奇异摄动丛书 1

奇异摄动导论

张伟江 主编

周明儒 林武忠 倪明康 刘树德 谢峰 仇璘 著

科学出版社

奇异摄动丛书 1

奇异摄动导论

张伟江 主编

周明儒 林武忠 倪明康
刘树德 谢 峰 仇 璘 著

科学出版社
北京

内容简介

本书系统、简要地介绍奇异摄动理论的起源、基本概念、经典方法、主要理论、当代发展和实际应用. 本书内容包括引论、经典摄动方法简介、吉洪诺夫定理和边界层函数法、微分不等式理论和方法、奇异奇摄动问题、快–慢系统的慢流形和鸭解问题、转向点问题、偏微分方程奇异摄动问题和奇异摄动的应用等. 本书为读者提供奇异摄动理论的一个全景概貌和基本线索,使读者可以从宏观的视野，较快、较全面地了解奇异摄动问题研究的基本思想、方法、方向和意义，既为进一步学习打下必要的基础，也为进一步研究指出了方向.

本书可供高等学校数学、物理等专业本科高年级学生、研究生和教师，以及从事自然科学和工程技术的研究人员及实际工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

奇异摄动导论/周明儒等著. —北京：科学出版社，2014. 3
(奇异摄动丛书/张伟江主编)

ISBN 978-7-03-039811-6

Ⅰ. ①奇…　Ⅱ. ①周…　Ⅲ. ①摄动–研究　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 030870 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：钟　洋
责任印制：赵德静 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2014 年 3 月第一次印刷　印张：16 1/4
字数：310 000

定价：79.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《奇异摄动丛书》编委会

《奇异摄动丛书》序言

科学家之所以受到世人的尊敬, 除了因为世人都享受到了科学发明的恩惠之外, 还因为人们对科学家追求真理的执着精神深为感动. 而数学家又更为世人所折服, 能在如此深奥、复杂、抽象的数学天地里遨游着实难能可贵. 抽象的符号、公式、推理和运算已成了当今所有学科不可缺少的内核, 人们在享受各种科学成果时, 同样也在享受内在的数学原理与演绎的恩泽. 奇异摄动理论与应用是数学和工程融合的一个奇葩, 它居然涉足许多无法想象的奇观, 居然处理起人们原来常常忽略却又无法预测的奇特, 于是其名字也另有一词, 为 "奇异摄动"(singular perturbation).

20 世纪 40 年代, 科学先驱钱伟长等已对奇异摄动作了许多研究, 并成功地应用于力学等方面. 20 世纪 50 年代后, 中国出现了一大批专攻奇异摄动理论和应用的学者, 如著名的学者郭永怀, 在空间技术方面作出了巨大贡献, 苏煜城教授留苏回国后开创我国奇异摄动问题的数值计算研究, 美柯朗研究所的美籍华裔丁汝教授在 1980 年间奔波上海、西安、北京, 讲授奇异摄动理论及应用 …… 1979 年, 钱伟长教授发起并组织在上海召开了 "全国第一次奇异摄动讨论会".

可贵的是坚韧. 此后, 虽然起起伏伏, 但是开拓依旧. 2005 年 8 月在上海交通大学、华东师范大学、上海大学、东华大学组织下, 我们又召开了 "全国奇异摄动学术研讨会", 并且一发而不可止. 此后每年都召开全国性学术会议, 汇集国内各方学者研究讨论. 2010 年 6 月在中国数学会、上海教育委员会 E-研究院和上海交通大学支持下, 在上海召开了世界上第一次 "奇异摄动理论及其应用国际学术大会". 国际该方面权威人士 Robert O'Malley(华盛顿大学)、John J H Miller(爱尔兰 Trinity 学院) 等都临会, 并作学术报告.

更可喜的是经学者们努力, 在 2007 年 10 月中国数学会批准成立中国数学会奇异摄动专业委员会, 学术研究与合作的旗帜终于在华夏大地飘起.

难得的是慧眼识英雄. 科学出版社王丽平同志敏锐地觉察到了其中的成就和作用, 将出版奇异摄动丛书一事提到了议事日程, 并立刻得到学者们的赞同. 于是, 就有了一本又一本将呈现于读者的面前的著作.

除了简要介绍一下来历之外, 我更想表达对近七十年来中国学者们在奇异摄动

理论和应用方面所作出巨大贡献的敬意. 中国科技创新与攀登少不了基础理论的支持, 更少不了坚持不懈精神的支撑.

但愿成功!

张伟江博士
中国数学会奇异摄动专业委员会理事长
2011 年 11 月

前　　言

本书作为《奇异摄动丛书》的第一分册, 既是一本学习奇异摄动理论的入门读物, 也是进一步研究奇异摄动理论的引导读物. 本书系统、简要地介绍奇异摄动理论的起源、基本概念、经典方法、主要理论、当代发展和实际应用, 为读者提供奇异摄动理论的一个全景概貌和基本线索, 使读者从宏观的视野, 较快、较全面地了解奇异摄动问题研究的基本思想、方法、方向和意义, 既为读者进一步学习打下必要的基础, 也为读者进一步研究指出方向. 读者可以根据需要或兴趣进一步阅读其他几个专题分册.

本书共分 9 章, 包括引论、经典摄动方法简介、吉洪诺夫定理和边界层函数法、微分不等式理论和方法、奇异奇摄动问题、快–慢系统的慢流形和鸭解问题、转向点问题、偏微分方程奇异摄动问题、奇异摄动的应用. 各章参考文献分别列出, 在本章引用时, 只标明文献序号; 引用其他章的文献时, 增加章号, 如 [1.7] 表示第 1 章的文献 7.

本书由我国研究奇异摄动理论的老中青学者通力合作而成, 张伟江 (上海交通大学) 主编. 周明儒 (江苏师范大学) 负责第 1 章和第 2 章前 6 节; 林武忠、倪明康 (华东师范大学) 负责第 3 章和第 5 章; 刘树德 (安徽师范大学) 负责第 4, 7, 8 章和 2.7 节; 谢峰 (东华大学) 负责第 6 章; 仇璘 (上海交通大学) 负责第 9 章. 最后由周明儒统稿. 莫嘉琪、陈贤峰为本书的编写做了大量工作, 作出宝贵贡献.

衷心感谢中国数学会奇异摄动专业委员会对本书编写和出版的指导、帮助. 衷心感谢科学出版社和王丽平编辑对本书编写、出版的大力支持.

作　者

2012 年 7 月 6 日

目　　录

第 1 章　引　　论

本章介绍摄动理论的起源和奇异摄动理论的一些最基本的概念.

1.1　摄动理论溯源

1.1.1　常微分方程发展历程的简要回顾

常微分方程伴随着微积分的创立和解决力学、物理学、天文学等提出的实际问题的需求而诞生, 其发展历程大体上可分为两个时期[1−4].

1. 古典时期 (17 世纪 70 年代 —19 世纪 70 年代)

古典时期特征是致力于利用初等函数及其积分寻求微分方程的通解 (精确解). 在这期间, 数学家们还运用幂级数和广义幂级数求出了一些二阶线性方程的级数解, 得到了一些十分重要的特殊函数.

1841 年, Liouville 证明了 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}$$

仅当 α 是整数时才有一个初等解; 19 世纪 70 年代, Sophus Lie 利用单参数连续变换群和他引入的无穷小变换, 进一步证明了只有极少数方程的解能用初等函数积分式表达, 从而宣告了微分方程古典研究时期的终结.

2. 近现代时期 (19 世纪 80 年代至今)

近现代时期对微分方程的研究在两种途径上迅速发展.

(1) 理论方面 —— 定性理论迅速发展, 即不具体求解, 而给出所研究问题的解的性质如存在性、唯一性、稳定性等的判据.

微分方程定性理论的先驱是法国数学家柯西 (Cauchy, 1789—1857), 他指出: 在求显式解无效的场合常常可以证明解的存在性. 19 世纪 20 年代他成功地对方程 $y' = f(x, y)$ 的初值问题建立了解的存在唯一性定理. 1876 年, Lipschitz 减弱了柯西定理的条件, 此后 Peano 在更一般的条件下证明了柯西问题解的存在性.

常微分方程定性理论标志性的工作有:

1881~1886 年, 法国数学家庞加莱 (Poincaré, 1854—1912) 发表了题为《微分方程所确定的曲线》的系列论文, 开创了微分方程定性理论的研究;

俄国数学家李雅普诺夫 (Ляпунов, 1857—1918) 在 1882~1892 年完成了博士论文《运动稳定性的一般问题》和一些附加文献, 开创了微分方程稳定性理论的研究;

美国数学家伯克霍夫 (Birkhoff, 1884—1944) 于 1912~1927 年完成《动力系统》一书, 定性理论研究进入新阶段.

20 世纪 60 年代以来, 分支 (bifurcation) 理论研究迅速发展, 混沌 (chaos) 动力学异军突起, 拓扑动力系统、微分动力系统、复动力系统、Hamilton 动力系统、随机动力系统等取得了重大成果.

(2) 求解方面 —— 近似解法与数值解法迅速发展.

从实际问题归结出来的数学模型, 常常是非线性、高阶、变系数的微分方程, 并且附以非线性的边界条件或初始条件, 有些问题的边界形状相当复杂, 或者是不定的 (自由边界), 这些问题多数求不出精确解; 有的虽然能够求到精确解, 但对于数学上或物理上的解释, 或对数值上的估算却可能是无用的, 因为方程本身只是实际问题的近似描摹, 求其精确解未必比求其近似解更有意义; 而有时求得的精确解则因其表达式太繁杂而不便应用 (如本书例 2.2.2 中初值问题 (2.2.21)—(2.2.19) 的解式 (2.2.22)). 因此, 人们转而寻求问题的近似解或数值解, 或者二者结合的形式.

微分方程的数值解法已发展成为计算数学的一个重要分支; 而近似解法, 其中最有效的一种就是**摄动方法**, 又称**渐近方法**, 它是一种半解析半数值的方法.

1.1.2 摄动方法及理论的起源与发展

摄动方法及理论产生于数学家和天文学家对天体运动三体问题的研究. 牛顿 (Newton, 1642—1727) 在其名著《自然哲学的数学原理》中, 研究月球绕地球的运动得到椭圆轨道后, 考虑了月球轨道的变值, 算出太阳对它的影响[2]. 高斯 (Gauss, 1777—1855) 在其 "科学日记"(*Notizen Journal*) 中记录了他在 1796 年 3 月 30 日到 1814 年 7 月 9 日期间的 146 条新发现或定理的证明, 其中就有他关于摄动理论的基础性贡献. 1801 年高斯在计算谷神星 (Ceres) 轨道时, 用了自己在超几何级数及算术–几何平均方面的研究成果; 在计算小行星 Pallas 的轨道时, 从理论上研究了扰动对一般星球轨道的影响, 特别是提出了一种分析摄动问题的具体模型, 据此计算星体间的相互影响, 探讨了星球间永年扰动 (secular pertubation) 的问题[5]. 19 世纪末期, 天文学家 Lindstedt(1882)、Bohlin(1889)、Gylden(1893) 等, 利用小参数的幂级数来研究行星的运行问题, 这些幂级数虽然是发散的, 但却正确地描述了客观现象. 1892 年, Poincaré 指出了这种级数是渐近级数, 从而为这种 "小参数法" 奠定了理论基础.

此后, 在流体力学、空气动力学、电动力学、量子力学、非线性振动等领域, 人们又创立了一系列摄动方法 (详见第 2 章). 20 世纪 70 年代以来, 微分不等式理论、

边界层理论、几何奇摄动理论等迅速发展, 成为研究和解决摄动问题的新的强大武器. 关于偏微分方程、泛函微分方程等领域的奇异摄动问题的研究也有了广泛深入的开展.

应当指出的是, 虽然 20 世纪以来, 电子计算机和数值计算方法取得了巨大的发展, 但这并没有削弱摄动方法的重要性. 数值计算与渐近方法不是相互排斥而是相互补充的. 因为, 数值解法虽有许多优点, 但它给出的是离散的数值, 不便进行分析比较, 不容易看出该现象的内在规律; 而且, 由于难免的计算误差, 完全以数值解作为论据进行理论分析也未必可靠.

摄动方法的优点是能够得到简单而比较理想的近似解, 且可用来对所考虑的问题作定性的和近似定量的讨论, 容易看出实际问题中出现的参数对解的影响, 有助于弄清解的解析结构.

渐近方法与数值方法二者是互相补充、密切相关的. 例如, 在许多情况下渐近近似的表达式就可用来作为数值计算的零次近似. 此外, 数值方法理论中最重要的方面之一是研究该方法所得到方程的渐近性质. 例如, 利用差分方法求微分方程数值解, 采用某一差分格式时, 必须肯定由此得到的差分方程组的解当步长充分小时的确接近于原来微分方程的解; 又如, 对不适定问题进行正则化时, 也得到一个含有正则化小参数的辅助方程, 因此需要建立该辅助方程的解与原问题的解的近似性.

1.2　正则摄动与奇异摄动

通常称含小参数 ε(或大参数) 的定解问题

$$P_\varepsilon:\begin{cases} L_\varepsilon[u_\varepsilon]=f(x,\varepsilon), & x\in\Omega,\\ B_{\varepsilon,j}[u_\varepsilon]=\varphi_j(x,\varepsilon), & j=0,1,\cdots,k,x\in\partial\Omega\end{cases}$$

为**摄动问题 (扰动问题)**, 其中 $0<\varepsilon\ll 1$, $L_\varepsilon\equiv L_0+\varepsilon L_{1\varepsilon}$ 是含小参数 ε 的微分算子, $B_{\varepsilon,j}$ 是定义在 $\partial\Omega$(或 $\partial\Omega$ 的一部分) 上的微分算子.

令 $\varepsilon=0$, 得**退化问题**

$$P_0:\begin{cases} L_0[u_0]=f(x,0), & x\in\Omega,\\ B_{0,j}[u_0]=\varphi_j(x,0), & j=0,1,\cdots,l,\ l\leqslant k,x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

人们自然会问: 摄动问题 P_ε 的解 (**摄动解**)$u_\varepsilon(x)$ 与退化问题 P_0 的解 (**退化解**)$u_0(x)$ 之间有没有关系?

首先, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, $u_\varepsilon(x)$ 是否趋向于 $u_0(x)$?

其次, 在某种意义的模 $\|\cdot\|$ 下, 是否有 $\|u_\varepsilon(x)-u_0(x)\| \leqslant O(\varepsilon^n)$? 其中 n 是某个正数; 或者是否存在某个修正函数 $v(x)$, 使得 $\|u_\varepsilon(x)-u_0(x)-v(x)\| \leqslant O(\varepsilon^n)$?

再次, 如果估计式 $\|u_\varepsilon(x)-u_0(x)-v(x)\| \leqslant O(\varepsilon^n)$ 成立, 那么此式是当 $x \in \Omega$ 时一致成立, 还是仅在 Ω 的某个子区域内成立?

如果当 $\varepsilon \to 0$ 时, 对于 $x \in \Omega$ 有 $u_\varepsilon(x) \to u_0(x)$, 则称该问题是**正则摄动**, 否则称为**奇异摄动**, 通常也可简称为**奇摄动**.

估计式 $\|u_\varepsilon(x)-u_0(x)\| \leqslant O(\varepsilon^n)$ 常常是不成立的. 所谓**摄动方法**, 通常理解为是构造恰当的**修正函数**$v(x)$, 使得估计式 $\|u_\varepsilon(x)-u_0(x)-v(x)\| \leqslant O(\varepsilon^n)$ 在 $x \in \Omega$ 内一致有效的方法.

注 1.2.1 在有的文献 [6] 中定义: 当摄动系统 P_ε 所需定解条件的个数 k 多于退化系统 P_0 所需定解条件的个数 l 时, 则称 P_ε 为**奇异摄动**的.

例 1.2.1 初值问题

$$P_\varepsilon: y'+y=\varepsilon y^2, \quad y(0)=1$$

有解

$$y(x,\varepsilon)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-(1-\mathrm{e}^{-x})\varepsilon}.$$

退化问题 $P_0: y'+y=0$, $y(0)=1$ 的解为 $y(x,0)=\mathrm{e}^{-x}$. 显然, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $y(x,\varepsilon) \to y(x,0)$, 故问题 P_ε 是正则摄动.

例 1.2.2 边值问题

$$\varepsilon y'+y=1, \quad y(0)=1$$

的解是 $y=1$; 相应的退化问题 $y=1$, $y(0)=1$ 的解也是 $y=1$. 该问题为正则摄动.

例 1.2.3 边值问题

$$\varepsilon y'+xy=1, \quad y(0)=1$$

有解

$$y_\varepsilon(x)=\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2\varepsilon}x^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\varepsilon}x^2},$$

而退化方程 $xy=1$ 的解 $y=x^{-1}$ 无法满足条件 $y(0)=1$. 该摄动问题属于奇异摄动.

例 1.2.4 二阶椭圆型方程的 Dirichlet 问题

$$P_\varepsilon:\begin{cases}\varphi_{xx}+\varepsilon\varphi_{yy}-\varphi_y=0, & 0<x,y<1,\\ \varphi(0,y)=f_1(y), & \varphi(1,y)=f_2(y),\\ \varphi(x,0)=g_1(x), & \varphi(x,1)=g_2(x),\end{cases}$$

当 $\varepsilon>0$ 时存在唯一的解, 但当 $\varepsilon=0$ 时, 方程成为抛物型方程 $\varphi_{xx}-\varphi_y=0$, 它一般无法满足 4 个边界条件, 只能满足 3 个边界条件. 故该问题属于奇异摄动.

1.3　渐近序列与渐近级数

1.3.1　渐近序列

设有函数序列 $\{\varphi_n(x)\}, n=1,2,\cdots$, 如果满足条件

$$\lim_{x\to x_0}\varphi_n(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}=0,$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $x\to x_0$ 时的一个渐近序列. 例如, 整幂函数序列 $\{(x-x_0)^n\}$.

特别地, 如果当 $\varepsilon\to 0$ 时, 有 $\delta_n(\varepsilon)\to 0$, 且 $\delta_{n+1}(\varepsilon)=o(\delta_n(\varepsilon))$, 则 $\{\delta_n(\varepsilon)\}$ 是 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近序列. 例如, 标准函数序列 $\{\varepsilon^n\}$.

1.3.2　渐近展开式

设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $x\to x_0$ 时的渐近序列, 对于函数 $f(x)$, 如果可以找到一组常数 $\{a_n\}, n=1,2,\cdots$ 使得对于任意给定的正整数 N 均有

$$f(x)=f_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n(x)+R_N(x) \tag{1.3.1}$$

成立, 其中余项

$$R_N(x)=O(\varphi_{N+1}(x))=o(\varphi_N(x)),\quad x\to x_0, \tag{1.3.2}$$

则称

$$f_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n(x) \tag{1.3.3}$$

是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的 N **阶渐近近似式**, 或 $N+1$ **次渐近近似式**. 而称

$$f_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \tag{1.3.4}$$

为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**渐近展开式**, 记作

$$f(x)\sim f_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),\quad x\to x_0. \tag{1.3.5}$$

如果余项 $R_N(x)=O(\varphi_{N+1}(x))$ 对 $x\in\Omega$ 一致地成立, 则称式 (1.4.5) 为 $f(x)$ 在域 Ω 内的**一致有效的渐近展开式**.

应当注意的是, 渐近近似是对特定的 $x\to x_0$ 而言的, 不是对 $n\to\infty$ 而言的. 在渐近近似式 (1.4.3) 中, N 是一个取定的数.