高等院校通识教育“十二五”规划教材

线性代数学习指导与习题解答

孙丹娜 李福乐 ◎ 主编
马少军 张洪谦 ◎ 副主编

解答明确，启发性强
可有效提高运算能力和技巧
提高分析问题和解决问题的能力

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等院校通识教育“十二五”规划教

线性代数学习指导与习题解答

孙丹娜 李福乐 ◎ 主编
马少军 张洪谦 ◎ 副主编

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导与习题解答 / 孙丹娜，李福乐主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2014.2
高等院校通识教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-33588-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙… ②李… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第307980号

内 容 提 要

本书的内容有：一、基本内容：列出各章的基本概念和常用的重要结论；二、基本要求：指出各章中每一部分内容应该掌握到什么程度，便于读者在复习时能合理分配力量；三、典型方法举例，列举各种解题方法的典型例题；四、课后习题详解：对《线性代数》的每一章的习题进行全面详细的解答；五、考研真题选解：为准备考研的学生准备往年研究生考试线性代数试题，并进行解答，便于学生了解考研题型和难度。

本书不仅适用于高等农业院校，也可作为林、水、医等院校的学生学习《线性代数》的指导书，也可作为报考农、林、水、医院校的研究生考生的复习参考书。

◆ 主　　编　孙丹娜　李福乐
副 主 编　马少军　张洪谦
责任编辑　王亚娜
执行编辑　肖　稳
责任印制　张佳莹　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：9.25　2014 年 2 月第 1 版
字数：218 千字　2014 年 2 月北京第 1 次印刷

定价：23.00 元

读者服务热线：(010)81055410　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

线性代数学习指导与习题解答编写委员会

主　编：孙丹娜　李福乐

副主编：马少军　张洪谦

参　编：黄凯美　辛永训　刘　倩　徐　英　杨　雪
刘振斌　吴　慧　许　洋

前言

本书是《线性代数》(张洪谦主编)的配套教材，是编者多年教学经验的总结。本书不仅适用于高等农业院校，也可作为林、水、医等院校的学生学习《线性代数》的指导书，亦可作为报考农、林、水、医院校的研究生考生的复习参考书。

本书主要包括：一、主要内容，列出了各章的基本概念和常用的重要结论；二、基本要求，指出各章中每一部分内容应该掌握到什么程度，便于读者在复习时能合理分配力量；三、典型方法举例，列举了各种解题方法的典型例题；四、课后习题详解，对《线性代数》的每一章的习题都做了全面详细的解答；五、考研真题选解，为准备考研的学生准备了往年研究生考试线性代数试题，并做了解答，便于学生了解考研题型和难度。总之，本书内容丰富，解答明确，启发性强，只要认真学习，既能巩固所学的理论知识，又能有效地提高运算能力和技巧，还可提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书第一章由孙丹娜、许洋编写，第二章由张洪谦、刘倩编写，第三章由马少军、辛永训编写，第四章由杨雪、黄凯美编写，第五章由吴慧、刘振斌编写，第六章由徐英、李福乐编写。

本书在编写过程中，得到很多同行专家的关心和支持，在此表示衷心感谢。由于水平所限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2013 年 12 月

目录

第一章

行列式

一、主要内容

1. 基本概念

(1) n 阶行列式

设 P 是一个数域，$a_{ij} \in P$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做一个 n 阶行列式，其值定义为：

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}\text{。}$$

(2) n 阶行列式的其他定义形式

① $D = \sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 。

② $D = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 。

(3) 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；M_{ij} 再加上符号 $(-1)^{i+j}$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 。

(4) k 阶子式及其余子式和代数余子式

在一个 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 中，任意选定 k 行 k 列（$1 \leqslant k \leqslant n$），位于这 k 行 k 列交叉位置上的 k^2 个元素，按照原来的相对位置所构成的 k 阶行列式 N 叫做 D 的 k 阶子式；在 D 中去掉 N 所在的行和列剩下的元素按照原来的相对位置所构成的 $n-k$ 阶行列式 M 叫做 N 的余子式。

若 N 位于 D 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列，则把 N 的余子式 M 前边再加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后叫做 N 的代数余子式。

(5) 行列式的转置

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个 n 阶行列式，则称 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 的转置行列式，记作 D^{T} 或 D' 。

2. 主要结论

(1) $D^{\mathrm{T}}=D$ 。

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

若 D 的某行元素全为 0，则 $D=0$。

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(4) 对换行列式两行(列)的位置，行列式改变符号。

① 若 D 的两行(列)元素相同，则 $D=0$。

② 若 D 的两行(列)元素对应成比例，则 $D=0$。

(5) 把行列式的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上去，行列式的值不变。

(6) 设 $D=|a_{ij}|_n$，则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j。\end{cases}$$

(7) 拉普拉斯定理：行列式 D 中任意 k 行(列)元素所包含的所有 k 阶子式和它们的代数余子式的乘积之和等于 D 。

(8) 上(下)三角形行列式的值等于对角线元素之积。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii} 。$$

(9)

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_1 \\ \vdots & \iddots & a_2 & 0 \\ * & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & a_2 & * \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i \text{。}$$

(10) 范德蒙(Vandermonde)行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \text{。}$$

二、基本要求

(1) 理解行列式的概念,掌握行列式的展开式中项的构成和符号。

(2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算具体的数字行列式和简单的 n 阶抽象行列式。

(3) 了解克莱姆法则及其应用。

三、典型方法举例

1. 定义法

例 1 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$。

解: 行列式的元素位于不同行不同列上,所以此行列式的非零项只有一项,即式中非零元素的乘积项,所以只需确定该项的符号,即可得结果。

$D_n = (-1)^{\tau(1,n,n-1,\cdots,2)} n! = (-1)^{0+0+1+2+\cdots+n-2} n! = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$ 。

2. 化三角形法

例 2 求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - 5r_2}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4。$$

例 3 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$。

解： $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & n-1 & 1-n \end{vmatrix}_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}(n-1)! = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)!}{2}。$$

3. 递推法

例 4 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & & & & \\ 1 & 4 & 3 & & & \\ & 1 & 4 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 3 \\ & & & & 1 & 4 \end{vmatrix}$。

解： 按第一行展开，

$D_n = 4D_{n-1} - 3D_{n-2} = (1+3)D_{n-1} - (1\times 3)D_{n-2}$

$D_n - D_{n-1} = 3(D_{n-1} - D_{n-2}) = 3^2(D_{n-2} - D_{n-3}) = \cdots = 3^{n-2}(D_2 - D_1) = 3^n$ (1)

$D_n - 3D_{n-1} = D_{n-1} - 3D_{n-2} = D_{n-2} - 3D_{n-3} = \cdots = D_2 - 3D_1 = 1$(2)

由(1)(2)可得，

$D_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$ 。

推广结论：$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ 。

4. 数学归纳法

例 5 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n。$$

证明： 用数学归纳法证明。

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，

假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立，即

$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$，

则 D_n 按第一列展开：

$$D_n=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}=xD_{n-1}+a_n=\text{右边},$$

所以，对于 n 阶行列式，命题成立。

例 6 用归纳法证明 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}_n=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]$。

证明： 当 $n=2$ 时，$D_2=x^2+a^2=\frac{1}{2}[(x+a)^2+(x-a)^2]$，故 $n=2$ 时，等式成立；

假设当 $n\leqslant k-1$ 时，等式成立，那么，当 $n=k$ 时，

$$D_k=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}_k \xlongequal{c_1+c_n} \begin{vmatrix} x+a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x-a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}_k$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}(x+a)D_{k-1}+(-1)^{k+1}(x-a)\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ x & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & a & a \\ -a & -a & \cdots & x & a \end{vmatrix}_{k-1}。$$

从第一行开始，每一行与后一行换行，将第一行调到最后一行，

$$=(x+a)D_{k-1}+(-1)^{k+1}(x-a)(-1)^{k-2}\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & a & a \\ -a & -a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=(x+a)D_{k-1}+(-1)^{2k-1}(-1)(x-a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & a & a \\ -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=(x+a)D_{k-1}+(x-a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & 0+a \\ -a & x & \cdots & a & 0+a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & a & 0+a \\ -a & -a & \cdots & x & 0+a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a-x+x \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=(x+a)D_{k-1}+(x-a)[(-1)(x+a)D_{k-2}+D_{k-1}]$$

$$=(x+a)\cdot\frac{1}{2}[(x+a)^{k-1}+(x-a)^{k-1}]$$

$$+(x-a)\left\{(-1)(x+a)\cdot\frac{1}{2}[(x+a)^{k-2}+(x-a)^{k-2}]+\frac{1}{2}[(x+a)^{k-1}+(x-a)^{k-1}]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[(x+a)^{k}+(x-a)^{k}]。$$

所以，当 $n=k$ 时，等式也成立。

故由数学归纳法知，对于 n 阶行列式，命题成立。

5. 拆行(列)法

例 7 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$。

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0+(-1) & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0+(-1) & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \\ 0+(-1) & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&3&2&\cdots&2\\0&0&3&\cdots&2\\\cdots&&\cdots&&\\0&0&0&\cdots&3\end{vmatrix}+D_{n-1}=3^{n-1}+D_{n-1}=3^{n-1}+3^{n-2}+D_{n-2}$$

$$=\cdots=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3+D_1=\frac{3^n+1}{2}。$$

6. 利用范德蒙行列式展开式法

例 8　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&&&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$。

解：首先要注意到 D_n 不是范德蒙行列式，因为最后一行不是 $n-1$ 次幂。现作一个辅助的范德蒙行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n&y\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2&y^2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}&y^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}&y^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n&y^n\end{vmatrix}$$

由范德蒙行列式的展开式知 $D_{n+1}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\prod\limits_{k=1}^{n}(y-x_k)$

$=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n]$。

另一方面，如果把 D_{n+1} 按最后一行展开，又有

$D_{n+1}=A_{n+1,n+1}y^n+A_{n,n+1}y^{n-1}+\cdots+A_{1,n+1}$（其中 $A_{i,n+1}$ 为 D_{n+1} 中最后一列各元素的代数余子式），注意 y^{n-1} 的代数余子式恰为所求行列式 D_n 的负值，比较 D_{n+1} 的两个表达式中 y^{n-1} 项的系数得

$$D_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\sum_{k=1}^{n}x_k。$$

四、课后习题详解

习题一

1. 求下列排列的逆序数，并说明奇偶性：

(1) 3 1 2 6 4 5；(2) 2 3 4 1 6 5 7；(3) $n\ (n-1)\ \cdots\ 3\ 2\ 1$。

解：(1) $\tau(3,1,2,6,4,5)=0+1+1+0+1+1=4$,偶排列；

(2) $\tau(2,3,4,1,6,5,7)=0+0+0+3+0+1+0=4$,偶排列；

(3) $\tau(n,n-1,\cdots,3,2,1)=0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

当 $n=4k$，$4k+1$ 时,偶排列；

当 $n=4k+2$, $4k+3$ 时,奇排列。

2. 用定义求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -7 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}$。

解：(1) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -7 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}=(-2)\times(-3)\times 10+1\times(-7)\times 4+4\times 6\times 0$

$-4\times(-3)\times 0-1\times 4\times 10-6\times(-7)\times(-2)=-92$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{4\times(4-1)}{2}}abcd=abcd$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=acb+bac+bac-ccc-bbb-aaa=3abc-a^3-b^3-c^3$；

(4) $\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$。

3. 写出四阶行列式中,所有含因子 $a_{21}a_{32}$ 的项。

解： $(-1)^{\tau(3,1,2,4)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}=a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$,

$(-1)^{\tau(4,1,2,3)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$。

4. 用适当的方法求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a+b+c \\ a^2 & b^2 & c^2 & (a+b+c)^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (a+b+c)^3 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix}$。

解：(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = xy(x+y)+xy(x+y)+xy(x+y)-(x+y)^3-x^3-y^3$

$$= -2(x^3+y^3)\text{；}$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}} 10\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2} 10\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a+b+c \\ a^2 & b^2 & c^2 & (a+b+c)^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (a+b+c)^3 \end{vmatrix} = (a+b+c-a)(a+b+c-b)(a+b+c-c)(c-a)$

$$(c-b)(b-a) = (b^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2-a^2)\text{；}$$

(4) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} 4+3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 4+3(n-1) & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 4+3(n-1) & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 4+3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix}$

$= (3n+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,\cdots n)]{r_i-r_1} (3n+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$= 3n+1$。

5. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 各元素的代数余子式。

解：$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -29$，$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 37$，

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&3&-2\\4&7&1\\0&2&3\end{vmatrix}=-71,\ A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-1&3&2\\4&7&2\\0&2&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&1&-4\\7&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}=21,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0&1&-4\\4&2&1\\0&1&3\end{vmatrix}=-28,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0&2&-4\\4&7&1\\0&2&3\end{vmatrix}=56,\ A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}0&2&1\\4&7&2\\0&2&1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&1&-4\\3&2&-2\\2&1&3\end{vmatrix}=7,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0&1&-4\\-1&2&-2\\0&1&3\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0&2&-4\\-1&3&-2\\0&2&3\end{vmatrix}=14,\ A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}0&2&1\\-1&3&2\\0&2&1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}2&1&-4\\3&2&-2\\7&2&1\end{vmatrix}=-27,\ A_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}0&1&-4\\-1&2&-2\\4&2&1\end{vmatrix}=33,$$

$$A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}0&2&-4\\-1&3&-2\\4&7&1\end{vmatrix}=-62,\ A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}0&2&1\\-1&3&2\\4&7&2\end{vmatrix}=1。$$

6. 用克莱姆法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x_2-x_3+x_4=-3,\\x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4,\\x_1+3x_2+x_4=1,\\-7x_2+3x_3+x_4=-2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=4,\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=6,\\2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7,\\3x_1+x_2+2x_3+11x_4=17。\end{cases}$

解：(1)

$$D=\begin{vmatrix}0&1&-1&1\\1&-2&3&-4\\1&3&0&1\\0&-7&3&1\end{vmatrix}\overset{r_3-r_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}0&1&-1&1\\1&-2&3&-4\\0&5&-3&5\\0&-7&3&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-1&1\\5&-3&5\\-7&3&1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-5r_1\\r_3+7r_1}}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\0&-4&8\end{vmatrix}=-16,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-3&1&-1&1\\4&-2&3&-4\\1&3&0&1\\-2&-7&3&1\end{vmatrix}=124,\ D_2=\begin{vmatrix}0&-3&-1&1\\1&4&3&-4\\1&1&0&1\\0&-2&3&1\end{vmatrix}=-46,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}0&1&-3&1\\1&-2&4&-4\\1&3&1&1\\0&-7&-2&1\end{vmatrix}=-96,\ D_4=\begin{vmatrix}0&1&-1&-3\\1&-2&3&4\\1&3&0&1\\0&-7&3&-2\end{vmatrix}=-2,$$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{31}{4}$ ，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{23}{8}$ ，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=6$ ，$x_4=\dfrac{D_4}{D}=\dfrac{1}{8}$ ；

$$(2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&-5&-3&-7\\0&-2&-1&8\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_3+5r_2\\r_4+2r_2}}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-13&8\\0&0&-5&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-13&8\\-5&14\end{vmatrix}=-142,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}4&1&1&1\\6&2&-1&4\\-7&-3&-1&-5\\17&1&2&11\end{vmatrix}=-142,\ D_2=\begin{vmatrix}1&4&1&1\\1&6&-1&4\\2&-7&-1&-5\\3&17&2&11\end{vmatrix}=-142,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&4&1\\1&2&6&4\\2&-3&-7&-5\\3&1&17&11\end{vmatrix}=-142,\ D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&4\\1&2&-1&6\\2&-3&-1&-7\\3&1&2&17\end{vmatrix}=-142。$$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=1$ ，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=1$ ，$x_4=\dfrac{D_4}{D}=1$。

7. 问 λ 为何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+(\lambda-1)x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2-x_3=0,\\(1-\lambda)x_1-2x_2-4x_3=0\end{cases}$ 有非零解？

解：

$$D=\begin{vmatrix}1&1&\lambda-1\\2&3-\lambda&-1\\1-\lambda&-2&-4\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-(1-\lambda)r_1]{r_2-2r_1}\begin{vmatrix}1&1&\lambda-1\\0&1-\lambda&1-2\lambda\\0&-3+\lambda&\lambda^2-2\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1-\lambda&1-2\lambda\\1&\lambda+1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)\ 。$$

齐次线性方程组有非零解，则 $D=0$，

得 $\lambda=0,\ \lambda=2$ 或 $\lambda=3$，

所以，当 $\lambda=0,\ \lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时，该齐次线性方程组有非零解。

8. 选择 i，j 与 k，使下列九元排列为奇排列。

(1) $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ j\ k\ 9$；　　　　(2) $7\ 1\ 8\ i\ 3\ j\ 2\ 6\ k$ 。

解：(1) 因为排列 $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ j\ k\ 9$ 中缺少 3,6,8，所以 i，j，k 可取 3,6 或 8，保证排列的逆序数为奇数即可。

当 $i=3,\ j=6,\ k=8$ 时，$\tau(1,2,7,4,3,5,6,8,9)=0+0+0+1+2+1+1+0+0=5$，奇排列；

同理可得 $i=6,\ j=8,\ k=3$ 或 $i=8,\ j=3,\ k=6$ 时也为奇排列。

(2) 九元排列 $7\ 1\ 8\ i\ 3\ j\ 2\ 6\ k$ 中缺少 4,5,9，所以 i，j，k 可取 4,5 或 9，保证排列的逆序数为奇数即可。