[美] 莫里斯·克莱因 著

第三册

古今数学思想

上海科学技术出版社

古今数学思想

（第三册）

[美]莫里斯·克莱因 著
邓东皋 张恭庆 等 译

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

古今数学思想. 第 3 册 / (美)克莱因(Kline. M.)著;邓东皋等译. —上海:上海科学技术出版社,2014.1

书名原文:Mathematical thought:from ancient to modern times

ISBN 978-7-5478-1719-3

Ⅰ. ①古… Ⅱ. ①克… ②邓… Ⅲ. ①数学史 Ⅳ. ①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 062749 号

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行
(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

新华书店上海发行所经销
常熟市华顺印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 26
字数:440 千字
2014 年 1 月第 1 版 2014 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5478-1719-3/O·23
定价:58.00 元

《古今数学思想》译者录

第一册(序,第 1 章至第 17 章):

江泽涵(序);张理京(第 1 章至第 10 章,第 13 章,第 14 章);张锦炎(第 11 章,第 12 章);申又枨(第 15 章,第 16 章);朱学贤(第 17 章)

第二册(第 18 章至第 33 章):

朱学贤(第 18 章,第 25 章);钱敏平(第 19 章);邓东皋(第 20 章);丁同仁(第 21 章);刘西垣(第 22 章);叶其孝(第 23 章,第 24 章);庄圻泰(第 26 章,第 27 章);万伟勋(第 28 章至第 30 章);石生明(第 31 章至第 33 章)

第三册(第 34 章至第 51 章):

张顺燕(第 34 章);姜伯驹(第 35 章);孙树本(第 36 章,第 38 章,第 39 章);章学诚(第 37 章);叶其孝(第 40 章);程民德(第 41 章);朱学贤(第 42 章);张恭庆(第 43 章,第 44 章);邓东皋(第 45 章至第 47 章);章学诚(第 48 章);聂灵沼(第 49 章);江泽涵(第 50 章);吴光磊(第 51 章)

翻译说明

很多数学工作者、数学教师和数学爱好者早就希望能有一本比较简明的、阐述一些重要数学思想的来源和发展的书。看到莫里斯·克莱因(Morris Kline)教授写的这本 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (1972),我们感到相当满意,就组织人力把它翻译出来。

这本书内容丰富,全面论述了近代数学大部分分支的历史发展;篇幅不大,简明扼要。正如书名所指出的,本书着重论述数学思想的古往今来,而不是单纯的史料传记,努力说明数学的意义是什么,各门数学之间以及数学和其他自然科学尤其是和力学、物理学的关系是怎样的。本书厚今薄古,主要篇幅是叙述近二三百年的数学发展,着重在19世纪,有些分支写到20世纪30年代或40年代,作者对一些重要数学分支的历史发展,对一些著名数学家的评论,都很有一些独到的见解,并且写得很引人入胜。莫里斯·克莱因教授本人深受格丁根大学数学传统的影响,注意研究数学史和数学教育,是一位著名的应用数学家和数学教育家,因此,他很能体会读者的心情,在书中能通过比较丰富的史料来阐述观点,把科目的历史叙述和内容介绍结合起来。另外,为了方便读者,对许多古代的数学成就或资料都翻译成近代数学的语言,通俗易懂。这些都是本书突出的优点。

当然,本书也有不足之处,例如忽视了我国的数学成就及其对数学发展的影响,这对于论述数学的发展来说,无疑是有片面性的。关于对现代数学高度抽象这一特征的看法,作者是持一定保留态度的,他的这种态度,给本书带来了某种倾向性,我们认为这是可以商榷的。另外,关于数学中的有些问题,在历史上一直是争论不休的,而数学就在这种争论中发展着;作者的一些看法也只是一家之言,还是值得研究的。但是总的看来,本书仍不失为一本难得的好书。*Bulletin of the American Mathematical Society*, 1974, 9, Vol. **80**, No. 5:805~807 的书评文章说:"就数学史而论,这是迄今为止最好的一本。"

参加本书翻译的有张理京、江泽涵、张锦炎、申又枨、朱学贤、钱敏平、邓东皋、丁同仁、刘西垣、叶其孝、庄圻泰、万伟勋、石生明、张顺燕、姜伯驹、孙树本、章学诚、程民德、张恭庆、聂灵沼和吴光磊。本书由张理京、申又枨、江泽涵、冷生明校阅。另外,叶其孝、朱学贤也参加校阅了全书的部分章节,并协同做了许多组织工作。

本书是在1976年初，由北京大学数学系的几位教授与部分教师，主要是申又枨、江泽涵、吴光磊、冷生明等，建议组织翻译的。当时主要目的是便于自己学习。

如今，莫里斯·克莱因教授和多位当年参加翻译的老一辈数学家相继去世，我们深深地怀念他们。原书虽再没有新的版本，但其在国际上的影响仍然很大。为了保证质量，冷生明曾对译稿进行了全面校勘，改正了许多误译和其他差错。在原译本中，数以千计的人名、地名译法都不规范，为纠正这些错误，出版社的几位编辑也花费了大量心血。另外，在本书的出版过程中，吴文俊教授给予很大的关怀与支持，我们表示衷心的感谢！

原书初版时为一卷，后改为三册；中译本也分为三册，且内容保持一致。我们希望本书的翻译出版，能增进读者对数学史和数学本身的了解，对数学的教学改革以及对数学和数学史的研究有所裨益。限于水平，译文一定还有许多不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

邓东皋

2000年3月9日

序

如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

庞加莱(Henri Poincaré)

本书论述从古代一直到20世纪头几十年中的重大数学创造和发展。目的是介绍中心思想，特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的，并且对于促进和形成尔后的数学活动有影响的主流工作。本书所极度关心的还有对数学本身的看法、不同时期中这种看法的改变，以及数学家对于他们自己的成就的理解。

必须把本书看作是历史的一个概述。当人们想到欧拉(Leonhard Euler)的全集满满的约70卷、柯西(Augustin - Louis Cauchy)的26卷、高斯(Carl Friedrich Gauss)的12卷，人们就容易理解只凭本书一卷的篇幅不能给出一个详尽的叙述。本书的一些篇章只提出所涉及的领域中已经创造出来的数学的一些样本，可是我坚信这些样本最具有代表性。再者，为了把注意力始终集中于主要的思想，我引用定理或结果时，常常略去严格准确性所需要的次要条件。本书当然有它的局限性，但我相信它已给出整个历史的一种概貌。

本书的组织着重在居领导地位的数学课题，而不是数学家。数学的每一分支打上了它的奠基者的烙印，并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用。但是，特意叙述的是他们的思想，传记完全是次要的。在这一点上，我遵循帕斯卡(Blaise Pascal)的意见："当我们援引作者时，我们是援引他们的证明，不是援引他们的姓名。"

为使叙述连贯，特别是在1700年以后的时期，对于每一发展要等到它已经成熟，在数学中占重要地位并且产生影响的时候，我才进行论述。例如，我把非欧几里得几何放在19世纪的时期介绍，虽然企图寻找欧几里得平行公理的替代物或证明早在欧几里得(Euclid)时代就开始了并且继续不断。当然，有许多问题会在不同的时期反复提及。

为了不使资料漫无边际，我忽略了几种文化，例如中国的[①]、日本的和玛雅的文化，因为他们的工作对于数学思想的主流没有重大的影响。还有一些数学中的发展，例如概率论和差分演算，它们今天变得重要，但在所考虑的时期中并未起重要作用，从而也只得到很少的注意。这最后的几十年的大发展使我不得不在本书中只收入那些20世纪的，并且在该时期变成有特殊意义的创造。我没有在20世纪时期继续讨论像常微分方程或变分法的扩展，因为这将会需要很专门的资料，而它们只对于这些领域的研究工作者有兴趣，并且将会大大增加本书的篇幅。此外还考虑到，对于许多较新的发展的重要性，目前还不能作客观的估价。数学的历史告诉我们，许多科目曾经激起过很大的热情，并且得到最好的数学家的注意，但终于湮没无闻。我们只需要回忆一下凯莱(Arthur Cayley)的名言"射影几何就是全部几何"，以及西尔维斯特(James Joseph Sylvester)的断言"代数不变量的理论已经总结了数学中的全部精华"。确实，历史给出答案的有趣问题之一便是数学中哪些东西还生存着而未被淘汰？历史做出它自己的而且更可靠的评价。

通过几十项重要发展的即使是基础的叙述，也不能指望读者知道所有这些发展的内容。因此，我在本书中论述某科目的历史时，除去一些极初等的领域外，也说明科目的内容，把科目的历史叙述和内容说明融合起来。对各种数学创造，这些说明也许不能把它们完全讲清楚，但应能使读者对它们的本质得到某些概念。从而在某种程度上，本书也可作为一本从历史角度来讲解的数学入门书。这无疑地是使读者能获得理解和鉴赏的最好的写法之一。

我希望本书对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助。专业的数学家今天不得不把这么多的时间和精力倾注到他的专题上去，使得他没有机会去熟悉他的学科的历史。而实际上，这历史背景是重要的。现在的根深扎在过去，而对于寻求理解"现在之所以成为现在这样子"的人们来说，过去的每一事件都不是无关的。再者，虽然数学大树已经伸张出成百的分支，它毕竟是一个整体，并且有它自己的重大问题和目标。如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献，它们就不会开花结果。我们的被分裂的学科就面临着这种危险；跟这种危险做斗争的最稳妥的办法，也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识，使得能把研究工作导入有成果的渠道。如同希尔伯特(David Hilbert)所说的："数学是一个有机体，它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合。"

对于学数学的学生来说，本书还会另有好处。通常一些课程所介绍的是一些

---

① 中国数学史的一个可喜的叙述，已见于李约瑟(Joseph Needham)的 *Science and Civilization in China*，剑桥大学出版社，1959，卷3，第1～168页。

似乎没有什么关系的数学片断。历史可以提供整个课程的概貌，不仅使课程的内容互相联系，而且使它们跟数学思想的主干也联系起来。

在一个基本方面，通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉。它们给出一个系统的逻辑叙述，使人们有这种印象：数学家们几乎理所当然地从定理到定理，数学家能克服任何困难，并且这些课程完全经过锤炼，已成定局。学生被湮没在成串的定理中，特别是当他正开始学习这些课程的时候。

历史却形成对比。它教导我们，一个科目的发展是由汇集不同方面的成果点滴积累而成的。我们也知道，常常需要几十年甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步。不但这些科目并未锤炼成无缝的天衣，就是那已经取得的成就，也常常只是一个开始，许多缺陷有待填补，或者真正重要的扩展还有待创造。

课本中的斟字酌句的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及在建立一个可观的结构之前，数学家所经历的艰苦漫长的道路。学生一旦认识到这一点，他将不仅获得真知灼见，还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气，并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧。实在说，叙述数学家如何跌跤，如何在迷雾中摸索前进，并且如何零零碎碎地得到他们的成果，应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气。

为了使本书能包罗所涉及的这个大范围，我曾经试着选择最可靠的原始资料。对于微积分以前的时期，像希思(Thomas L. Heath)的《希腊数学史》(*A History of Greek Mathematics*)无可否认地是第二手的资料，可是我并未只依靠这样的一个来源。对于以后时期中的数学发展，通常都能直接查阅原论文；这些都幸而可以从期刊或杰出的数学家的全集中找到。对研究工作的大量报道和概述也帮助了我，其中一些实际上也就在全集里。对于所有的重要结果，我都试着给出出处。但并没有对于所有的断言都这么做；否则将会使引证泛滥，浪费篇幅，而这些篇幅还不如用来充实报道。

每章中的参考书目指出资料来源。如果读者有兴趣，他能从这些来源得到比本书中所说的更多的报道。这些书目中还包括许多不应而且没有作为来源的文献。把它们列在书目中，是因为它们供给额外的报道，或者表达的水平可以对一些读者更有帮助，或者它们比原始资料更易于找到。

在此，我想对我的同事 Martin Burrow, Bruce Chandler, Martin Davis, Donald Ludwig, Wilhelm Magnus, Carlos Moreno, Harold N. Shapiro 和 Marvin Tretkoff 表示谢意，感谢他们回答了大量的问题，阅读了本书的许多章节，提出了许多宝贵的批评意见。我特别感激我的妻子 Helen，她以批评的眼光编辑我的手稿，广泛地核对人名、日期和出处，而且极仔细地阅读尚未分成页的校样并给它们编上页码。Eleanore M. Gross 夫人做了大量的打字工作，对我是一个极

大的帮助。我想对牛津大学出版社的编辑部表示感激,感谢他们细心地印刷了本书。

莫里斯·克莱因(Morris Kline)
纽约 1972 年 5 月

目 录

第 34 章

19 世纪的数论

> 傅里叶确实有过这样的看法，认为数学的主要目的是公众的需要和对自然现象的解释；但是像他这样一个哲学家应当知道，科学的唯一目的是人类精神的光荣，而且应当知道，在这种观点之下，数[论]的问题和关于世界体系的问题具有同等价值。
>
> 雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi)

1. 引　言

直到 19 世纪，数论还只是一系列孤立的结果，虽然这些结果常常是光辉的。一个新的纪元是从高斯(Carl Friedrich Gauss)的《算术探讨》(*Disquisitiones Arithmeticae*)[①]开始的，这部书是他 20 岁时写的。这部伟大的著作曾在 1800 年寄到法国科学院而被拒绝，但高斯自己把它发表了。在这部书中，他把记号标准化了，把现存的定理系统化并推广了，把要研究的问题和攻题的已知方法进行了分类，还引进了新的方法。在高斯关于数论的著作中有三个主要思想：同余的理论、代数数的引进，以及作为丢番图分析的指导思想的型的理论。这部著作不仅是现代数论的开始，而且还确定了直到目前为止有关这一课题的工作方向。《探讨》难读，但狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet)作了解释。

在 19 世纪另一重要的发展是解析数论，它除了应用代数去处理涉及整数的问题外，还用了分析。这一革新的领导人是狄利克雷和黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann)。

2. 同 余 理 论

虽然同余的概念不是从高斯开始的——它出现在欧拉(Leonhard Euler)、拉格

① 发表于 1801 年 = *Werke*, 1。

朗日(Joseph - Louis Lagrange)和勒让德(Adrien - Marie Legendre)的著作中——但是高斯在《探讨》的第一节引进了同余的记号,并在此后系统地应用了它。基本思想是简单的。数 27 以 4 为模同余于 3,

$$27 \equiv 3 \text{ modulo } 4,$$

因为 27－3 恰被 4 整除。(字 modulo 常常简写为 mod。)一般地说,当 a, b 和 m 是整数时,如果 $a-b$ (恰)被 m 整除,或者如果 a 和 b 被 m 除时具有相同的余数,那么

$$a \equiv b \text{ modulo } m.$$

这时就说 b 是 a 的模 m 剩余,或者 a 是 b 的模 m 剩余。正如高斯所指出的,对固定的 a 和 m,以 m 为模的 a 的一切剩余由 $a+km$ 给出,这里 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 。

关于相同模的同余式,在某些范围内能像方程式那样处理。这种同余式可以相加、相减和相乘,也可以求包含未知量的同余式的解。例如,x 的什么值满足

$$2x \equiv 25 \text{ modulo } 12?$$

这个方程没有解,因为 $2x$ 是偶数而 $2x-25$ 是奇数,所以 $2x-25$ 不可能是 12 的倍数。多项式同余式的基本定理已由拉格朗日[①]建立了,高斯在第二节对它重新作了证明。一个 n 次同余式

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Mx + N \equiv 0 \text{ modulo } p$$

不可能有多于 n 个互不同余的根,其中模 p 是素数,它不能整除 A。

在第三节高斯开始处理幂的同余式。在这里他用同余式的术语给了费马小定理一个证明。费马小定理用同余式的术语叙述就是:若 p 是素数而 a 不是 p 的倍数,则

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ modulo } p.$$

这个定理从他对高次同余式,即对

$$x^n \equiv a \text{ modulo } m$$

的研究中推出,这里 a 和 m 是互素的。这个题目被高斯之后的许多人继续研究着。

《探讨》的第四节讨论平方剩余。如果 p 是一个素数,而 a 不是 p 的倍数,并且如果存在一个 x,使得 $x^2 \equiv a \bmod p$, 则 a 是 p 的平方剩余;否则 a 是 p 的平方非剩余。在证明了一些关于二次同余式的次要的定理之后,高斯给出了二次反转定律的第一个严密证明(第 25 章第 4 节)。虽然 1783 年,欧拉在他的《分析短论》(*Opuscula Analytica*)的一篇论文中已经给出了像高斯一样完全的叙述,但是高斯在他的《探讨》的论文第 151 条中说,没有一个人以他那样简单的形式提出过这个定理。他参考了欧拉的其他著作,其中包括《短论》中的别的论文,还参考了勒让德

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24,1768,192 ff., pub. 1770=*Œuvres*, 2,655－726.