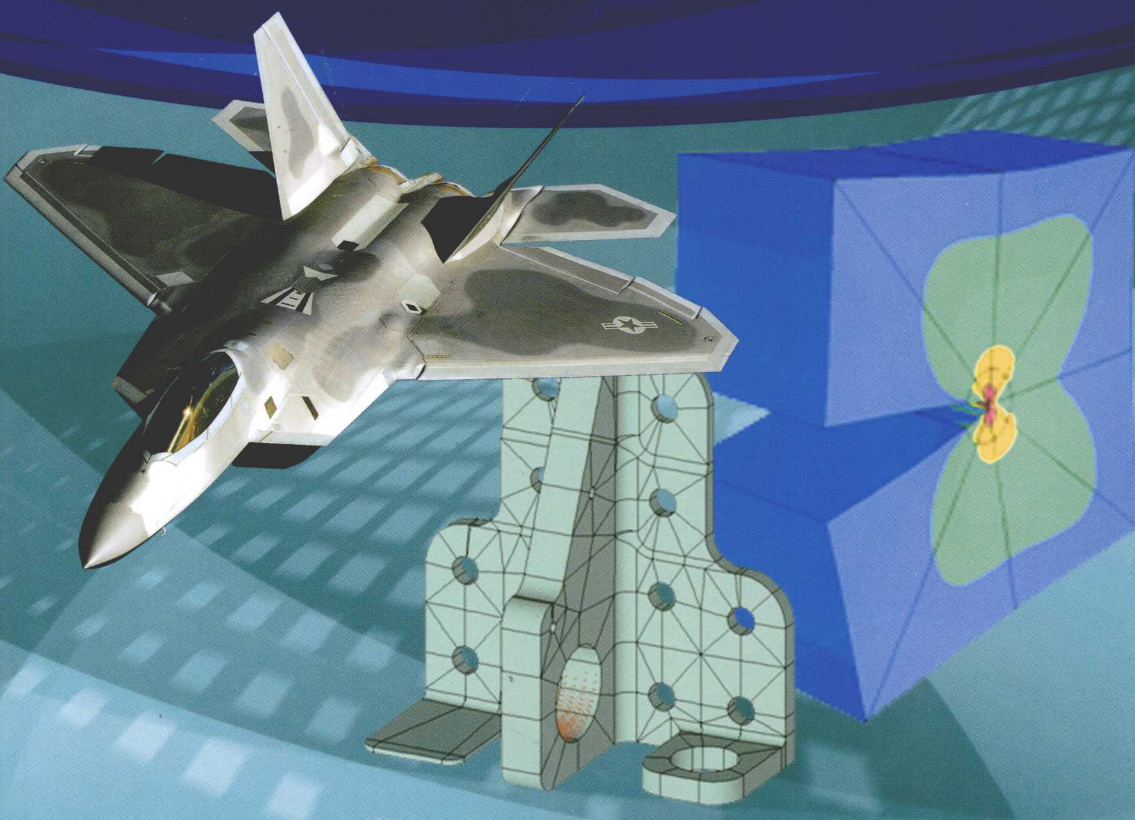
WILEY

INTRODUCTION TO
FINITE ELEMENT ANALYSIS
FORMULATION, VERIFICATION AND VALIDATION

有限元分析的数学建模、校核与验证

（美）巴纳·萨伯（Barna Szabo）
伊沃·巴布斯卡（Ivo Babuska）著
谢宗蕻 张子龙 张 勇 译



航空工业出版社

Introduction to
Finite Element Analysis
Formulation, verification and validation

有限元分析的数学建模、校核与验证

（美） Barna Szabo　Ivo Babuska　著
谢宗蕻　张子龙　张　勇　译

航空工业出版社
北京

内 容 简 介

本书重点介绍了有限元模型的建立、验证与校核，尤其是详细介绍了 p 型有限元的基本理论，p 型、h 型以及 hp 型有限元的误差估计和收敛性问题。本书的最大特色是将有限元模型的建立与误差控制有机地结合了起来。书中包含众多的实例和练习，通过这些实例和练习可进一步加深读者对有限元法尤其是 p 型有限元法的理解。

本书可供在航空航天、船舶、土木、机械、力学、动力、能源等工程行业从事有限元分析工作的科研工作者、工程技术人员，大学教师、研究生和高年级本科生学习使用。

图书在版编目（CIP）数据

有限元分析的数学建模、校核与验证／（美）萨伯（Szabo，B.），（美）巴布斯卡（Babuska，I.）著；谢宗蕻，张子龙，张勇译. --北京：航空工业出版社，2013.12

书名原文：Introduction to finite element analysis：formulation，verification and validation

ISBN 978-7-5165-0360-7

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①萨…②巴…③谢…④张…⑤张… Ⅲ. ①有限元分析 Ⅳ. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 318892 号

北京市版权局著作权合同登记
图字：01-2012-2626

有限元分析的数学建模、校核与验证
Youxianyuan Fenxi de Shuxue Jianmo、Jiaohe Yu yanzheng

航空工业出版社出版发行
（北京市朝阳区北苑路 2 号院 100012）
发行部电话：010-84936555 010-64978486

北京地质印刷厂印刷 全国各地新华书店经售
2013 年 12 月第 1 版 2013 年 12 月第 1 次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：17.25 字数：432 千字
印数：1—2500 定价：85.00 元

作 者 简 介

Barna Szabo（巴纳·萨伯）是美国工程软件研究与开发公司（EDRD）创始人之一。该公司开发了专业的有限元分析软件——StressCheck®。2006 年从华盛顿大学退休之前，Barna Szabo 是华盛顿大学工程与应用科学学院力学学科 Albert P. and Blanche Y Greensfelder 讲座教授。主要研究领域为如何采用有限元方法来确保结构和力学系统数值模拟的质量和可靠性。Barna Szabo 教授共计发表了 150 多篇技术论文，其中部分文章与 Ivo Babuska（伊沃·巴布斯卡）教授合作发表。1991 年，由 Barna Szabo 教授和 Ivo Babuska 教授共同撰写的关于有限元分析的书由 John Wiley & Sons 出版社出版。Barna Szabo 教授是美国计算力学学会创始人之一，匈牙利科学院外籍院士及名誉博士。

Ivo Babuska 教授主要研究领域是关于数学问题及其应用的计算可靠性，尤其是有限元法的计算可靠性。Ivo Babuska 教授首次提出有限元计算的后验误差方法及自适应计算方法。20 世纪 70 年代，他发表的在该领域内的研究论文被广泛引用。Ivo Babuska 教授与 Barna Szabo 教授在 p 型有限元法领域的联合研究建立了 p 型有限元法的理论基础及算法架构。近期，Ivo Babuska 教授主要研究数学建模及存在于每一个数学模型中的不确定性问题的处理方法。为表彰 Babuska 教授在其研究领域做出的众多重要的学术贡献，他被授予很多的荣誉，如被选为美国国家工程院院士，被授予众多知名学校的名誉博士以及各种奖章和奖励等。

前　　言

当前，工程决策越来越多地基于计算获得的信息。计算结果必须保证对物理系统或物理过程相关特性的定量估算是可靠的。如何保证计算结果的可靠性已经引起越来越多的关注和询问。计算结果的可靠性来自于两个关键方面：建立恰当的数学模型和采用恰当的求解方法对该数学模型进行近似求解。保证数学模型满足可接受的必要准则并适用于特定物理问题的过程称为验证（validation）。在模型建立后，保证数值计算得到的模型近似解及相关数据能够满足可接受的计算精度要求的过程称之为校核（verification）。本书着重讨论了校核和验证的问题。

保证数学模型的数值分析结果的精度是有限元法研究中的主要目标之一。20 世纪 80 年代中期，研究人员获得了一个重要成果：对于一大类物理问题（如弹性力学、热传导及类似问题），通过适当设计有限元网格和恰当选取多项式的阶数可以使有限元分析结果呈指数速率收敛。这使得在许多工程问题分析中，估计和控制模型离散误差成为可能。

当前，如何选择合适的数学模型及控制建模误差仍属于研究前沿。分级建模的理念和策略得到了建立和发展。该领域的进步使得很多重要的工程实际应用成为可能。

本书的显著特点在于它系统地介绍了一个有限元建模、校核和验证的过程，并选用若干例子进行了说明。我们认为有限元分析软件的使用者必须对以下问题有一个基本的了解：如何建立数学模型，模型中的关键假设是什么，有限元法的算法结构是怎样的，离散参数是如何影响有限元分析精度的，如何评估计算数据的精度，怎样避免常见的错误。本书的主要目的是介绍有限元法的基础知识。随书提供了一套名为 StressCheck 的商业有限元分析软件的学生版，以便读者能够进行一些问题的计算和分析。本书的另一个重要目的就是让读者通过不断自学，了解和跟踪有限元分析领域内的新进展。

工程专业的学生通常会只选择一门大约 15 周（45 课时）的有限元分析课程。我们整理了本书的素材以使得学生能够有效利用这 15 周的教学时间。本书对读者的前期专业知识要求甚少。工程专业的大学二年级学生只要学过势能原理和材料强度知识就能够学习本书内容。数学部分的内容也仅涉及了与有限元分析法用于弹性力学和热传导问题相关的基本概念和专业术语。

感谢 Dr. Norman F. Knight, Jr. 和 Dr. Sebastian Nervi 对于本书原稿的审阅和建议。

Barna Szabo
华盛顿大学圣路易斯分校

Ivo Babuska
得克萨斯大学奥斯汀分校

译 者 序

美国 Barna Szabo 教授和 Ivo Babuska 教授是 p 型有限元领域国际知名的开拓者和领军人物，他们直接促进了以 p 型有限元法为代表的先进有限元技术的完善和工程应用。由这两位科学家联合撰写的《有限元分析的建模、校核与验证》一书，是先进有限元领域最新、最系统的科学专著。相信本书中译本的出版，将对我国 p 型有限元法的基础理论研究和工程应用起到积极的推动作用。

本书的翻译工作由谢宗蕻、张子龙和张勇合作完成，并由谢宗蕻负责统稿。张子龙对全书内容进行了校核。赵天娇、孙俊峰、李想、赵伟、杨鹏、闫群、刘晓宇、李玮、田江、朱学森、刘明兴等同学参加了部分书稿的翻译和图文整理工作，在此对他们的辛勤工作表示诚挚的感谢。

本书的出版得到了国家自然科学基金委民航联合研究基金重点项目“民机复合材料结构维修基础理论和实验验证”（项目号：U1233202）的资金支持，对此表示感谢。中航出版传媒有限责任公司（航空工业出版社）的编辑同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，本书翻译难免存在错误或疏漏之处，衷心希望读者批评指正。

译者

2013 年 7 月于西安

目　录

第1章　绪　　论

工程决策过程越来越依赖于从数学模型的近似解中计算得到的信息。工程决策涉及法律和道德责任。美国民事诉讼法采用的标准就是工程决策中的判断、建议和决定必须“基于合理的工程确定程度”。工程学会的道德准则有着更高的标准。例如，电气电子工程师协会（IEEE）的伦理准则要求会员“承担责任保证做出的工程决策符合安全性、健康性和公众福利，并且立即揭露那些可能危害公众或环境的因素”，以及“在基于现有数据发表意见或评估时要诚实守信和实事求是”。

计算工程领域面临的一个重要挑战就是要建立一套规范程序以获得可靠证据来证明，基于特定目的建立的模拟某些物理问题的数学模型能够足够准确地表征物理现实，模型的数值分析解的误差足够小，基于模型预测结果的工程决策合理有效。该领域已经有了大量研究成果，且相关研究发展迅速（可参见参考文献［38a，68，52，51，99］）。在固体力学领域中，建议采用的支持工程决策的数学建模和数值处理方法在美国机械工程师学会（American Society of Mechanical Engineers，ASME）发布的一份文件中已经有详细介绍，美国国家标准协会（American National Standards Institute，ANSI）采纳了该标准[33]。

如何选择数学模型和方法来评估及控制建模误差和离散误差是本书的两大主题。本章对此将给出一个简要概述，并介绍一些基本术语。

1.1　数值模拟

数值模拟的目的就是预测物理系统对应于不同激励的响应，并基于这些预测结果做出合理决策。为实现这一目标，我们建立数学模型并计算其数值解。数学模型仅为对现实问题的理想化描述，绝不能和其模拟的物理现实混为一谈。

数学模型的选取取决于它的使用目的：对物理现实的哪个方面感兴趣？应该预测哪些数据？要求怎样的精度？数值模拟的要素和相关误差如图1－1所示。

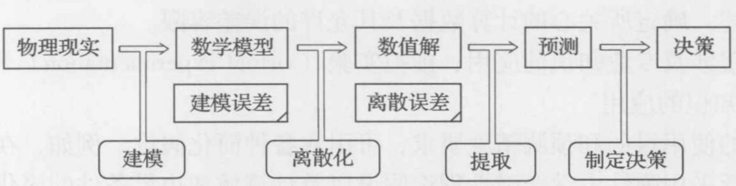


图1－1　数值模拟的主要元素和相关误差

有些误差和数学模型相关，有些误差则与模型的数值求解相关，对应的误差分别称为建模误差和离散误差。为了保证预测结果可靠，这两类误差都必须足够小。建模过程是一个构建数学模型的过程，而离散化过程则是一个获得数学模型近似解的过程。信息提取是

一个基于模型近似解获得所关心数据的过程。有些作者用术语“系统响应量”（System Response Quantities，SQRs）来表示这些数据。

1.1.1 建模过程

数学模型是一种把一组数据（输入数据）转换到另一组数据（输出数据）的处理器。例如，在固体力学中，给定了求解域、本构方程与边界条件（载荷和约束）后，预测位移、应变和应力、应力强度因子、限制载荷、固有频率等。动量守恒方程（在静力学问题中是平衡方程）、应变—位移关系，以及本构方程适用于所有模型。

建模过程最终获得一个数学模型。数学模型的定义涉及以下内容：

①理论建模。该过程是以常微分方程或偏微分方程，或极值原理的形式给出经过适当简化后的物理法则的数学表达。例如，弹性梁的经典微分方程是由弹性力学理论结合如下假设获得的：假定沿梁厚度方向，位移分量呈线性变化，且该假设对梁的位移、弯矩、剪力、固有频率等参数变化影响很小。

②明确输入数据。输入的数据由下面几部分组成：

a. 定义求解域的数据。在工程实践中，求解域的范围通常采用计算机辅助设计（Computer Aided Design，CAD）软件来构建。CAD 工具建立真实对象的理想实体模型。模型的细节取决于 CAD 软件的选择以及操作者的技能及偏好。

b. 物理参数（弹性模量、屈服应力、热膨胀系数、热传导率等）。

c. 边界条件（载荷、约束、温度等）。

d. 与参考状态和初始条件相关的信息或假设。

e. 不确定性。当构造一个数学模型所需的某些信息未知时，则不确定性称为主观不确定性（认知不确定性）。例如，残余应力的大小和分布通常是未知的，某些物理特性可能也是未知的。统计不确定性（也称客观不确定性）永远存在。即使在所需的物理参数、载荷及其他数据的平均值已给出的情况下，数据仍普遍存在统计偏差现象，有些时候统计偏差可能还会相当大。考虑不确定性对于正确解读计算得到的信息十分必要。有多种方法可用于计算不确定性。选用哪一种方法取决于现有信息的质量和可靠性。如蒙特卡洛法，采用随机变量作为输入参数，反复随机取样来计算输入参数对所关心的计算结果的影响程度。如果输入数据的概率密度分布函数足够准确，并且采样点足够多，就会获得相对合理的计算结果概率分布。

③目标描述。确定所关心的计算数据及其允许的误差容限。

建模的过程涉及专业知识的应用、虚拟实验（virtual experimentation）和参数标定。

（1）专业知识的应用

根据模型的使用目的和预测精度要求，可引入各种简化假设。例如，在机械和结构工程应用中，广泛采用弹性力学线弹性理论假设以及计算域和边界条件的简化假设。在许多应用中，引入了进一步的简化，导出了梁、板、壳模型，平面模型以及轴对称模型。每一个模型都在指定边界条件和求解哪些数据等方面施加了额外限制。

在工程文献中常用的简化模型可以划分为不同的模型类别，即各种理论模型。例如，梁、板、壳理论模型。这些模型通常涉及结构变形模式假设（例如，变形后梁截面仍然保持平面并且垂直于梁的中面），位移函数与应变张量之间的关系式（例如，应变与曲率

以及到中性轴的距离成正比），胡克定律的应用，以及平衡方程的表述。

在本科工程课程中，每种模型单独分章介绍，这会导致一种误解，认为每类模型是一个独立的个体。然而，将这些模型视为一个更为综合的模型的特殊个例可能比将它们视为单独个体更好。例如，通常的梁、板和壳模型是一个三维线弹性力学模型的特例，三维线弹性力学模型又是考虑超弹性、弹塑性及其他材料准则、大变形、接触等问题的连续体结构力学模型的特例。这就是数学模型的等级化思想。

鉴于可选对象的丰富多样，对于特定应用的模型选择是一个重要问题。建模的目的就是找出最简单的数学模型，以确保可以在指定的精度范围内获得对相关数据的准确预测。

建模过程始于基于专业知识建立合理的数学模型，即所谓的工作模型。由于和主观判断有关，因此，不同的专家可能建立不同的工作模型。假定可以使用一些软件工具，针对模型的特定目标和用途，系统地评价这些数学模型，专家们应该有可能对最终的工作模型的定义达成一致意见。

（2）虚拟实验

模型筛选时涉及到各种建模假设及输入数据的不确定性对所关心的计算输出数据的影响程度的系统评估。这可通过一个虚拟实验来完成。

例如，在固体力学中通常首先建立一个基于线弹性力学理论的工作模型。其隐含的假设是：应变远远小于1；应力和应变成正比；位移很小，针对变形前的结构建立的平衡方程对于变形后的结构同样适用；边界条件与位移函数无关。一旦得到一个校核过的解，就可以检查应力场以确定应力是否超过了材料的比例极限，以及这是否会显著影响所关心的计算数据。同样地，可以就大变形对计算数据的影响进行评估。此外，还可以测试边界条件变化对计算结果影响的灵敏度。虚拟实验为考察各种建模假设对于计算结果的影响提供了有价值的信息。

（2）参数标定

建模过程中可能会发现计算结果对某些参数，如材料性能或边界条件的变化比较敏感。如果还没有这些参数的确切数据，则必须进行标定试验来确定这些参数值。在标定时，假设数学模型是正确的，选择模型参数，使得预测结果和实测结果相一致。

例 1.1.1 如果计算的目的是要预测引起一个部件疲劳失效的载荷循环次数，那么必须选择一个或多个经验模型，并需要输入应力或应变幅值及材料参数。在低周疲劳中，一个被业内广泛使用的预测疲劳寿命的模型是总应变—寿命模型：

$$\epsilon_a = \frac{\overline{\sigma}_f}{E}(2N)^b + \overline{\epsilon}_f (2N)^c \tag{1-1}$$

式中：ϵ_a——应变振幅；

N——失效循环次数；

E——弹性模量；

$\overline{\sigma}_f$——疲劳强度系数；

b——疲劳强度指数；

$\overline{\epsilon}_f$——疲劳延性系数；

c——疲劳延性指数。

参数 E，$\overline{\sigma}_f$，b，$\overline{\epsilon}_f$ 和 c 都通过标定试验确定，参见参考文献［76］。该模型的不同版

本在工程中被广泛使用。金属疲劳的参数标定试验也有标准①。

1.1.2 验证

验证是一个将数学模型的预测结果与试验数据进行对比的过程。固体力学领域，模型的预测结果可以通过专门设计的试验进行验证。这是一类非常庞大的问题，包括所有结构性能预测所涉及的数学模型的验证。一些重要问题，如地震和其他自然灾害的影响，以及一些特殊问题，如大坝、核电厂选址等，不可能对设计采用的数学模型预测结果进行全尺寸试验验证。对于这一类问题，往往采用收集事故信息，对设计模型进行后验分析和修正的方法。

每个数学模型都有建模误差（如图 1－1 所示）。因此，有必要对数学模型的预测效果进行评估。这个过程被称为模型的试验验证，如图 1－2 所示。

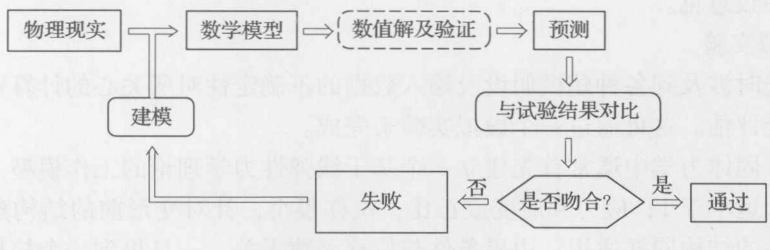


图 1－2　模型的验证过程

验证试验往往选用一个或多个指标和判据。如果预测符合判据标准，则模型通过了验证测试，否则，该模型将被弃用。

在大型项目，如飞机的研发过程中，会首先通过试样测试确定材料的物理性能和失效准则，进而开展元件、细节件、子部件、部件、全机等多层次积木式验证试验。试验成本随着试验件的复杂程度的增加而增加，试验数量随着试验件复杂程度的增大而减小。分级试验的目的就是要发展足够可靠的预测能力，使得在子部件、部件级别的试验数据与预测结果接近。在产品生产周期的后期发现问题再解决通常是非常昂贵的。

在评估验证试验的结果时，要牢记那些与物理系统可用信息相关的限制条件和不确定因素：

①模型的求解域通常假设与设计蓝图相对应。现实中的零部件尺寸规格往往与图样相偏离，且偏离程度未知，或难以将其影响纳入数学模型。

②对许多材料的本构关系掌握不够全面完善，只适用于很小的应变、应变率、温度范围及很短的加载时间区间。

③即使在仔细控制的试验条件下，除了自由边界条件，其他边界条件都很难给出高精度的数学描述。其原因是载荷和约束与力学接触有关，而接触力与刚度、施加载荷、约束结构（例如，试验机、机床，装配夹具等）自身的柔度以及接触面的物理性质密切相关。换言之，边界条件代表了外部环境对建模对象的影响，所需信息很难得到。因此，在边界条件的建模过程中，主观判断往往不可避免。

---

① 例如，参看 International Organization for Standardization ISO 12106：2003 以及 ISO 12107：2003。

④材料在被加工成零件之前（这些零件可被组装成机器或结构）需要经过如铸造、淬火、挤压、轧制、锻造、热处理，冷成形、机械加工、表面处理等一系列加工过程，材料中会存在残余应力，其数值可能还会相当大。残余应力的分布必须满足平衡方程和自由边界条件，但其分布一般是未知的。参见参考文献［47，48］。

⑤模型相关参数的概率分布及它们的协方差函数很难得到。一般情况下，不确定性随着模型的复杂度增加而增加。

备注 1.1.1 同一个问题，可能会提出多个数学模型，而且可能不止一个数学模型满足试验验证。在这种情况下，建议选择简单的模型。

备注 1.1.2 由于数据的统计学偏差和试验观测误差，必须要在统计意义上理解数学模型的预测与物理试验结果之间的比较结果。模型选择的理论框架以贝叶斯①分析为基础。具体来说，用 M 表示数学模型，用 D 表示获得的试验数据，I 表示背景信息，则有：给定背景信息 I，模型 M 对数据 D 的预测概率可以写成以下条件概率形式：

$$\text{Prob}(M \mid D, I) \approx \text{Prob}(D \mid M, I) \times \text{Prob}(M \mid I) \tag{1-2}$$

换言之，在给定测量数据 D 和背景信息 I 的情况下，贝叶斯定理把数学模型正确建立的概率与模型运行正常时可观测到测量数据 D 的概率联系在一起，参见参考文献［74］。Prob（$M \mid I$）被称为先验概率。它代表了在获得测量数据 D 之前，专家对 M 有效性的意见。Prob（$D \mid M$，I）被称为似然函数，代表根据获得进一步信息之前的现有资料，给出的参与竞争的数学模型可靠性的信任度概率。试验获得新信息后，更新先验概率即可得到 Prob（$M \mid D$，I），称为后验概率。贝叶斯定理的一个重要作用是，它提供了一个基于新数据改进概率估计值 Prob（$M \mid D$，I）的方法。

1.1.3 离散化

有限元法（Finite Element Method，FEM）是最为强大和使用最为广泛的数值分析方法之一。它可以求得数学问题的近似解，模拟物理系统对各种激励的响应。它被广泛运用于工程和科学的各个分支，如弹性力学、传热学、流体动力学、电磁学、声学和生物力学等。

在有限元法中，求解域被划分成具有简单几何形状的单元，如三角形单元、正方形单元、四面体单元、六面体单元等，并构造出一组基函数，每个基函数只在少数单元非零。这就是所谓的离散化。第2章将详细介绍。由基函数的线性组合得到的所有函数的集合称为有限元空间。计算结果的精度取决于有限元空间以及有限元求解计算所用的方法。有限元求解会产生离散误差，如图1－1所示。

必须建立这样的有限元空间，使得数学模型的有限元解与数学模型精确解之间的误差处于可接受的误差范围内。

所关心的模型计算结果，如最大位移、温度、应力等，都从有限元解 u_{FE} 计算而来。将这些关心的数据记为 Φ_i（u_{FE}），$i=1$，2，…，n。我们的目的是计算出 Φ_i（u_{FE}）并确保其与精确解的相对误差处于设定的精度范围内：

---

① Thomas Bayes（1702—1761）。