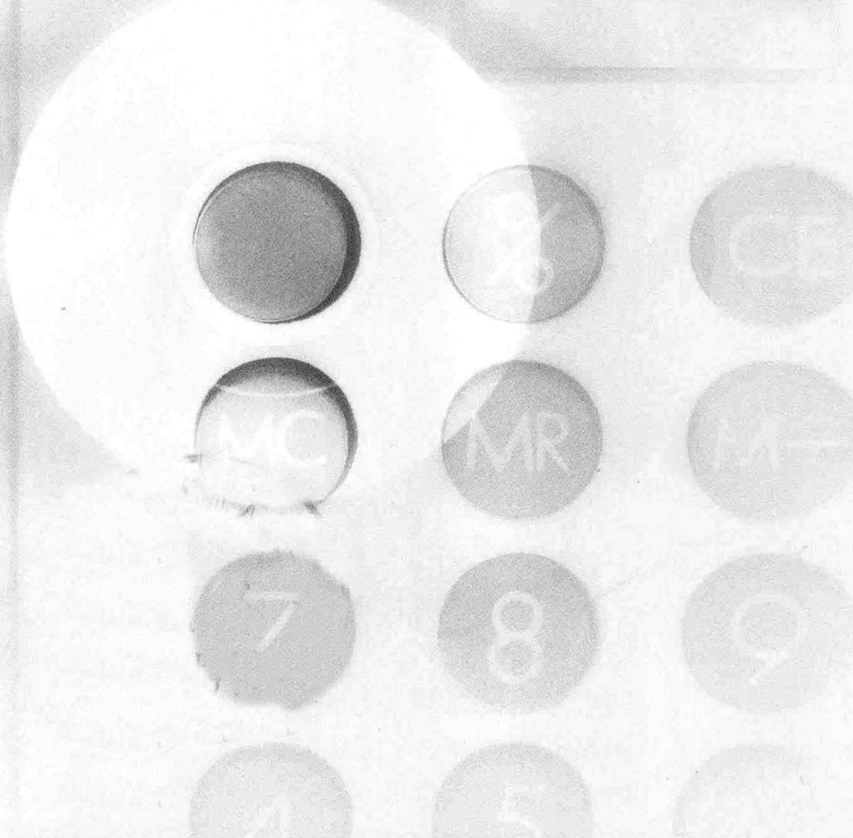
普通高等教育“十二五”经济与管理类专业核心课程规划教材

运筹学

主编 郭鹏

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”经济与管理类专业核心课程规划教材



运筹学

主 编 郭 鹏

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/郭鹏主编. —西安:西安交通大学出版社,
2013.12
ISBN 978-7-5605-5787-8

Ⅰ.①运… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①运筹学 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 260600 号

书　　名　运筹学
主　　编　郭　鹏
责任编辑　王建洪

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西江源印刷科技有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　**印张** 19.5　**字数** 471 千字
版次印次　2013 年 12 月第 1 版　2013 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-5787-8/O·446
定　　价　36.80 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82668133
读者信箱:xj_rwjg@126.com

内容提要

本书系统地介绍了运筹学的主要内容，包括线性规划、对偶规划、特殊线性规划（含运输规划、整数规划和目标规划）、动态规划、图与网络分析、排队论、存储论、决策论和对策论。在重点说明运筹学各主要分支的基本原理、模型和方法的基础上，突出案例分析或实例分析以加强其应用性；每章开始有内容简介，结束有小结与展望，便于读者阅读学习；例题以及习题涉及面较广，代表性强。本书编写坚持以问题为导向，注重理论与实践相联系，具有一定理论上的深度和应用上的广度。

本书属于普通高等教育“十二五”经济与管理类专业核心课程规划教材，既适用于经济管理类本科学生使用，也可供研究生以及相关管理人员学习参考。

普通高等教育“十二五”经济与管理类专业核心课程规划教材

编写委员会

总 主 编 汪应洛（中国工程院院士）

编委会委员（按姓氏笔画排序）：

马治国　万映红　王文博　王林雪

邓晓兰　孙林岩　冯宗宪　冯宪芬

冯　涛　刘　儒　李　成　李　琪

张俊瑞　郭根龙　郭　鹏　相里六续

郝渊晓　袁治平　樊技飞　魏　玮

策　　划 魏照民

前言

FOREWORD

运筹学于20世纪50年代后期被引入中国。1956年，中国第一个运筹学小组在钱学森、许国志先生的推动下在中科院力学所成立。1959年，中科院数学所成立了第二个运筹学小组。1963年，中科院数学所的运筹学研究室为中国科学技术大学应用数学系的第一届学生开设了较为系统的运筹学专业课，这是第一次在中国的大学里开设运筹学专业和授课。如今，运筹学已经成为几乎所有大学的管理学院、理学院以及一些工学院的基本课程了。

运筹学发展至今已经成为一个庞大的、包含多个分支的学科。这些分支学科包括：数学规划（包含线性规划、非线性规划、整数规划、矩阵规划、动态规划、全局优化等）、图论、组合优化、排队论、库存论、决策论、对策论、可靠性理论、不确定性理论等。其中一些分支学科已经发展比较成熟，另外一些分支学科还有待完善，还有一些分支学科才刚刚形成。

本书属于普通高等教育"十二五"经济与管理类专业核心课程规划系列教材，适用对象主要为经济管理类本科学生。本书的主要特点有：在选材上系统性强，覆盖面广，除了非线性规划未写进本书外，其他各主要分支学科的内容均已经包含进去；每章后有案例分析或实例分析，为读者系统地呈现了运筹学研究和解决实际问题的步骤，即提出问题、分析变量、建立模型、求解检验和组织实施；每章根据内容设计了多道典型习题，并在书后附有答案，便于读者复习和提高；每章后都有小结与展望，为读者拓宽视野、深入学习和研究提供了素材。

参加本书编写的老师有：西北工业大学郭鹏教授（绪论、第6、8、9章），西安理工大学熊国强教授（第5章），西安工程大学郑唯唯教授（第7章），西安电子科技大学杜黎副教授（第4章），西北工业大学姜继娇副教授（第3章），西安建筑科技大学张炜讲师（第1、2章）。

尽管本书的各位编者做了很大努力，但是鉴于编者水平有限，错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者　2013年9

目录
CONTENTS

第7章 库存论

第8章 决策论

第9章 对策论

参考答案

参考文献

绪　论

1　运筹学的简史

运筹学作为朴素的优化思想在中国发展历史中源远流长。春秋时期的《孙子兵法》处处体现了军事运筹的思想；同一时期，我国创造的轮作制、间作制与绿肥制等先进的耕作技术暗含了二阶段决策问题的雏形；战国时期的田忌赛马则是对策论的典型范例。这些事例无不闪耀着运筹帷幄、整体优化的思想，但却很少有人运用数学的方法将这些运筹思想和方法进行提升。

现代运筹学的思想萌芽于第一次世界大战时期，人们开始利用数学的方法探讨各种运筹问题。1914 年，兰彻斯特开展了关于战争中兵力部署的理论，这就是军事运筹学中的战斗方程。1915 年，哈里斯对商业库存问题的研究是库存模型最早的工作。1921 年，博雷尔引进了博弈论中最优策略的概念，对某些博弈问题证明了最优策略的存在。1928 年，冯·诺依曼提出了二人零和博弈的一般理论。1939 年，康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时，开创性地提出了线性规划模型，并给出了“解乘数法”的求解方法，于 1975 年获得了诺贝尔经济学奖。以上这些先驱性的研究工作对运筹学发展有着深远的影响。

运筹学真正作为科学名词出现在第二次世界大战期间。20 世纪 20 年代末期，英国为了对付德国飞机的空袭研制了雷达系统，这些武器在技术上虽然是可行的，但如何有效的使用它们，却成为了当务之急。因此，英国组织了一批科学家，对新武器进行新战术试验和战术效率的研究，并取得了满意的效果。因为与技术研究不同，他们把自己从事的工作叫做“运用研究”(operation research)（我国在 1956 年曾用过运用学的名词，1957 年正式定为运筹学）。因此，英军每一个大的指挥部基本都成立了运筹研究小组，其成员包括数学家、物理学家、天文学家和军事专家多人，探讨如何抵御敌人的飞机和潜艇的袭击。随后，美国和加拿大的军事部门也成立了一些专门小组，对战术革新、技术援助、战略决策、战术计划以及战果评价等问题开展了广泛的研究。这些运筹小组的研究为运筹学的发展积累了丰富的材料。第二次世界大战后，英国和美国在军队中成立了专门的运筹研究组织，美国还成立了著名的兰德(RAND)公司，开始着重研究战略性问题、未来武器系统的设计和其可能合理运用的方法。例如为美国空军评价各种轰炸机系统，讨论了未来的武器系统和未来战争的战略。他们还研究了前苏联的军事能力及未来的预测，分析前苏联政府计划的行动原则和未来的行动预测。同时一些运筹专家将研究的重点转向了国民经济发展中的民用问题，使运筹学相继在工业、能源、经济和社会问题等各个领域都有应用。在新的、更宽阔的环境中，运筹学的理论和应用研究得到了蓬勃的发展，并形成了运筹学的众多分支。研究优化模型的规划论，研究排队（或服务）模型的排队论以及研究博弈模型的博弈论（亦称对策论）是运筹学最早的三个重要分支，也称其为运筹学早期的三大支柱。随着学科的发展以及计算机科学的出现，运筹学现在的分支更细，名目更多。数

学规划(线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等)、图论与网络、排队论(随机服务系统理论)、存储论、对策论、决策论、维修更新理论、搜索论、可靠性和质量管理等基础学科分支,以及工程技术运筹学、管理运筹学、工业运筹学、农业运筹学等交叉与应用学科分支也先后形成,运筹学发展成为一个庞大的、包含多个分支的学科。

在我国,运筹学的研究与应用起步较晚。20世纪50年代后期,钱学森、许国志等教授才将运筹学由西方引入我国,并结合我国的特点在国内推广应用。在钱学森、许国志教授的推动下,中国第一个运筹学小组于1956年在中国科学院力学研究所成立。20世纪60、70年代,华罗庚先生的"优选法"和"统筹法"深入人心,他在这一时期的推广工作中播下了运筹学哲学思想的种子,大大推动了运筹学在中国的普及发展。许国志和越民义先生在排队论的瞬时概率性态问题、非线性规划梯度算法收敛问题、组合优化中的排序问题等方面的研究取得了一批重要成果,得到了国外同行的关注和好评,为中国运筹学的发展打下了坚实的基础,同时培养了一批学科带头人和骨干。20世纪80年代,随着国内外学术交流的不断增加,中国运筹学有了快速的发展,取得了一批有国际影响的理论和成果。同时中国运筹学工作者坚持将运筹学理论研究与国民经济建设等重大项目和问题紧密结合,在国家若干重大工程计划实施方面发挥了积极的作用,产生了良好的经济效益和社会效益。

2　运筹学的特点

运筹学作为一门应用性很强的科学,其学科内涵广泛,具有复杂的应用科学特征。以下几个具有代表性的定义可以说明运筹学的性质和特点。莫斯和金博尔曾对运筹学下的定义是:"为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时,提供以数量化为基础的科学方法。"这个定义说明运筹学首先强调的是科学方法,所重视的某种研究方法应能用于整个一类问题上,并能传授和有组织地活动,而不单是某种研究方法的分散和偶然的应用。同时,它强调以量化为基础,必然要用数学理论和成果。但任何决策都包含定量和定性两方面,而定性方面又不能简单地用数学表示,如政治、社会等因素。只有综合多种因素的决策才是全面的。运筹学工作者的职责是为决策者提供可以量化方面的分析,指出有哪些定性的因素。运筹学的另一定义是:"运筹学是一门应用科学,它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量依据。"这个定义反映出运筹学具有多学科交叉的特点,如综合运用经济学、心理学、物理学、工程学中的一些方法。运筹学是强调最优决策,"最"是过分理想化了,在现实中往往用次优、满意等概念代替最优。因此,运筹学的又一定义是:"运筹学是一种给出问题坏的答案的艺术,否则的话问题的结果会更坏。"

可以认为,运筹学研究的对象是政治、经济及科学技术等活动中能用数量关系来描述的有关运用、筹划与管理等方面的问题。当然这里着重是以经济活动方面,尤其是生产经营活动的问题以及解决这些问题的原理和方法作为研究对象的。

综上所述,运筹学研究问题具有以下特点:

(1)科学性。运筹学研究是在科学方法论的指导下通过一系列规范化步骤进行的。运筹学研究是广泛利用多种学科的科学技术知识进行的研究,其不仅仅涉及数学,还要涉及经济科学、系统科学、工程物理科学等其他学科。

(2)实践性。运筹学以实际问题为分析对象,通过鉴别问题的性质、系统的目标以及系统

内主要变量之间的关系，利用科学方法达到对系统进行优化的目的。更为重要的是用运筹学分析获得的结果应经得起实践检验，并被用来指导实际工作。

(3)系统性。运筹学用系统的观点来分析一个组织(或系统)，它着眼于整个系统而不是一个局部，通过协调各组成部分之间的关系和利害冲突，使整个系统达到最满意状态。

(4)综合性。运筹学分析是一种综合性的研究，涉及问题的方方面面，要应用多学科的知识，由各方面的专家组成团队来完成。

3 运筹学的模型

运筹学模型是在对客观现实经过思维抽象后，用文字、图表、符号、关系式以及实体模样来描述客观对象，这些文字、图表、符号、关系式、实体模样就称为模型。一般模型有三种基本形式：形象模型、模拟模型、符号或数学模型(关系式)。目前使用最多的是符号或数学模型，运筹学中已有不少这类模型，如线性规划、网络规模、投入产出模型、排队模型、存储模型、决策和对策模型等。模拟模型是通过各种实验设计，搜集资料，并对资料进行统计推理的一套方法。它用计算机语言、图像显示或专门的模拟语言来实现"仿真"，适用于那些不能用数学模型和数学方法求解的复杂问题。目前模拟模型使用的也越来越多。构造一个良好的模型是运筹学研究和解决问题的基础，而构造模型是一种创造性劳动，成功的模型可以说是科学与艺术的结晶。

模型的一般数学形式可用下列表达式描述：

目标的评价准则 $U = f(x_l, y_j, \varepsilon_k)$

约束条件 $g(x_l, y_j, \varepsilon_k) \geqslant 0$

其中：x_l ——可控变量；

y_j ——已知参数；

ε_k ——随机因素。

目标的评价准则一般要求达到最佳(最大或最小)、适中、满意等。准则可以是单一的，也可是多个的。约束条件可以没有，也可有多个。当 g 是等式时，即为平衡条件。当模型中无随机因素时，称它为确定性模型，否则为随机模型。随机模型的评价准则可用期望值，也可用方差，还可用某种概率分布来表示。当可控变量只取离散值时，称为离散模型，否则称为连续模型。模型也可按使用的数学工具分为代数方程模型、微分方程模型、概率统计模型、逻辑模型等。模型若用求解方法来命名时，有直接最优化模型、数字模拟模型、启发式模型。模型也有按用途来命名的，如分配模型、运输模型、更新模型、排队模型、存储模型等。此外，模型还可以用研究对象来命名，如能源模型、教育模型、军事对策模型、宏观经济模型等。

运筹学在解决大量实际问题过程中逐步形成了一套系统的解决问题的方法和步骤，主要包括以下几个阶段：

(1)提出和形成问题。通过对实际问题的调查研究，明确问题的目标、可能的约束、问题的可控变量以及有关参数，搜集相关资料，将一个实际问题表示为一个运筹学问题。

(2)建立模型。把问题中的可控变量、参数和目标与约束之间的关系用一定的模型表示出来。

(3)求解模型。分析问题解的性质和求解的难易程度，寻求合适的求解方法。设计求解相应问题的算法，并对算法的性能进行理论分析。

(4)解的检验。判断模型和解法的有效性，提出解决实际问题的方案。

(5)解的实施。对实施部门讲清楚解的用法，在实际中加以应用，并在实施中发现问题，进行修改。

以上过程不是独立存在的，也绝非依次进行的，而是一个呈螺旋状发展的过程。

4 运筹学的应用与展望

由于任何现实的决策问题都是优化问题，任何有参数需要选取的问题都是运筹问题，所以运筹学的应用随处可见。运筹学的广泛应用使得它和生命科学、网络科学、管理科学等众多科学领域的交叉日益加强，这些交叉不仅为运筹学的应用提供了很好的舞台，同时也为运筹学的新兴分支提供了土壤，并极大地推动了运筹学的发展。例如，在生命科学中，将全局最优化、图论、神经网络等运筹学理论及方法应用于分子生物信息学中的DNA与蛋白质序列比较、芯片测试、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究；在金融管理方面，将优化及决策分析方法应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等；在网络管理上，利用随机过程方法研究排队网络的数量指标分析等；在供应链管理问题中，利用随机动态规划模型研究多重决策最优策略的计算方法等。这些问题和方法的推出，极大地推动了运筹学的发展，而运筹学的发展必将进一步研究和解决其他科学领域中越来越多的问题，并对其他学科产生一定的影响。

运筹学经过60多年的发展，其理论越来越深，应用愈来愈广泛，目前已经没有任何一个人可以说自己是运筹学所有方向的专家。因而对未来运筹学的任何一个具有挑战性的课题的研究，尤其是对出现在新的学科交叉领域的重大问题的探索，就更需要一组具有运筹学的不同专长的人才组成的研究团队(类似于运筹学发展初期时的研究小组)，其中还应该包含统计学、经济学、工商管理、计算机科学、行为科学等学科背景的人才，这样才能做出重要的科学发现和贡献。总之，运筹学还在不断地发展中，新的思想、观点和方法将会不断地出现。

第 1 章

线性规划

线性规划(linear programming，简称 LP)是运筹学的一个重要分支，其研究始于20世纪30年代末期，线性规划理论的发展与应用被认为是20世纪最重要的科学成果之一。1947年美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)提出求解线性规划的一般方法——单纯形法，从而使线性规划在理论上趋于成熟。目前，从解决企业管理的最优化问题，到工业、农业、交通运输、军事国防等部门的计划管理与决策分析，乃至整个国民经济计划的综合平衡，线性规划都有广泛的应用，它已成为现代管理科学的重要基础之一。本章共分为六个小节，第一节介绍了线性规划的数学模型及解的基本概念，第二节主要介绍线性规划的图解法，第三节和第四节分别系统介绍求解线性规划一般方法即单纯形法的理论依据和计算步骤，第五节则是单纯形法的进一步讨论，最后通过应用实例的分析和求解，说明线性规划的建模思路和求解方法。

本章的要点包括线性规划数学模型的结构和标准形式，线性规划的基本概念，线性规划的图解及相应的概念，单纯形法的原理，单纯形表的构成与运算方法，人工变量法和两阶段法。

1.1 线性规划问题及数学模型

1.1.1 问题的提出

在生产经营管理工作中，常常需要进行计划或规划。虽然不同行业计划的内容千差万别，但其共同点均可归结为解决两类主要的问题：一类是在资源(人力、物力、财力……)一定的情况下，如何利用这些有限的资源来完成最多的任务；另一类是在预期目标确定的情况下，如何利用最少的资源来完成这个确定的任务。

表 1-1 生产消耗及现有原料

单位产品的消耗 产品 / 原料	B_1	B_1	原料现有(m^3)
A_1	1	3	90
A_2	2	1	80
A_3	1	1	45
单位利润(百元)	5	4	

例 1-1 某建筑公司的预制厂利用沙、石、水泥三种原料 A_1、A_2、A_3，来生产两种产品 B_1 和 B_2，已知该厂各种原料的现有数量、单位产品对各种原料的消耗量及单位利润如表 1-1 所示。在这些现有资源的条

件下，如何分配产品 B_1 和 B_2 的生产，才使公司取得最大利润。

分析：该问题可以用以下的数学模型来描述，设 x_1 表示产品 B_1 的生产数量，x_2 为产品 B_2 的生产数量。这时该公司可以获取的利润为 $(5x_1+4x_2)$ 百元，令 $z=5x_1+4x_2$，因问题中要求获利最大，即 $\max z$。又 z 是该公司能获取的利润的目标值，它是变量 x_1、x_2 的函数，称为目标函数。x_1，x_2 的取值受到原材料 A_1、A_2、A_3 的限制，这些用于描述限制的数学表达式称为约束条件。由此例 1－1 的数学模型可表示为：

目标函数 $\qquad \max z = 5x_1 + 4x_2$

满足约束条件 $\qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 90 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 80 \\ x_1 + x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

例 1－2 现要做 100 套钢架，每套用长为 3.5m，2.6m 和 1.6m 的圆钢各一根。已知原料长 8.8m，问如何下料，使用的原材料最省。

分析：最简单做法是在每一根原料上截取 3.5m，2.6m 和 1.6m 的圆钢各一根组成一套，每根原料剩下料头 1.1m。为了做 100 套钢架，需用原料 100 根。若改为用套裁，就可以节约原材料。套裁方案见表 1－2。

表 1－2　套裁方案

下 j 根数 \ 长 k(m)	方案				
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
3.5	2	1	1		
2.6		2		2	
1.6	1		3	2	5
合计	8.6	8.7	8.3	8.4	8
料头	0.2	0.1	0.5	0.4	0.8

为了得到 100 套钢架，需要混合使用各种下料方案。设按Ⅰ方案下料的原材料根数为 x_1，Ⅱ方案为 x_2，Ⅲ方案为 x_3，Ⅳ方案为 x_4，Ⅴ方案为 x_5。根据表 1－2 的方案，可列出以下数学模型：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 2x_2 + 2x_4 = 100 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.1.2　线性规划问题的数学模型

通常称现实世界中人们关心、研究的实际对象为原型。模型是指将一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物，数学模型则是对现实世界的一个特定对象，为达到一定目的，根据内在规律做出必要的简化假设，并运用适当数学工具得到的一个数学结构。从以上两个例子可以

看出，规划问题的数学模型包含三个组成要素：

（1）变量，或称决策变量，是问题中要确定的未知量。每一个问题都用一组决策变量（x_1，x_2，…，x_n）表示某一方案，这组决策变量的值就代表一个具体的方案。

（2）约束条件，是指决策变量取值时受到的各种资源条件的限制，通常可用一组含决策变量的等式或不等式来表示。

（3）目标函数，它是决策变量的线性函数，按问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

如果规划问题的数学模型中，决策变量的取值是连续的，即可以为整数，也可以为分数、小数或实数，目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是含决策变量的线性等式或不等式，则该类规划问题的数学模型称为线性规划的数学模型。实际问题中线性的含义为：一是严格的比例性，如生产某产品对资源的消耗量和可获取的利润，同其生产数量严格成比例；二是可叠加性，如生产多种产品时，可获取的总利润是各项产品的利润之和，对某项资源的消耗量应等于各产品对该项资源的消耗量的和。但很多实际问题往往不符合上述条件，为处理问题方便，可看作近似满足线性条件。

假定线性规划问题中含 n 个变量，分别用 $x_j(j=1,\cdots,n)$ 表示，在目标函数中 x_j 的系数为 c_j（c_j 通常称为价值系数），x_j 的取值受 m 项资源的限制，用 $b_i(i=1,\cdots,m)$ 表示第 i 种资源的拥有量，用 a_{ij} 表示变量 x_j 取值为 1 个单位时所消耗或含有的第 i 种资源的数量（a_{ij} 通常称为技术系数或工艺系数），则上述线性规划问题的数学模型可表示为：

$$\max(\text{或}\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

上述模型的简写形式为：

$$\max(\text{或}\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1-2}$$

用向量形式表示时，上述模型可写为：

$$\max(\text{或}\min) z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_jx_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

式(1-3)中 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$;$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$;$P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$;$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$。

用矩阵和向量形式表示可写为:

$$\max(\text{或}\min)z=CX$$
$$s.t.\begin{cases}AX\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b\\X\geqslant 0\end{cases}\tag{1-4}$$
$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

式中,A 称为约束方程组(约束条件)的系数矩阵。

1.1.3 线性规划问题的标准形式

由于目标函数和约束条件内容和形式上的不同,线性规划问题可以有多种表达式。为了便于讨论和制定统一的算法,规定线性规划问题的标准形式如下:

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\tag{1-5}$$

标准形式的线性规划模型中,目标函数为求最大值(有些书中规定是求最小值),约束条件全为等式,约束条件右端常数项 b_i 全为非负值。对不符合标准形式(或称非标准形式)的线性规划问题,可分别通过以下方法转化为标准形式。

(1)目标函数为求最小值,即 $\min z=CX$ 。这时只需将目标函数最小化变换求目标函数最大化,即令 $z'=-z$,于是得到 $\max z'=-CX$。

(2)约束条件的右端项 $b_i<0$ 时,只需将等式或不等式两端同乘-1,则约束条件右端项必大于零。

(3)约束条件为不等式。这里有两种情况:

①约束条件为"$\leqslant$"形式。对这样的约束,在"$\leqslant$"不等式的左端加上一个非负的新变量,即可以化为等式。新增的非负变量称为松弛变量。

②约束条件为"$\geqslant$"形式。对这样的约束,在"$\geqslant$"不等式的左端减去一个非负的新变量,即可以化为等式。新增的非负变量称为剩余变量,也可以称为松弛变量。

(4)决策变量,这时可能有以下三种情况:

①决策变量 $x_j\leqslant 0$,则令非负变量 $x'_j=-x_j$,显然 $x'_j\geqslant 0$ 。

②决策变量 x_j 取值不受限制,可以用两个非负的新变量之差来代替。如变量 x_j 取值不受限制,则令 $x_j=x'_j-x''_j$,新变量 x'_j 和 x''_j 为非负变量,x_j 的符号由 x'_j 和 x''_j 来确定。