 的周期，故 $F(x)$ 的所有正周期是 $2C,\ 4C,\ 6C,\cdots$.

思考　（i）若 $F(x)=[f(nx)]\,(n\in\mathbf{N}^+)$，相应的结果是什么？（ii）$F(x)$ 是否一定具有最小正周期？若否，举例说明.

例 11　证明：$f(x)=\tan x^2$ 不是周期函数.

分析　直接证明比较困难，要根据周期函数定义的逆否命题，用反证法证明.

证明　假设 $f(x)=\tan x^2$ 是周期函数，则存在常数 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立. 于是分别令 $x=0,\sqrt{2}T$，得

$$\begin{cases}\tan T^2=\tan 0\\ \tan(\sqrt{2}+1)^2T^2=\tan 2T^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan T^2=0\\ \tan(\sqrt{2}+1)^2T^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T=\sqrt{n_1\pi},\ n_1\in\mathbf{N}^+\\ T=\dfrac{\sqrt{n_2\pi}}{\sqrt{2}+1},\ n_2\in\mathbf{N}^+\end{cases}$$

要两个方程有公共解，即要

$$\sqrt{n_1\pi}=\frac{\sqrt{n_2\pi}}{\sqrt{2}+1}\Rightarrow(\sqrt{2}+1)^2=\frac{n_2}{n_1},$$

由于 $\frac{n_2}{n_1}$ 是有理数，而 $(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$ 是无理数，两者是不可能相等的，矛盾. 所以 $f(x)=\tan x^2$ 不是周期函数.

思考　（i）若分别令 $x=0$，$-\sqrt{2}T$，可否证明该结论？若令 $x=0$，$\pm\sqrt{3}T$ 呢？（ii）能类似地证明 $\sin x^2$，$\csc x^2$ 等不是周期函数吗？

例 12 设 $f(x)$ 是在 $\mathbf{R}$ 上有定义的以 T 为周期的函数，证明：若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

分析 利用周期性，将一般的函数值 $f(x)$ 转化到有界区间 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 内来讨论.

证明 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 内有界，故对 $\forall x\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$, $\exists M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M.$$

又对 $\forall x\in\mathbf{R}, \exists m\in\mathbf{Z}$，使 $x=mT+r(0\leqslant r<T)$. 因为 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，所以 $mT,(m+1)T$ 亦是 $f(x)$ 的周期. 于是当 $0\leqslant r<\frac{T}{2}$ 时，

$$|f(x)|=|f(mT+r)|=|f(r)|\leqslant M;$$

当 $\frac{T}{2}\leqslant r<T$ 时，因为 $-\frac{T}{2}\leqslant r-T<0$，所以

$$|f(x)|=|f[(m+1)T+(r-T)]|=|f(r-T)|\leqslant M.$$

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

思考 若 $f(x)$ 在 $[a,a+T)$ 内有界，结论还成立吗？为什么？

例 13 求函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 在 $|x|\geqslant 1$ 上的反函数 $y=\varphi(x)$，并判断 $\varphi(x)$ 的奇偶性.

分析 求一个函数的反函数，一是要用函数表示自变量，即把函数看成是关于自变量的方程并解出自变量，从而确定反函数的表达式；二是要确定反函数的定义域，即函数的值域.

解 因为 $|x|\geqslant 1 \Leftrightarrow x\geqslant 1 \vee x\leqslant -1$. 当 $x\geqslant 1$ 时，

$$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=1;$$

当 $x\leqslant -1$ 时，

$$-y=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{x}\right)\geqslant\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=1\Rightarrow y\leqslant -1.$$

把函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 看成是关于自变量 x 的方程，即

$$x^2-2yx+1=0.$$

其解为 $x=y\pm\sqrt{y^2-1}$, $|y|\geqslant 1$. 因此当 $y\geqslant 1$ 时，$x=y+\sqrt{y^2-1}\geqslant 1$；当 $y\leqslant -1$ 时，$x=y-\sqrt{y^2-1}\leqslant -1$. 故所求反函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}, & x\geqslant 1\\ x-\sqrt{x^2-1}, & x\leqslant -1\end{cases}.$$

反函数的定义域为 $D_\varphi=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 显然，当 $x\in D_\varphi$ 时，有 $-x\in D_\varphi$，且

$$\varphi(-x)=\begin{cases}-x+\sqrt{(-x)^2-1},-x\geqslant 1\\ -x-\sqrt{(-x)^2-1},-x\leqslant -1\end{cases}=\begin{cases}-x+\sqrt{x^2-1},x\leqslant -1\\ -x-\sqrt{x^2-1},x\geqslant 1\end{cases}$$

$$=-\begin{cases}x-\sqrt{x^2-1},x\leqslant -1\\ x+\sqrt{x^2-1},x\geqslant 1\end{cases}=-\varphi(x),$$

因此，$\varphi(x)$ 为奇函数.

思考　(i) 显然，函数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 也是奇函数. 因此，自然会问：有反函数的奇函数的反函数都是奇函数吗？是，给出证明；不是，举出反例；(ii) 求函数在 $[-1,0]\cup[0,1]$ 上的反函数，并判断反函数的奇偶性.

例 14　设 $F(x)$ 是在 $\mathbf{R}$ 上有定义的以 4 为周期的周期函数，且当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$F(x)=x^2-2x$. 若 $F(x)$ 为奇函数，求 $F(x)$ 的表达式，并画出函数的图形.

分析　先根据奇偶性，求函数 $F(x)$ 在一个周期上的表达式；再根据周期性，将该表达式延拓到到整个定义域上.

解　如图 1-3 所示，当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，$0\leqslant -x\leqslant 2$. 因为 $F(x)$ 为奇函数，所以

$$F(x)=-F(-x)=-[(-x)^2-2(-x)]=-x^2-2x.$$

从而 $F(x)$ 在一个周期上的表达式为

$$F(x)=\begin{cases}x^2-2x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ -x^2-2x, & -2\leqslant x\leqslant 0\end{cases}.$$

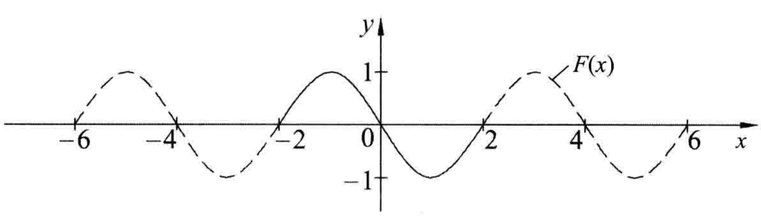

图 1-3

又对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $\exists k\in\mathbf{Z}$，使 $4k\leqslant x\leqslant 4k+2$ 或 $4k+2\leqslant x\leqslant 4(k+1)$，于是

$$0\leqslant x-4k\leqslant 2\quad 或\quad -2\leqslant x-4(k+1)\leqslant 0.$$

由于 $F(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，所以当 $4k\leqslant x\leqslant 4k+2$ 时，

$$F(x)=F(x-4k)=(x-4k)^2-2(x-4k)=x^2-2(4k+1)x+8k(2k+1);$$

当 $4k+2\leqslant x\leqslant 4(k+1)$ 时，

$$\begin{aligned}F(x)&=F[x-4(k+1)]=-[x-4(k+1)]^2-2[x-4(k+1)]\\&=-x^2+2(4k+3)x-8(k+1)(2k+1).\end{aligned}$$

综合得