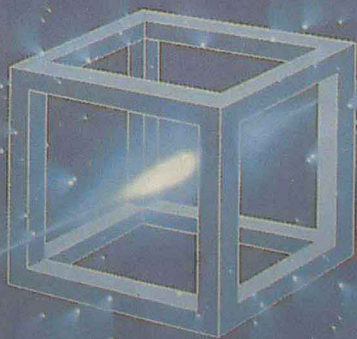


黄万风 戴天时 编著

XIANXING DAISHU YU
KONGJIAN JIEXI JIHE

线性代数 与 空间解析几何



东北师范大学出版社

线 性 代 数 与 空间解析几何

黄万风 戴天时 编著

东北师范大学出版社
长 春

(吉)新登字 12 号

线性代数与空间解析几何

XIANXING DAISHU YU KONGJIAN JIEXI JIHE

黄万风 戴天时 编著

责任编辑:杨述春 张中敏 封面设计:李冰彬 责任校对:黄 时

东北师范大学出版社出版

东北师范大学出版社发行

(长春市人民大街 138 号)

东北师范大学激光照排中心制版

(邮政编码:130024)

四平市恒盛印刷厂印刷

开本: 850 × 1168 1/32

1999 年 7 月第 1 版

印张: 9.125

1999 年 7 月第 1 次印刷

字数: 240 千

印数: 0 001 - 6 030 册

ISBN 7 - 5602 - 2439 - 3/O · 106

定价: 12.00 元

前 言

本书是按照吉林工业大学教材立项项目《线性代数》的要求编写的. 考虑到工科数学系列课程设置及配套教材的实际情况, 又增加了向量代数与空间解析几何的内容, 成为这本《线性代数与空间解析几何》教材.

十多年来, 我校在工科数学教学改革与教材建设方面作了不懈的努力, 积累了一些经验, 也编写出一些实用的教材. 本书就是在这些先期工作的基础上, 为更好适应当前教学需要而编写的. 本书内容符合国家教育部对相关课程制订的教学基本要求, 某些地方根据实际需要在深度和广度上略作扩展. 我们在编写中努力贯彻概念准确、基础扎实、重视方法、加强实用的原则, 力争做到科学性、系统性与简明性、实用性的统一, 并希望对提高读者以科学思维方式分析和解决实际问题能力方面有所帮助, 做到传授数学知识与培育数学素养的统一.

本书可作为高等学校工科各专业及经济类、管理类各专业本科生使用的教材或教学参考书. 它的内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换、向量代数及空间解析几何. 在代数体系中以矩阵为主线, 重视了初等变换和向量组线性相关性这两个要点. 为适应对教学内容和学时计划的不同需求, 教材对某些章节加排“*”号, 某些内容则以小字排印. 这些内容均可以不讲或选讲. 如果把第六章列入教学内容而学时

又不充裕，则可不讲第三章第四节中除数域概念以外的内容。本书各章后面都配置了习题。与标“*”章节及小字排印内容相应的习题前用“*”做了标记。较难的习题前用“△”做了标记。书末附有计算题的答案及部分证明题的简要解答或提示，供读者参考。

本书第一、二、三、四、七章由黄万风编写，第五、六章由戴天时编写。本书得到吉林工业大学教材建设基金的资助，在成书过程中，得到了吉林工业大学教务处、理学院和应用数学系领导的关心和支持。许多任课教师也提出了宝贵的意见和建议。这些都对本书的顺利完成和质量提高起了十分重要的作用。在此，谨对所有相关同志表示衷心的感谢。限于编者的水平，书中可能有一些不妥之处，切望使用本书的同行和广大读者批评指正。

编 者

1999年4月

目 录

第一章 行列式	1
第一节 排列及其逆序数	1
第二节 n 阶行列式的概念及其性质	4
第三节 展开定理与行列式的计算	13
习题一	23
第二章 矩阵	27
第一节 矩阵与向量的概念	27
一、矩阵的概念	27
二、向量的概念	28
第二节 矩阵的运算	29
一、矩阵的加法	29
二、数乘矩阵	30
三、矩阵的乘法	31
四、矩阵的转置	33
第三节 几种特殊矩阵	35
一、单位矩阵	35
二、对角矩阵	36
三、上(下)三角矩阵	37
四、对称矩阵	38
五、反称矩阵	39
第四节 矩阵的秩与初等变换	42

第五节 可逆矩阵	53
一、可逆矩阵的概念及其性质	53
二、可逆矩阵的判别与逆阵的求法	55
第六节 矩阵的分块运算	61
一、矩阵的分块加法运算	62
二、矩阵的分块数乘运算	63
三、矩阵的分块乘法运算	63
四、分块矩阵的转置与块对角矩阵	66
习题二	68
 <u>第三章 线性方程组与向量组的线性相关性</u>	73
第一节 消元法与线性方程组的相容性	74
一、线性方程组的相容性与克莱姆法则	74
二、消元法	78
第二节 向量组的线性相关性	86
第三节 向量组的秩, 矩阵的行秩与列秩	94
第四节 数组向量空间	101
第五节 线性方程组解的结构	106
一、齐次线性方程组解的结构	106
二、非齐次线性方程组解的结构	112
习题三	115
 <u>第四章 方阵的特征问题与相似对角化</u>	120
第一节 矩阵的特征值与特征向量	120
第二节 方阵相似于对角矩阵的条件	127
第三节 正交矩阵	134
一、实向量的内积与长度	135
二、正交向量组	136
三、正交矩阵与正交变换	140
第四节 实对称矩阵的相似对角化	141
习题四	149

第五章 二次型与对称矩阵	154
第一节 二次型及其矩阵	154
第二节 用正交变换化实二次型为标准形	159
第三节 用配方法化二次型为标准形	162
* 第四节 合同变换与二次型的规范形	165
第五节 实二次型的分类	175
习题五	181
* 第六章 线性空间与线性变换	183
第一节 线性空间的定义与基本性质	184
第二节 基与维数	190
第三节 坐标与坐标变换	195
第四节 线性变换及其运算	203
第五节 线性变换的矩阵	207
第六节 线性空间的子空间	216
习题六	220
第七章 空间解析几何	227
第一节 空间直角坐标系	227
一、空间直角坐标系	227
二、坐标系的平移	229
三、两点间的距离公式	230
第二节 空间直角坐标系下的向量及其乘法运算	230
一、空间直角坐标系下的向量	230
二、向量的数量积	233
三、向量的向量积	236
四、向量的混合积	239
第三节 曲面与空间曲线	240
一、曲面方程	241
二、空间曲线的一般方程	241
第四节 平面及其方程	242

一、平面的点法式方程	243
二、平面的一般方程	244
三、两平面的夹角	245
第五节 空间直线及其方程	246
一、空间直线的点向式方程和参数方程	246
二、空间直线的一般方式	248
三、两直线的夹角	249
四、直线与平面的夹角	251
第六节 几种常见的曲面	252
一、母线平行于坐标轴的柱面	253
二、旋转曲面	254
三、旋转椭球面与椭球面	256
四、旋转抛物面与椭圆抛物面	257
五、双曲抛物面	258
六、旋转双曲面与双曲面	258
第七节 空间曲线在坐标面上的投影	259
一、空间曲线的参数方程	259
二、空间曲线在坐标面上的投影	260
习题七	262

<u>习题参考答案</u>	266
---------------------	-----

第一章 行列式

行列式是一种常用的数学工具,在数学和其他应用学科以及工程技术中,有着广泛的应用.本章主要介绍行列式的概念、性质和计算方法.为了研究行列式理论的需要,首先介绍排列的一些知识.

第一节 排列及其逆序数

前 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 按照任何一种次序排成一列,称为这 n 个数的一个**全排列**.例如前三个自然数 $1, 2, 3$ 的全排列共有 $3! = 6$ 种不同的排法:

$123, 132, 213, 231, 312, 321$

定义 1 前 n 个自然数每一种有次序的全排列称为一个 **n 级排列**,简称为**排列**.

两个 n 级排列,只要排在某个位置的对应数字不同(如 $123\dots n$ 与 $213\dots n$),就视为不同的排列.由此可知,所有不同的 n 级排列的总数必为 $n!$ 个.这是因为,第一个位置可以从 n 个数中任取一个来排,共有 n 种不同排法.而当第一个位置排定某个数字后,其余 $n-1$ 个位置可由余下的 $n-1$ 个数字任意排列.此时,第二个位置尚有 $n-1$ 种不同的排法.显然,前两个位置共有 $n(n-1)$ 种不同的排法.当前两个位置排定后,第三个位置尚有 $n-2$ 种

不同的排法. 如此继续下去, 到最后一个位置, 只剩下一个数字, 只有一种排法. 故共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ 种不同的排法, 从而产生 $n!$ 种不同的 n 级排列.

按数字从小到大的顺序所产生的 n 级排列 $123\cdots n$ 称为**顺序排列**或**标准排列**. 异于顺序排列的任何一个排列中都会出现数字大小次序的颠倒. 在一个排列中, 任何两个数字之间, 如果大数排在小数之前, 就说出现了一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总个数称为该排列的**逆序数**.

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**, 逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**.

例 1 判定 5 级排列 31542 的奇偶性.

解 先求排列的逆序数. 数字 3 排在首位, 其前面没有比它大的数字, 故不产生逆序; 数字 1 排在第二位, 它前面有 1 个数字比它大, 故产生 1 个逆序; 数字 5 排在第三位, 其前面没有比它大的数字, 故不产生逆序; 数字 4 排在第四位, 它前面有 1 个数字比它大, 故产生 1 个逆序; 数字 2 排在第五位, 它前面有 3 个数字比它大, 故产生 3 个逆序. 于是

$$\tau(31542) = 0 + 1 + 0 + 1 + 3 = 5$$

可见 5 级排列 31542 是一个奇排列.

定义 2 把一个排列中某两个数字的位置互相对调, 称为对排列的一次**对换**. 特别地, 相邻位置上两个数字的对换称为**邻换**.

引理 一次邻换改变排列的奇偶性.

证 设排列 $p_1p_2\cdots p_s i j q_1q_2\cdots q_t$ 经一次邻换化为排列 $p_1p_2\cdots p_s j i q_1q_2\cdots q_t$. 注意到经上述邻换后, 排列 $p_1p_2\cdots p_s$ 和 $q_1q_2\cdots q_t$ 的各数字间的相互位置以及它们分别与 i 或 j 的相互位置并无改变, 因而它们的逆序个数没有变化, 只是由于 i, j 相互调换位置后, 使排列 $p_1p_2\cdots p_s j i q_1q_2\cdots q_t$ 的逆序数比原排列 $p_1p_2\cdots p_s i j q_1q_2\cdots q_t$ 的逆序数增 1 或减 1, 故排列 $p_1p_2\cdots p_s i j q_1q_2\cdots q_t$

与 $p_1 p_2 \cdots p_s j i q_1 q_2 \cdots q_t$ 的奇偶性不同,命题得证.

定理 1 一次对换必改变排列的奇偶性.

证 设排列

$$p_1 \cdots p_i r_1 \cdots r_m j q_1 \cdots q_k \quad (1)$$

经一次对换化为排列

$$p_1 \cdots p_i j r_1 \cdots r_m i q_1 \cdots q_k. \quad (2)$$

根据引理,只要证明由(1)到(2)的一次对换可以经过奇数次邻换来实现就可以了.

事实上,在排列(1)中将数字 i 依次向右做 $m+1$ 次邻换,得排列

$$p_1 \cdots p_i r_1 \cdots r_m j i q_1 \cdots q_k$$

再将上述排列中的数字 j 依次向左做 m 次邻换,得到的排列即为(2). 总之,(1)可经奇数(即 $2m+1$)次邻换化为(2).

定理 1 证毕.

例 2 已知 $3\square 452\square$ 为一个 6 级排列,将数字 1 和 6 填入 $\square$ 内,使其成为奇排列.

解 我们可以将数字 1 和 6 随意填入两个 $\square$ 内,然后求此排列的逆序数. 如果逆序数是奇数,该排列即为所求;如果逆序数为偶数,由定理 1,将数字 1 和 6 的位置对调,便得所求的排列.

今将数字 1 填入第 1 个 $\square$ 内,将数字 6 填入第 2 个 $\square$ 内,得排列 314526,则

$$\tau(314526) = 0 + 1 + 0 + 0 + 3 + 0 = 4$$

即排列 314526 为偶排列,由定理 1,将数字 1 和 6 的位置对调,得奇排列 364521.

最后,我们要说明一点:本节所讨论的排列是指前 n 个自然数的全排列. 但它完全可以推广到任意 n 个不同元素的全排列上去. 因为只要将这 n 个元素事先编号为 $1, 2, 3, \cdots, n$, 那么, n 个不同元素的全排列就相当于前 n 个自然数的全排列了.

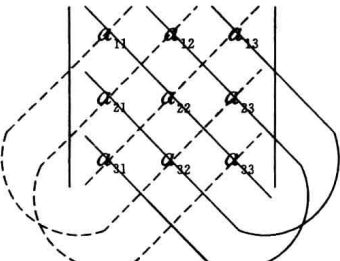
第二节 n 阶行列式的概念及其性质

在初等数学中,我们讨论过二阶、三阶行列式,并且利用它们解二元、三元线性方程组.通常分别称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为二阶和三阶行列式,它们的值可以按“对角线法则”来计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$



$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

一般地,可以定义 n 阶行列式.

定义 3 将 n^2 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 排成如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

称为一个 n 阶行列式.“ $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ ”是行列式的记号.行列式中每个横排称为一行,每个竖排称为一列,数 a_{ij} 称为该行列式的第 i 行第 j 列的元素, i 和 j 分别称为元素 a_{ij} 的行标和列标.

在前面我们用“对角线法则”定义了二阶、三阶行列式的值, n 阶行列式的值如何定义呢?仔细地观察“对角线法则”,会发现三阶

行列式的值是 $3! = 6$ 项的代数和,而每一项都是三阶行列式中取自不同行又不同列的 3 个元素的乘积,且每一个这样的乘积项还有一个符号因子,符号因子的正负由该乘积项诸元素在行列式中的位置所决定.把这些规律推广到 n 阶行列式,便可得到 n 阶行列式值的定义.为此,有

定义 4 n 阶行列式(3)中取自不同行又不同列的 n 个元素的乘积 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 称为该行列式的一个均匀分布乘积项,简称为均布项.排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为它的行标排列, $j_1 j_2 \cdots j_n$ 称为它的列标排列.

我们规定:一个均布项中诸元素互换位置得到的所有均布项都视为同一个均布项.

显然, n 阶行列式中的 n 个元素之积 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 构成均布项的充分必要条件是它的行标排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 n 级排列.

例如 在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中, $a_{12} a_{21} a_{33}$ 是一个均布项,行标排列为 123,列标排列为 213,均为 3 级排列.而 $a_{11} a_{12} a_{13}$ 不是均布项,因为它的行标排列 113 不是 3 级排列.

由定义 4 可知,在两个均布项中,对应于某一行的两个元素属于不同列,这两个均布项必不相同.那么, n 阶行列式中究竟有多少个不同的均布项呢?不妨设每一个均布项的行标排列都是顺序排列,于是每一个不同的列标排列都决定一个不同的均布项.由于 n 级排列共有 $n!$ 种,因此, n 阶行列式中共有 $n!$ 个不同的均布项.

定义 5 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

的值定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau_1 + \tau_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (5)$$

其中 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 D 的均布项, $\sum$ 表示对 D 中所有 $n!$ 个不同的均布项求和, $\tau_1 = \tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$, $\tau_2 = \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$, $(-1)^{\tau_1 + \tau_2}$ 称为均布项 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 的符号因子.

在这里需要特别指出:

1° 同一均布项的不同写法不会改变该项的符号因子, 从而 (5) 式里均布项 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 中各元素的相互次序可以任意排列, 不会改变行列式的值. 这是因为, 一个均布项的符号因子实际上取决于它的行标排列与列标排列的奇偶性是否相同, 相同时为 $+1$, 不同时为 -1 . 而一个均布项的不同写法只不过是均布项中各元素之间的对换, 这一过程使均布项的行标排列与列标排列作相应地对换, 由定理 1 知, 这两个排列的奇偶性的异同始终不变.

2° 按定义 5, 一阶行列式 $|a|$ 的值就是数 a , 对于二、三阶行列式, 按 (5) 式计算出的值与按“对角线法则”算出的值是一样的, 但对于高于三阶的行列式, 按“对角线法则”得到的均布项个数要比 (5) 式中包含的均布项个数少许多. 因此“对角线法则”仅适用于二阶和三阶行列式, 对更高阶的行列式不再适用.

3° 行列式与行列式的值是两个不同的概念, 但为了叙述方便, 今后不加区分, 所论及的行列式亦表示它的值. 若两个行列式的值相同, 则说这两个行列式相等.

由于一个均布项中各元素之间的相互次序可以任意排列, 当我们约定所有均布项的行标排列都取顺序排列时, 注意到 $\tau_1 = \tau(123 \cdots n) = 0$, (5) 式便成为

$$D = \sum (-1)^{\tau_2} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (6)$$

其中 $\tau_2 = \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

同理,如约定所有均布项的列标排列都取顺序排列,便有

$$D = \sum (-1)^{\tau_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

其中 $\tau_1 = \tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例 1 计算对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

其中主对角线上的元素依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 未写出的元素全为 0.

解 按定义 5, D 中除 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 一项外, 其余均布项都为 0. 从而

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(12\cdots n) + \tau(12\cdots n)} a_1 a_2 \cdots a_n \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

例 2 定义上三角行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{主对角线下方的元素全为 } 0)$$

证明 $D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

证 很显然, 在行列式 D 的所有均布项中, 只要第 1 列的元素不是 a_{11} , 则均布项必为 0, 当第 1 列取定 a_{11} 后, 第 1 行就不能再有元素参加均布项了, 而第 2 列中除 a_{12}, a_{22} 外, 其余元素均为 0, 于是只需考虑第 2 列取 a_{22} 构成的均布项. 同理, 第 3 列只能取 a_{33} , 依此下去, 第 n 列只能取 a_{nn} . 总之, D 中除 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 外的所有均布项都为 0, 因此

$$D = (-1)^{r(12\cdots n)+r(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\ = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

若行列式的某行(或某列)元素全是零,则行列式必为零.这是因为行列式的每个均布项中至少有一个因子为零.

在(4)式定义的行列式 D 中,把每行都变成相同序号的列,所得到的行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{i3} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (7)$$

称为 D 的**转置行列式**.易见,在 D 中处于 i 行 j 列位置的元素,在转置行列式 D' 中恰处在 j 行 i 列的位置上.

在初等数学中,大家已经知道了二、三阶行列式的某些性质,依照 n 阶行列式的定义,可以证明 n 阶行列式亦有类似的性质.

性质1 行列式转置,其值不变.

证 设转置前后的行列式 D 与 D' 如(4)、(7)所示.按定义5, D 与 D' 的值都是 $n!$ 个均布项的代数和.任取 D 的一个均布项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,它恰好也是 D' 的一个均布项.并且它在 D 中的行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 就是它在 D' 中的列标排列;它在 D 中的列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 就是它在 D' 中的行标排列.因此,该项在 D 中和 D' 中的符号因子相同.由于 D 值中的 $n!$ 项与 D' 值中的 $n!$ 项可以一一对应相等,所以它们的和亦相等,即有 $D = D'$.

由性质1可知,行列式中的“行”与“列”具有同等的地位,凡是对“行”成立的性质对“列”也同样成立,反之亦然.因此,在证明行列式的性质时,我们仅就“行”的情形加以证明.

性质2 行列式某行(列)的元素遍乘数 k ,则行列式的值亦随之 k 倍.