



球面几何导引 与题解100道

左铨如 束荣盛 著



南京大学出版社

内容简介

本书依据教育部颁发的中学数学课程标准,有关“球面上的几何”部分采用度量几何结构,以向量计算为主要工具,科学通俗地介绍了球面几何的基本知识和基础理论以及几何模型的应用和推广,这有助于读者迅速登上解析非欧几何的殿堂.本书还精心配备了100道习题,为方便自学全部给予解答.附录中,介绍了如何将2维球面几何推广到 n 维非欧几何,其中包括天文数学家祖冲之的精妙算法和其在天文历法上若干有趣的应用.

本书可作为中学数学教师、教研员的培训教材,高等师范院校数学专业的选修课教材,亦可作为高中学生和数学、天文爱好者的学习参考书.

ISBN 978-7-305-07043-3



9 787305 070433 >

定价:15.00元

球面几何导引 与题解100道

左铨如 束荣盛 著



南京大学出版社

内 容 简 介

本书依据教育部颁发的中学数学课程标准,有关“球面上的几何”部分采用度量几何结构,以向量计算为主要工具,科学通俗地介绍了球面几何的基本知识和基础理论以及几何模型的应用和推广,这有助于读者迅速登上解析非欧几何的殿堂.本书还精心配备了100道习题,为方便自学全部给予解答.附录中,介绍了如何将2维球面几何推广到 n 维非欧几何,其中包括天文数学家祖冲之的精妙算法和其在天文历法上若干有趣的应用.

本书可作为中学数学教师、教研员的培训教材,高等师范院校数学专业的选修课教材,亦可作为高中学生和数学、天文爱好者的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

球面几何导引与题解 100 道 / 左铨如, 束荣盛著. — 南京: 南京大学出版社, 2010. 8

ISBN 978 - 7 - 305 - 07043 - 3

I. ① 球… II. ① 左… ② 束… III. ① 几何课—
中学—教学参考资料 IV. ① G634. 633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 085991 号

出版发行 南京大学出版社,
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
网 址 <http://www.NjupCo.com>
出版人 左 健

书 名 球面几何导引与题解 100 道
著 者 左铨如 束荣盛
责任编辑 吴 华 编辑热线 025 - 83592146

照 排 南京玄武湖印刷照排中心
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 850×1168 1/32 印张 6.125 字数 154 千
版 次 2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 07043 - 3
定 价 75.00 元

发行热线 025 - 83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com (市场部)

序

球面几何是研究球面图形性质的几何学分支. 它在天文、航海、航空、测量和卫星定位等方面有着广泛的应用.

在高中阶段, 将球面几何的有关知识作为选修课内容向学生介绍是值得尝试的. 为了适应教改的需要, 左铨如与束荣盛合作编著了《球面几何导引与题解 100 道》一书, 这是他们十余年来教学实践和科研创新的经验总结.

该书系统介绍了球面几何的基本知识和基本理论, 还介绍了球面几何模型的应用和推广, 这有助于读者迅速登上解析非欧几何的殿堂.

全书条理清晰、语言生动、概念准确、推理严谨、特色明显, 是一本球面几何方面的好教材, 建议尽快出版. 此书可作为中学数学教师培训教材, 也可作为高等师范学院数学专业的选修课教材.

南京师范大学 数学与计算机科学学院
方 锦 暄 (教授, 博士生导师)

2006 年 12 月 8 日

前 言

球面几何又叫**椭圆几何**,它是曲率为正的常数的**常曲率空间几何**之一,而另一类曲率为负常数的则称为**双曲几何**.椭圆几何和双曲几何合称为**非欧几何**,而熟知的平面几何、立体几何、解析几何等是非欧几何的极端情形——曲率为零的一类称为**欧氏几何**.常曲率空间几何为爱因斯坦的相对论提供了数学框架,相对论改变了人类对空间和时间的绝对观念,也打破了古典欧氏几何的绝对地位.

从1989年开始,本人就考虑到未来中学开设球面几何的需要,对“初等几何研究”课程进行了改革试验.本书积笔者二十多年实践之经验,以球面为几何的模型,用度量几何结构的观点,取距离、角度、面积三条公理为出发点,简捷地、富有逻辑性地展开了球面几何的理论,仅用(1.1至1.5)五节的篇幅,系统地讲解了应该熟练掌握的球面几何的基本知识.本书以向量法为主,兼顾三角法和综合法,用“机械化的”向量代数计算代替经典几何中的演绎推理,从定性层面上升到定量层面.书中标注星号“*”部分是供有兴趣深入探讨的读者参考的.

在第2章介绍双曲几何的庞加莱模型之前,我们先介绍了“双曲面模型”,又通过球极投影给出双曲几何这两个模型之间的同构映射以及相应的距离公式.附录7中还给出了**双曲矩阵**和**双曲变换群**,这包含了非常著名的**广义洛伦兹变换**,它允许超光速运动.

做适量的习题对于理解和丰富几何理论及方法都是十分有益的,但过量了则会让人心烦而不喜欢数学.本书在十一节之中精心配备了 100 道习题,并全部给出解答,它们是本书的有机组成部分.与平面几何类似,球面几何也有解三角形,三角形的高、中线、角平分线,几何不等式,共点共线等问题,对于这些问题,我们也给读者留下了自由发挥的空间.

中国古算源于天文历法和测量.书后六篇附录是本人的近作.其中四篇是有关初等数论问题及解不定方程组的祖冲之算法,它们用精妙的算法解决了古天文历法(有关时间)的多个实际问题;另两篇有关空间的数学问题,是将 2 维球面几何和双曲几何推广到高维,这样便于读者迅速登上解析非欧几何的殿堂.

笔者用余生潜心写成的《球面几何导引与题解 100 道》,其动机是想让广大读者花较少的时间,能获得更有用的知识和新的思维方法;更希望能将新开发的祖冲之算法永远传承下去!

左铨如

2004 年 12 月 25 日写于南京

2009 年 8 月 2 日修改于百家湖滨

目 录

0 球面几何的直观模型和解析工具	1
0.1 球面上的简单几何图形	3
0.2 球面上的点的定位法	8
0.3 向量的外积、混合积	12
1 球面上的几何公式	22
1.1 球面上两点间的距离	22
1.2 球面线段及分点公式	29
1.3 球面夹角公式与余弦定理	41
1.4 对偶定理, 正弦定理	53
1.5 球面三角形的面积公式	76
1.6 * 球面三角形的内心和外心	90
1.7 两个球面三角形的全等, * 椭圆运动	98
2 几何模型的应用与推广	105
2.1 球面模型用于解三面角、四面体问题	107
2.2 双曲几何的模型与距离公式	115
附录 1 球面上连结两点的线中大圆劣弧最短的证明	122
附录 2 祖冲之的圆周率 π 与开差幂法	124
附录 3 祖冲之的“开差幂、开差立”之谜	128
附录 4 一次不定方程组的祖冲之算法	135
附录 5 祖冲之大衍法新解	145
附录 6 非欧椭圆几何的若干度量问题	163
附录 7 n 维双曲空间的若干几何公式及双曲变换群	173

0 球面几何的直观模型和解析工具

著名数学家华罗庚先生曾对青年学生说^①:要学会自学,要学会独立思考.要肯动脑筋,碰到问题都要想一想.比如1961年9月1日报上刊载了前苏联要向太平洋发射火箭的消息,我们学数学的人,就不妨根据前苏联所预报的火箭降落区域(四边形)的顶点经纬度(见表0-1),来计算一下火箭发射场处在什么地方、射程多少、精确度如何,等等.^②

表0-1 火箭降落区域(四边形)的顶点经纬度

	A	B	C	D
西经	170°30′	169°20′	167°55′	166°45′
北纬	10°20′	8°5′	11°30′	9°10′

这些问题在当时都是国家机密,解决了很有价值.假设这四点的坐标是火箭瞄准点加上偏差确定的,反过来推测,前苏联的火箭发射场可能就位于球面大圆 AB 与 CD 的交点 P 处,即火箭发射场 P 与 A, B 三点在一直线上,与 C, D 也在地面一直线上,故直线 AB 与 CD 的交点 P 就是发射场的位置.但是这个问题不宜用已学过的欧氏几何(平面几何、立体几何、解析几何等)的方法解决,因为地球表面在小范围内可以看做平面,而在大范围内,只能将地球表面近似地看做球面.当我们读到本书1.2节,有了计算球面上

① 见怀念华罗庚[M].北京:中国大百科全书出版社,2004:446.原文载学·思·锲而不舍[J].中国青年,1961(21).

② 华罗庚.高等数学引论[M].一卷一分册.北京:科学出版社,1963:57.

两直线交点的公式,上面的问题就好解决了.

学习“球面几何”要先准备好直观模型(地球仪)和解析工具——向量与坐标,这正是设置本章的目的和要求.

0.1 球面上的简单几何图形

三维欧氏空间(记作 E^3)中,到定点距离等于定长 r 的点的集合称为**球面**,记作 $S_r^2 \subset E^3$,定点称为球面的中心或球心, r 是球半径的长.连结球面上两点的线段称为弦,过球心的弦称为球的直径.球的同一条直径的两个端点称为**对径点**(或**对心点**),图 0-1 中地球的南北极 S 与 N 就是对径点.

如果平面与球面 S_r^2 相交,交线必为圆,称它为**球面圆**.当平面过球心时,所得球面圆称为**球面大圆**;当平面不过球心时,称为**球面小圆**.

球面上不同的三点确定唯一的球面圆.不在同一大圆上的三点确定唯一的小圆.球面上不同的两点(非对径点)确定唯一的大圆.

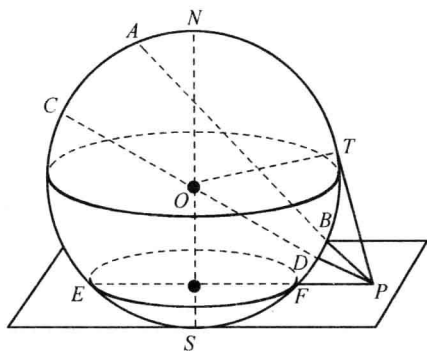


图 0-1

由平面几何中的圆幂定理和图 0-1 即得

定理 0-1(球幂定理) 过一定点 P 作球 $O(r)$ 的任一条割线,与球面交于两点,自定点至两交点的两条有向线段的积为定值,即

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PO^2 - r^2. \text{ (称为点对球的幂)}$$

球面大圆把球面分成对称的两个半球面.

大圆的任一条直径的两端必为一对对径点.

球面小圆把球面分成两个区域,一个是小半球(即这个区域的所有点都属于某个半球),一个是大半球(即不存在这样的半球能包含它的所有点).

球面上连结两点 A, B (非对径点) 的线中,大圆劣弧的长度最短(证明见附录 1). 记号 $\widehat{AB}$ 既表示以 A, B 为端点的大圆劣弧,又表示球面线段 AB 的长度,也称为两点 A, B 间的球面距离. 显然它具备下列性质:

① 非负性: $\widehat{AB} \geq 0$, 且 $\widehat{AB} = 0$ 的充要条件是点 A 与 B 重合(记作 $A=B$);

② 对称性: $\widehat{AB} = \widehat{BA}$;

③ 三角不等式: $\widehat{AM} + \widehat{BM} \geq \widehat{AB}$ ($M \in S_r^2$).

由于球面大圆与欧氏几何中的直线都具有上述三条性质,于是也把球面大圆称为球面直线.

球面直线段看起来似乎并不“直”(曲与直是相对比较而言的),况且球面线段的长度有界, $\widehat{AB} \leq \pi r$. 然而,当 r 无限增大时,与欧氏直线段一样,可以无限长.

定理 0-2 任意两条球面直线必相交于两点,且这两点是一对对径点.

在球面上,具有公共端点的两条大圆弧(或称射线)构成的图形称为球面角. 两个半球面的非空交集称为二角形(又称月形),它的边界是由一对对径点为顶点的两个半大圆(称为月形的边)构成的. 二角形的两边所成的两个球面角称为二角形的顶角. 二角形的两个顶角相等. 设顶角的大小为 α , 则 $\alpha \in (0, \pi)$.

因为半径为 r 的球面面积是 $4\pi r^2$, 所以顶角大小为 α 的二角

形的面积

$$\epsilon_{\text{三角形}} = 2\alpha r^2. \quad (0-1)$$

注意这里 α 是弧度数.

定义 0-1 球面 S_r^2 上, 有限个互不相同的半球面 S_i 的非空交集 $\Omega = \bigcap_{i=1}^n S_i (S_i \cup S_j \neq S_r^2, i \neq j \text{ 且 } \Omega \text{ 不含对径点})$ 称为凸球面多边形(简称为多边形). 三个不相同的半球面的交集习惯上称为球面三角形.

与平面三角形类似, 球面三角形的边界是由球面上连结不在同一直线上的三点 A, B, C 的球面线段构成的图形. 点 A, B, C 称为三角形的顶点, 线段 BC 称为顶点 A 所对的边, 顶点为 A 的球面角 $\angle BAC$ 称为三角形的内角, 简记作 $\angle A$. 球面 $\triangle ABC$ 的三边长 $\widehat{BC} = a, \widehat{CA} = b, \widehat{AB} = c$, 三个内角(大小也用记号 $\angle A, \angle B, \angle C$ 表示)称为三角形的六个元素.

与欧氏平面三角形不同, 球面三角形的面积是有界的, 总小于半球面的面积 $2\pi r^2$. 一般地, 有

定理 0-3 S_r^2 上球面 $\triangle ABC$ 的面积

$$\epsilon_{ABC} = r^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi). \quad (\text{Girard, 1625 年}) \quad (0-2)$$

证明 设球面 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 的对径点依次为 A_1, B_1, C_1 (如图 0-2), 则 $\triangle ABC_1$ 与 $\triangle A_1B_1C$ 是关于球心 O 为中心对称的全等的图形, 它们的面积相等, 即

$$\epsilon_{A_1B_1C} = \epsilon_{ABC_1},$$

据公式(0-1),

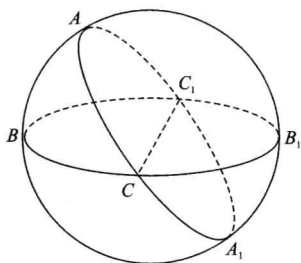


图 0-2

$$\epsilon_{ABC} + \epsilon_{CBA_1} = \epsilon_{\text{二角形}ABCA_1} = 2r^2 \angle A,$$

$$\epsilon_{BCA} + \epsilon_{ACB_1} = \epsilon_{\text{二角形}BCAB_1} = 2r^2 \angle B,$$

$$\epsilon_{CAB} + \epsilon_{BAC_1} = \epsilon_{\text{二角形}CABC_1} = 2r^2 \angle C.$$

又半球面的面积为

$$2\pi r^2 = \epsilon_{ABC} + \epsilon_{CBA_1} + \epsilon_{A_1B_1C} + \epsilon_{ACB_1}.$$

上述五个等式相加,消去等量得

$$2\epsilon_{ABC} + 2\pi r^2 = 2r^2(\angle A + \angle B + \angle C).$$

故(0-2)式成立.



习题 0.1

1. 球面直角正三角形的面积是所在球面面积的 $1/8$.
2. 验证球面三角形的面积具有可加性.
3. 球面凸 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面积 $\epsilon = [\angle P_1 + \angle P_2 + \cdots + \angle P_n - (n-2)\pi]r^2$.
4. 球面直角三角形的三个内角之和小于 2π .



习题解答

1. 三个内角都是直角,故直角正三角形面积为 $(\frac{3\pi}{2} - \pi)r^2$, 球面面积为 $4\pi r^2$, 它们的比为 $1/8$.
2. 设球面 $\triangle ABC$ 被内部任一点 P 与三顶点的连线分成三个球面 $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ 和 $\triangle CAP$.