普通高等教育“十二五”规划教材

大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

线性代数

主　编　张　友　王立冬

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
大学高等数学类规划教材
丛书主编 王立冬

线性代数

主 编 张 友 王立冬
副主编 齐淑华 袁学刚

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书以线性方程组为主线，以行列式、矩阵和向量为工具，阐述线性代数的基本概念、基本理论和方法.全书内容联系紧密，具有较强的逻辑性.本书是根据教育部高等院校理工类专业以及经济和管理学科各专业线性代数教学大纲的要求编写而成的.全书分为7章，内容包括线性方程组与矩阵的简单介绍；行列式；矩阵；矩阵的初等变换；向量；特征值与特征向量以及二次型.在每一节都安排思考题的基础上，还为每章配备习题和补充题，习题是学生必做的题目，补充题是为考研同学和对线性代数有更高要求的同学而设计的.

本书可作为高等院校理工类学科各专业以及经济和管理学科各专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张友，王立冬主编．—北京：科学出版社，2013．11

普通高等教育“十二五”规划教材・大学高等数学类规划教材

ISBN 978-7-03-038966-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张…②王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材Ⅳ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第250345号

责任编辑：张中兴/责任校对：宣　慧

责任印制：阎　磊/封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013年11月第　一　版　开本：720×1000　B5

2013年11月第一次印刷　印张：14 1/2

字数：290 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

"大学高等数学类规划教材"题词

高等数学诸分支知识及技巧，是通往现代科技诸领域的钥匙和通用语言。

徐利治

总　序

21世纪我国高等教育迎来了精英化教育向大众化教育转型的时代，我国高等教育的发展也开始呈现出多层次发展与多样性共存的特点，这正是现在科学技术与文化教育发展趋势的客观要求.

在新的发展形势之下，大连民族学院的数学教师们也一直在思考如何适应目前的教育形势，也一直在积极探寻教育改革的新方法，致力于为全校各个专业的学生们编写一套适应新形势的数学教材，经过十几年的努力，以丰富的教学经验做支持，学院的教师们几经修改编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计这三门课程的讲义，并且在课程建设上也取得了很好的成果，高等数学被评为省级精品课程，线性代数、概率论与数理统计被评为校级精品课程.

在讲义的基础上，经过改进和修订编写了这套大学高等数学类规划教材，这套教材不以精英教育为目标，为大众化教育提供了层次分明写作翔实的课程支持，其根本宗旨是要适应新的教育形势，满足高等院校大众化数学教育的基本要求，渗透数学素质教育的精神.

简要来说这套教材特点有以下三点：

(1) 尽可能地从教学实践经验和知识直观背景出发，提出数学问题，便于学生了解数学知识的本源和背景，体会数学思想之美.

(2) 在教材内容的安排与表述方式上，力求深入浅出，易教易学，简明使用，注重讲清楚数学的基本概念，适度的淡化理论证明，并适当反映出数学所蕴涵的文化素养给读者以数学美的熏陶.

(3) 在例题和习题的选取和安排上，本着理论联系实践的原则，多数选自生活实践和具体应用.

凡是具有生命力的教材，总是能不断地适应客观教学要求，听取读者的意见和建议进行更新和改进. 这套丛书自然也不例外，我为该书作序，诚挚希望该套教材的使用者和读者们提出相应的建议和意见，并及时与丛书主编进行沟通改进，争取出版一套适合当今大众化教育形势的精品教材.

徐利治

前言

线性代数是理工和经管类专业的一门重要的基础课.在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用.线性代数最大的特点就是各个章节知识之间联系非常紧密.其特点如下.

第一,线性代数中概念抽象.在刚开始的学习中,学生的主要难点集中在对一些概念难于接受和理解.例如,行列式的定义、矩阵乘法的定义、矩阵的初等变换规则,尤其是线性相关及线性无关的定义等.

第二,线性代数中概念、结论、运算比较多,而且这些概念、结论、运算联系紧密.例如,一个方阵是满秩的与方阵所对应的行列式值不为零、列向量组是线性无关的、齐次线性方程组只有零解是等价的。

大部分教材一般是按逻辑顺序——定义、公理、引理、定理、推论的模式来编写的.但在实际教学中,往往使学生抓不住知识的主干,“只见树木,不见森林”,不知道一开始学习的知识干什么,只是被动地一步一步跟着走.

针对线性代数这门课程的特点和学生在学习中遇到的问题,根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求,编者在自编讲义的基础上,结合多年来从事线性代数课程教学的体会编写了这本书.其目的是为普通高等学校非数学专业学生提供一本适用面较宽的、易教易学的线性代数教材.在编写过程中,借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法,内容上突出精选够用,表达上力求通俗易懂.本教材具有以下特色:

(1) 以线性方程组为主线,把行列式、矩阵和向量作为研究线性方程组的一种工具来学习.这样有利于学生理解线性代数课程的基本概念和基本原理,把线性代数中的“抽象”变具体、变简单.使学生对线性代数有整体的把握,目标明确.

(2) 将初等变换作为贯穿全书的计算工具,强调它是矩阵的同秩变换;是向量组的同线性关系变换,是线性方程组的同解变换.这样可以把线性代数各个章节的知识非常紧密的联系在一起,把线性代数中概念、结论、运算比较多变得易教易学.

(3) 在教材内容和习题的处理上都充分考虑到易教易学,实用简明.做到深入浅出,努力做到每个抽象的定义和定理之前都给出简单、具体的引例,通俗易懂,讲清基本概念,淡化理论证明,没有令人费解的冗长证明,努力做到每个抽象的定义和定理之前都给出简单、具体的引例.

(4) 在每一节都安排思考题的基础上，还为每章配备了习题和补充题，习题是学生必做的题目，补充题是为考研同学和对线性代数有更高要求的同学而设计的.

(5)在重点的数学概念后附英文，这样可以扩展学生的专业词汇，提高学生的专业英语能力.

本书可作为高等院校理工类学科各专业以及经济和管理学科各专业的教材或教学参考书.适合 32～48 学时线性代数课程用教材.对经济和管理学科各专业的学生，打星号的内容和课后补充题不作为要求.

本教材由大连民族学院理学院组织编写，主编张友、王立冬，副主编齐淑华、袁学刚，参加编写的还有刘满、周文书、王金芝、牛大田、王书臣、梁学忠、楚振艳、董丽、谢丛波、周庆健、刘强、刘恒、刘力军、丁淑妍、董莹、刘红梅、曲程远、吕娜.

由于编者是在教学之余从事编写工作的，时间仓促、水平有限，书中的问题一定不少，衷心希望大家在使用的过程中不断提出意见.

编　者

2013 年 3 月

目录

总序

前言

第 1 章　线性方程组与矩阵的简单介绍 …… 1

1.1　线性方程组与矩阵的有关概念 …… 1

1.2　利用矩阵研究线性方程组的简单介绍 …… 6

习题 1 …… 17

第 2 章　行列式 …… 19

2.1　行列式的定义 …… 19

2.2　行列式的性质 …… 27

2.3　行列式的计算 …… 35

2.4　克拉默(Cramer)法则 …… 42

习题 2 …… 46

补充题 2 …… 49

第 3 章　矩阵 …… 51

3.1　矩阵的运算 …… 51

3.2　方阵的行列式及其逆矩阵 …… 60

3.3　矩阵的分块 …… 69

习题 3 …… 75

补充题 3 …… 78

第 4 章　矩阵的初等变换 …… 80

4.1　初等变换与初等矩阵 …… 80

4.2　矩阵秩的等价定义 …… 90

4.3　线性方程组解的判定 …… 94

习题 4 …… 103

补充题 4 …… 105

第 5 章　向量 …… 106

5.1　向量及其线性运算 …… 106

5.2　向量组的线性相关性 …… 115

5.3　向量组的极大无关组与向量组的秩 …………………………………… 123
5.4　线性方程组的结构解 ……………………………………………………… 135
习题 5 …………………………………………………………………………… 149
补充题 5 ………………………………………………………………………… 153
第 6 章　特征值与特征向量 ……………………………………………… 155
6.1　特征值与特征向量的定义与计算 ………………………………………… 155
6.2　特征值与特征向量的性质 ………………………………………………… 160
6.3　相似矩阵及方阵的对角化 ………………………………………………… 164
6.4　实对称矩阵的对角化 ……………………………………………………… 172
习题 6 …………………………………………………………………………… 183
补充题 6 ………………………………………………………………………… 185
第 7 章　二次型 …………………………………………………………… 187
7.1　二次型的定义及其矩阵表示 ……………………………………………… 187
7.2　二次型的标准形 …………………………………………………………… 191
7.3　正定二次型 ………………………………………………………………… 202
习题 7 …………………………………………………………………………… 206
补充题 7 ………………………………………………………………………… 207
习题参考答案 ……………………………………………………………… 208

第1章 线性方程组与矩阵的简单介绍

线性方程组又称为一次方程组，大家在中学就学习过较简单的二元一次方程组和三元一次方程组. 在自然科学、管理科学和工程应用中，往往需要求解由任意 m 个方程和任意 n 个未知数构成的线性方程组，大学线性代数这门课程就是要以行列式、矩阵和向量组为工具来研究线性方程组及其应用. 因此线性方程组是线性代数的基本内容，是贯穿线性代数的一条主线.

线性方程组的求解问题的讨论离不开矩阵. 实际上，矩阵是重要的数学工具之一，在很多实际应用和理论研究中都经常会用到.

➢**本章内容提要**

1. 线性方程组与矩阵的有关概念；
2. 线性方程组解的判定和求法.

1.1 线性方程组与矩阵的有关概念

1.1.1 线性方程组的有关概念

在中学学习过诸如以下较简单的二元一次方程组和三元一次方程组：

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-y=5 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1+2x_2+x_3=3, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=4. \end{cases}$$

***n* 元线性方程组**(system of linear equations with n unknowns)的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

式(1.1)是由 m 个方程、n 个未知数构成的 n 元线性方程组,可称为 $\boldsymbol{m\times n}$ **线性方程组**,其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 称为第 i 个方程第 j 个未知量 x_j 的**系数**(coefficient),$b_i(i=1,2,\cdots,m)$称为第 i 个方程的**常数项**(constant),m 和 n 是任意正整数.

在 n 元线性方程组(1.1)中,若 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为 0,则称方程组(1.1)为**非齐次线性方程组**(non-homogeneous linear equations). 若 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为 0,则称方程组(1.1)为**齐次线性方程组**(homogeneous linear equations).

n 元齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 m 是方程的个数,n 是未知数的个数.

因此,线性方程组分成齐次线性方程组和非齐次线性方程组两大类.

问题 对于线性方程组,第一个关心的问题就是它是否有解?

给定 n 元线性方程组(1.1),若存在数 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,使得当

$$\begin{cases} x_1=\eta_1, \\ x_2=\eta_2, \\ \quad\vdots \\ x_n=\eta_n \end{cases} \tag{1.3}$$

或采用记号

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

时,线性方程组(1.1)的每个方程均成立,则称式(1.3)或式(1.4)是线性方程组(1.1)的一个**解**(solution). 否则,若线性方程组(1.1)中至少有一个方程不成立,它就不是线性方程组(1.1)的解.

显然,任意的 n 元齐次线性方程组均有解,如 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. 此解称为齐次线性方程组的**零解**(zero solution). 只有齐次线性方程组才有零解. 若存在不全为 0 的

数 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,使得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组(1.2)的解,该解称为**非零解**(nonzero solution). 当然,齐次线性方程组可能存在非零解.

研究 n 元线性方程组,主要是讨论下述两个问题:

(1) 解的判定(无穷多组解、唯一一组解、无解);

(2) 解的求法(在有解时求出其所有解,包括解的个数).

在讨论 n 元线性方程组的有关问题时,矩阵是一个很方便的工具.

1.1.2　矩阵的有关概念

为了引入矩阵概念,先看一个 3 阶幻方的例子.

例 1(3 阶幻方问题)　将 1 到 9 共九个正整数按一定顺序填入如下表格的空里,使其每行的 3 个数相加、每列的 3 个数相加、主(次)对角线的 3 个数相加之和均相同.

解　容易知道,题目中所提到的 3 个数相加之和为 15,于是得到其中的一种填法如下:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

将得到的数表

$$\begin{matrix}6 & 1 & 8\\7 & 5 & 3\\2 & 9 & 4\end{matrix}$$

称为矩阵,记作

$$\begin{pmatrix}6 & 1 & 8\\7 & 5 & 3\\2 & 9 & 4\end{pmatrix}.$$

类似地,可以考虑 $n(n\geqslant 4)$ 阶幻方问题.

矩阵就是由一些数,也可以是一些表示数的符号,按一定顺序排成若干行和若干列的一个表格.

定义 1 由 $m\times n$ 个数按一定顺序构成的 m 行及 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

称为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ **矩阵**(matrix of size $m\times n$).

特别地,当 $m=n$ 时,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 n 阶方阵.

在 n 阶方阵中,特别地,当 $a_{ij}=0(i\neq j)$时,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵(diagonal matrix).

当 $a_{ij}=0(i\neq j)$,$a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n **阶单位矩阵**(n-order identity matrix),记作 $\boldsymbol{E}_{n\times n}$ 或 $\boldsymbol{I}_{n\times n}$.

对角线上的元素均相等的对角矩阵,即

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

称为**数量矩阵**(scalar matrix).

当 $a_{ij}=0(i>j)$ 和 $a_{ij}=0(i<j)$ 时，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

分别称为**上、下三角形矩阵**(upper, lower triangular matrix)，统称为三角形矩阵.

已经看出，为了表示元素的排列顺序，通常用一对圆括符( )或方括符[ ]将其括起来，但不能使用{ }或| |等其他符号. 通常用黑体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵.

在矩阵(1.5)中，$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 称为第 i 行元素(i-th row)，$i=1,2,\cdots,m$，a_{1j}，$a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ 称为**第 j 列元素**(j-th column)，$j=1,2,\cdots,n$. 用 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列位置的元素，称为(i,j)位置元素. (i,j)位置元素 a_{ij} 是用双下标表示的，第一个下标表示该元素所在的行，第二个下标表示该元素所在的列，这种表示方法本身就有一定的创意.

为了方便，可以将矩阵(1.5)写成$(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 是矩阵的代表元素. 当仅用一个字母表示矩阵时，可以在该字母的右下角写上 $m\times n$，如 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中，$m\times n$ 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的型(size)，这里 $m\times n$ 没有乘积之意. 有 m 行 n 列的矩阵$\boldsymbol{A}$，就是“$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$”，读作“m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{A}$”. 在 $m\times n$ 中，行数 m 写在×的前面，而列数 n 写在×的后面.

例如，分别将线性方程组(1.1)的第 1 个方程到第 m 个方程中未知量 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ 的系数依次抽取出来，如根据第 i 个方程就得到 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}(1\leqslant i\leqslant m)$. 特别地，若在第 i 个方程中不含未知量 x_j，则 $a_{ij}=0$. 再将它们按第 1 个方程到第 m 个方程的顺序分别排成第 1 行，第 2 行，直到第 m 行，得到一个数表，这个仅由线性方程组(1.1)各方程未知量的 $m\times n$ 个系数构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为线性方程组(1.1)的**系数矩阵**(coefficient matrix)，常用黑体字母 $\boldsymbol{A}$ 表示.

又如，分别将线性方程组(1.1)的第 1 个方程到第 m 个方程中未知量 x_1，x_2，…，x_n 的系数以及右边的常数依次抽取出来，如根据第 i 个方程就得到 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in}，b_i $(1\leqslant i\leqslant m)$. 再将它们按第 1 个方程到第 m 个方程的顺序分别排成第 1 行，第 2 行，直到第 m 行，得到一个由 $m\times(n+1)$个数构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为线性方程组(1.1)的**增广矩阵**(augmented matrix)，常用黑体字母$\overline{\mathbf{A}}$表示.

例如，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1+2x_2+x_3=3, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=4 \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

增广矩阵为

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2 利用矩阵研究线性方程组的简单介绍

1.2.1 线性方程组的同解变换与矩阵的初等行变换

线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=4, \\ x_1+x_2+2x_3=1, \\ 3x_1-6x_2=9, \\ 4x_1+x_2+4x_3=2, \end{cases} \tag{1.6}$$

其增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.6$'$}$$

根据中学知识,线性方程组的**同解变换**(消元法)有以下 3 种:

(1) 交换第 i 个方程和第 j 个方程的位置;

(2) 第 i 个方程两边同时乘以不为 0 的数 k;

(3) 第 i 个方程两边乘以同一个数 k 后,分别加在第 j 个方程的两边.

采用同解变换得到的线性方程组与原线性方程组是同解的,即它们的解完全相同.

下面将线性方程组的这 3 种同解变换与其增广矩阵的初等行变换对应起来.

在线性方程组(1.6)中,若交换第 1 个方程和第 2 个方程的位置,得到同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 = 9, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \end{cases} \tag{1.7}$$

其增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.7$'$}$$

此过程相当于将增广矩阵(1.6)$'$的第 1 行和第 2 行的位置进行了交换,记为 $r_1 \leftrightarrow r_2$,其中字母 r 代表行(row),即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

其中箭头"$\rightarrow$"表示是从左至右的变换,写在箭头上方的 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 表明所采用的是何种变换.

在线性方程组(1.7)中,若将第 3 个方程的两边同时乘以$\frac{1}{3}$,得到同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \end{cases} \tag{1.8}$$

其增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.8$'$}$$

相当于将线性方程组(1.7)的增广矩阵(1.7)$'$的第 3 行乘以$\frac{1}{3}$，记为$\frac{1}{3}r_3$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

在线性方程组(1.8)中，若将第 1 个方程两边乘以同一个数-2后，分别加在第 2 个方程的两边，得到同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \end{cases} \tag{1.9}$$

其增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.9$'$}$$

相当于将线性方程组(1.8)的增广矩阵(1.8)$'$的第 1 行乘以-2加到第 2 行，记为$r_2+(-2)r_1$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$