首都师范大学
数学教学系列丛书

# 微分几何引论

陈维桓 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

首都师范大学
数学教学系列丛书

# 微分几何引论

Weifen Jihe Yinlun

陈维桓 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是现代微分几何的入门教材。自从20世纪50年代以来，以“内蕴”和“大范围”为特点的现代微分几何为现代数学的研究提供了必不可少的语言、思想和方法。通常认为，关于微分流形的基础理论和联络、黎曼度量等几何结构的课程是数学研究生必修的基础课，对于数学研究生学习和理解现代数学有重要意义。课程的主要内容有：张量和外形式、微分流形、切向量场、光滑张量场和外微分式、李群的初步知识、联络。

本书的前身是陈省身和陈维桓合著的《微分几何讲义》，以及陈维桓编著的《微分流形初步》。作者在北京大学和首都师范大学长期开设有关课程，积累了丰富的教学经验。特别是本书以作者在首都师范大学的教学为基础，在内容取材、概念讲解、例题演示、习题选配方面下了很多工夫，使得全书的内容更加精简，系统更加合理，并且更加适应于微分几何知识在更大范围内的普及。本书从微分流形的基本概念着手，强调每一种数学结构引进的目的和功能，使得每一章节的重点突出，读者也更加容易理解和接受。特别是在书中讲解了多达40道的例题，提供了从理论到习题的范例。本书在介绍了微分流形的基础理论之后，重点放在联络的理论，最后讲解了在现代数学中有广泛应用的Chern示性类，体现了教材内容的先进性。

本书可以作为综合大学、高等师范院校基础数学专业研究生学习现代微分几何的教材，也可以作为应用数学、力学和物理学相关专业的学生和教师的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微分几何引论 / 陈维桓编著．-- 北京：高等教育出版社，2013.12

（首都师范大学数学教学系列丛书）

ISBN 978-7-04-038900-5

Ⅰ．①微… Ⅱ．①陈… Ⅲ．①微分几何－高等学校－教材 Ⅳ．①O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第279865号

策划编辑 蒋 青　责任编辑 蒋 青　特约编辑 张建军　封面设计 李树龙
版式设计 于 婕　责任校对 殷 然　责任印制 朱学忠

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 邮政编码 | 100120 | | http://www.hep.com.cn |
| 印　　刷 | 北京鑫丰华彩印有限公司 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 开　　本 | 787 mm×960 mm 1/16 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　张 | 21.25 | 版　　次 | 2013年12月第1版 |
| 字　　数 | 370千字 | 印　　次 | 2013年12月第1次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定　　价 | 39.80 元 |


物 料 号　38900-00

# 《首都师范大学数学教学系列丛书》编委会

# 序

自 1978 年以来，首都师范大学数学科学学院在提高学科与办学水平的同时，一直很注重教材建设，已经组织出版了多部有一定影响的大学数学教材。本系列丛书中有些是曾经出版过的教材的修订本，也有一些是近年来新编的教材。

随着我国高等教育的快速发展，师资水平不断提高，大学教育也从精英教育发展到今天的普及教育。伴随着这些变化，大学数学教学的内容与体系也在逐步调整。为提高本科与研究生的教学水平，近 10 年，我们注重聘请学术水平高、长期在教学一线耕耘，并且有丰富教学经验的国内外知名教授讲授本科与研究生课程。他们在首都师范大学数学科学学院的教学中，将原来在国内外知名学府的教学经验与现在的教学实践相结合，有的对原来出版的教材进行了修订，有的编写出了新的教学讲义。这些修订的教材和讲义不仅饱含了作者对数学研究的感悟，也凝聚了他们长期、甚至一生对数学教育的理解与经验。为了将这些宝贵的资源保留下来，推动中国的数学教育与人才培养，我们请作者们将修订的教材和讲义编著成书，形成了现在的系列丛书。

希望这套丛书不仅对首都师范大学的人才培养起到推动作用，也对中国的数学人才培养有所帮助。我们也借此机会感谢支持和帮助过首都师范大学数学学科建设与发展的前辈、同行们。我们也希望继续得到您们的支持与帮助，推动首都师范大学的数学学科水平和办学水平迈上新台阶。

李庆忠

2013 年 10 月于首都师范大学

# 序言

微分几何是一门古老的学问, 始于微积分在几何中的应用。L. Euler 和 G. Monge 对微分几何的早期发展作出了重要贡献。使微分几何成为一门独立的学科, 当归功于 C. F. Gauss 关于曲面理论的研究。Gauss 经过复杂的计算发现, 曲面的总曲率只依赖曲面的第一基本形式, 他称之为“绝妙的定理”, 这引出了“内蕴几何”的概念。B. Riemann 在 1854 年所作的“关于几何基础的假设”的著名演讲, 将 Gauss 的“内蕴几何”推广到 $n$ 维流形, 这标志着黎曼几何的诞生。黎曼几何建立在弧长微分的平方 $\mathrm{d}s^2$ 之上, 我们只需要考虑空间的一部分, 只要 $\mathrm{d}s^2$ 有意义, 便可以研究弧长、面积、角度等几何量, 即黎曼几何是一个局部化的几何, 这是一个革命性的观念。

使黎曼几何受到世人重视的是 A. Einstein 的广义相对论。Einstein 把引力现象解释为 4 维时空中黎曼度量的曲率性质, 并取得极大成功, 使黎曼几何受到数学家和物理学家的广泛重视, 微分几何从而有了很大发展。

1870 年 F. Klein 发表了著名的 Erlanger (爱尔兰根) 纲领, 他把几何学建立在变换群的基础上, 有了一个群, 便有一种几何, 研究所有经过这个变换群不变的几何性质。于是射影几何、仿射几何,Möbius 几何等相继发展起来。E. Cartan 结合了 Riemann 和 Klein 的工作, 以联络为主要观念, 把李群与微分几何结合起来, 创立了外微分法, 把活动标架法发扬光大。他的工作对后世具有重大影响。

进入 20 世纪以来, 由于拓扑学、李群理论、大范围分析的进展, 整体微分几何得到突飞猛进的发展, 纤维丛、示性类、指标定理等理论相继出现。陈省身关于纤维丛、示性类的理论是一个光辉的里程碑。现代微分几何与拓扑、分析、代数、理论物理、力学等学科相互渗透, 相互促进, 蓬勃发展, 有无限生命力。纤维丛的联络与规范场论, 辛拓扑与超弦理论等等, 微分几何与理论物理再次携起手来。因此也可以说微分几何还是一个年轻的充满朝气的学科。

几何对象因其直观性可以帮助对抽象理论的理解, 并能激发原创性思维, 因此几何素养的培养是大学和研究生数学教育的一个重要方面。我国在改革开放以前, 微分几何的教学一直比较落后。1980 年陈省身到北京大学开设微分几何课, 参加者除北京大学和中国科学院数学研究生外, 还有全国各地的青年教师。

我有幸聆听了陈先生的课并担任辅导，终身受益。陈先生的讲课笔记后由陈维桓整理成《微分几何讲义》在北京大学出版社出版。陈维桓多次用这个讲义为研究生讲课，积累了丰富的教学经验。以后又根据授课对象的不同，在这基础上改编成了不同的教材，本书就是他在首都师范大学为研究生开设“现代微分几何”课的基础上编写而成的，从选材和数学内容的阐述到例题和习题配置等都下了很多工夫。我相信这本教材对于研究生学习微分几何会有很大帮助，对于微分几何在更大范围内的普及有促进作用。

李安民

2013 年 5 月 7 日，成都

# 前记

自 2006 年以来，我在首都师范大学数学科学学院为研究生开设“现代微分几何”课程。在教学实践中我深切地体会到需要为刚进入数学研究生学习的同学编写一本适用的、关于现代微分几何的教材，它既要能够满足各个数学分支的同学进一步学习现代数学的需要，同时还要具有比较直观、浅显易懂、例题丰富、适应教学需要的特点。本书就是在这样的背景下产生的。

我们知道，现代微分几何是当前数学研究的主流之一，而且它的思想、方法和所创造的众多工具影响和推动了许多数学分支的发展，因此我们需要学习现代微分几何的基础理论，获得进入现代数学殿堂的钥匙，掌握从事现代数学研究的语言。从这个意义上讲，现代微分几何是新的“三高”。这一点也从国内外数学研究生的教学情况得到证实。

请看“现代微分几何”课程在美国和我国的教学情况。

20 世纪 40 年代以前，美国没有几何学家。研究几何的数学家都叫做拓扑学家。陈省身先生 1943 年在美国做的几何工作“关于闭黎曼流形中 Gauss-Bonnet 定理简单的内在证明”震动了美国数学界，数学家纷纷要了解微分流形、纤维丛、外微分等概念。为此，陈省身先生在 1948 年第二次赴美时在普林斯顿的 The Institute for Advanced Study 给出了系列讲座，演讲内容整理成油印讲义 *Topics in Differential Geometry* (1951 年)，其中主要讲解微分流形上同调理论、黎曼流形、主丛和示性类。

陈省身先生加入芝加哥大学数学系之后，讲授微分几何，1953 年出版了油印讲义 *Differentiable Manifolds*。这本讲义成为美国几何教材的经典，培养出美国好几代优秀的几何学家。1960 年陈省身先生迁至伯克利加州大学，使当地的数学系成为几何学和拓扑学的研究中心。此后，芝加哥大学的微分几何课在伯克利加州大学延续，成为课号为 240 的著名课程，半个多世纪来没有改变过，数学系图书馆中油印讲义 *Differentiable Manifolds* 到目前为止仍然是借阅次数最多的书籍之一。与此同时，在美国许多第一流大学的数学系，纷纷追随陈省身先生，相继开设微分几何课，例如 I. M. Singer 在 20 世纪 50 年代开始在麻省理工学院讲授微分几何，成为十分引人注目的事件。这种状况可以通过黎曼几何教科书的出

版情况来印证。

自从 A. Einstein 成功地运用黎曼几何来表述他的广义相对论之后, 黎曼几何受到学术界的广泛注意, 人们需要了解黎曼几何的思想、内容和方法, 因此有两本经典的教科书出版了, 它们是:

L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1926。

É. J. Cartan, Leçons sur le Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris,1925。

前一本书是用张量分析方法叙述的局部黎曼几何学, 内容详尽, 含大量的张量运算。后一本书完全是 Cartan 的风格, 是用法文书写的, 几何直观很多, 但是初读者往往会不得要领。在这两本书中都没有微分流形的理论。能够作为教科书的还有专著

K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953。

其内容已经涉及大范围黎曼几何, 但是主要是通过张量分析的办法进行计算。值得指出的是, 在此后的长时间内没有关于黎曼几何的教科书问世。

直到 20 世纪 60 年代, 在美国各地纷纷开设现代微分几何课的基础上, 现代微分几何教材像雨后春笋般地陆续出版, 例如:

S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962。

L. Auslander and R. E. MacKenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, 1963。(前者是陈省身先生在芝加哥大学的博士生)

H. Flanders, *Differential Forms*, Academic Press, 1963。(Flander 是陈省身先生在芝加哥大学的博士生)

S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, II, Intersciences, 1963, 1969。(Nomizu 是陈省身先生在芝加哥大学的博士生, Kobayashi 是陈省身先生在伯克利加州大学的同事)

R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964。

S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Englewood Cliffs, 1964。

J. N. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand, 1965。

D. Laugwitz, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1965。

I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott Foresman, 1967, 等等。

这些书井喷式地出版都直接或间接地受到陈省身先生的课程的影响, 也反映了现代微分几何走进数学研究主流的事实, 同时奠定了研究生阶段的微分几何课的模式。以后, 现代微分几何的教科书和专著就很多了。

新中国成立以后, 我国的微分几何教学是比较落后的。经典的微分几何课很长时间以来是沿用苏联的教材, 如

拉舍夫斯基, 微分几何教程, 高等教育出版社, 1955 年版。

芬尼可夫, 微分几何, 高等教育出版社, 1957 年版。

波戈列洛夫, 微分几何讲义, 高等教育出版社, 1959 年版。

后来才有我国第一本自己编写的关于经典微分几何的教材:

吴大任, 微分几何讲义, 高等教育出版社, 1959 年版。

以上所有的教材都是关于三维欧氏空间中曲线和曲面的基本理论。至于现代微分几何的书在 1961 年以后才有, 如

苏步青, 现代微分几何概论, 上海科学技术出版社, 1961 年。

据书的前言介绍, 该书是在苏步青教授指导下, 讨论班在阅读 J. Favard, *Cours de Géométrie Différentialle Locale* (局部微分几何教程) 的俄译本的基础上, 吸收了复旦大学在微分几何方面的成果写成的。但是, 这并不是陈省身先生在美国所倡导的现代微分几何课程, 也就是说大范围的、内在的现代微分几何的教学工作当时在我国国内尚未开展。

1961 年中共中央在广州召开有关知识分子的会议之后, 纯粹数学专业学生的培养工作提到日程上来, 在北京大学恢复了几何、拓扑、代数、数论、函数论等专门化方向的教学和研究工作。吴光磊教授长期以来追随陈省身先生的研究工作, 此时开设微分几何专门化课程, 以陈省身先生在芝加哥大学的讲义 *Differentiable Manifolds* 为依据, 从 1962 年开始在北京大学比较系统地讲授现代微分几何, 内容包括: 黎曼几何、微分流形、外微分式和活动标架法、联络论。应该说, 这是在我国首次开设的现代微分几何系列课程。但是, 影响仅及于北京大学几何专门化和拓扑专门化的少数学生。当时我国的不少数学家都不甚了解微分流形和纤维丛的概念, 在改革开放的最初那些日子里 (1978 年前后), 对经典分析比较熟悉的教学主管人员, 只认为硬分析是基本技能, 没有认识到数学概念的提升对于研究现代数学的重要性, 以至于对于学生追随现代数学研究经常口不离微分流形和纤维丛的现象颇有反感, 认为他们是追求时髦, 好高骛远, 误入歧途。

1971 年中美关系解冻, 陈省身先生从 1972 年开始访问国内, 并且在中国科学院数学研究所做了系列演讲, 促进了我国基础理论研究的恢复, 带来了国外数学研究的新信息, 给国内数学界吹进了一股清新的空气。此时, 国内的数学界人士开始认识到我国在现代微分几何知识的普及上与国外相比有非常大的差距, 在

数学研究方面与国际上数学发展的主流脱节, 需要迎头赶上。在陈省身先生多次回国进行学术访问的激励下, 同时在陈省身先生的倡议下, 1975 年吴文俊、吴光磊、张素诚在中国科学院数学研究所开设讲习班, 讲授现代微分几何, 以 Hicks 的 *Notes on Differential Geometry* 为主要参考材料。这是我国数学复兴过程中一个极其重要的事件, 参加讲习班的同志后来都成为改革开放以后我国数学研究的第一批中坚力量。

1980 年 10 月陈省身先生提议的微分几何和微分方程国际会议在北京召开, 在该会议上邀请了一批国际一流的数学家报告现代数学研究主流课题的最新成果, 实际上这是一个为了使我国数学迎头赶上国际潮流的最高水平的讲习班, 同时也提供了我国数学界与国际数学界建立联系的极好机会。为了使双微会议取得成功, 陈省身先生采取了另一个重要的行动, 即在 1980 年 5 月亲自在北京大学开设微分几何课, 参加者除了北京大学、中国科学院数学研究生以外, 还有从全国各地来的数学家。讲课笔记后来整理成《微分几何讲义》于 1983 年在北京大学出版社出版。全国范围的普及现代微分几何知识的工作就是从这里开始的, 这对促进我国数学研究与国际接轨、数学人才的培养起着十分重要的作用。

北京大学数学系从 1984 年开始正式为研究生开设现代微分几何课程, 当时的现代微分几何课称为 "黎曼几何", 分为两个学期, 上学期是微分流形论, 下学期是黎曼几何初步。每次课的学生有 60~70 人, 选课的同学包括一些优秀的本科生。在这种情况下, 从 1990 年起分设 "微分流形" 课和 "黎曼几何引论" 课。"微分流形" 放在本科四年级上, 所用的讲义后来成为由我编写的、教育部研究生办公室推荐的研究生教学用书《微分流形初步》(高等教育出版社, 2001 年第二版); "黎曼几何引论" 作为研究生课, 内容主要是黎曼几何基础知识和大范围黎曼几何, 所用的讲义后来成为由我和李兴校合著的《黎曼几何引论》上册 (北京大学出版社, 2002 年出版)。另外, 在本科二年级下, 或者本科三年级上, 北京大学数学学院还开设 "微分几何" 课, 内容是三维欧氏空间中曲线和曲面的基本理论, 所用教材是由我编写的《微分几何》(北京大学出版社, 2004 年出版), 教学辅导书是《微分几何例题详解和习题汇编》(高等教育出版社, 2010 年出版)。经过多年的实践证明, 这样的课程设置是合适的。

鉴于以上介绍的情况, 要提高我国高等学校数学教学和研究的水平, 将 "现代微分几何" 课程作为数学研究生的基础课是不可缺少的重要环节。本书是进一步普及现代微分几何基础知识的一个尝试和努力, 力求所介绍的内容是现代微分几何的最基本的基础知识, 所采用的叙述方式是简明的、直观的, 证明是详尽的、完整的, 能够为读者提供比较多的例子和例题, 便于初学者掌握要领和弄清楚基本概念。本书不是关于现代微分几何的全面讲解, 更不是现代微分几何前

沿课题的介绍。它的读者对象是现代数学的各个分支的研究生,不只是限于几何方向的研究生。我们希望看到,越来越多的大学数学研究生教学工作能够把“现代微分几何”课程列入教学计划。

本书能够写成和出版,离不开首都师范大学数学科学学院给我提供的长达七年的上课机会。在这里,我非常敬佩李庆忠院长、酒全森副院长的高瞻远瞩和领导魄力,并向一贯支持和关心本课程建设的吴可教授、李克正教授、戎小春教授、方复全教授和于祖焕教授表示感谢。同时,我要向多年来参加我的课程的各位研究生同学表示感谢,他们对本课程的赞赏,以及在课上和课外的提问和质疑是推动本书写作的动力。

本书内容源于我自 2006 年以来在首都师范大学数学科学学院开设研究生基础课程“现代微分几何”的过程中形成的讲义。此外,我还要感谢田刚教授给我提供机会,在位于北京大学的北京国际数学中心开设的研究生数学基础强化班第四期 (2012 年春)、第五期 (2013 年春) 上讲授本书的内容。

本书可以供数学系研究生基础课一个学期的课程使用,作为微分几何课应该从 §1.1 讲到 §6.3。在课时比较紧张的情况下,§6.4 可以供学生自学。由于 §6.4 所用到的概念和方法在前面的各个章节中已经交代过了,因此自学起来应该不会有什么困难,而且实际上这部分内容的自学是对前一阶段学习成果的检验。在我自己的教学实践中,讲到联络时,我往往会布置学生自学陈省身先生的论文 *Vector Bundle with Connection*, 并且要求他们写出读书报告,这一做法常常收到非常好的效果。

限于我本人的能力和水平,本书的缺陷和需要改进的地方肯定是存在的,衷心希望广大读者和专家能不吝指正。

**陈维桓**

**2013 年 5 月于北京大学**

# 目录