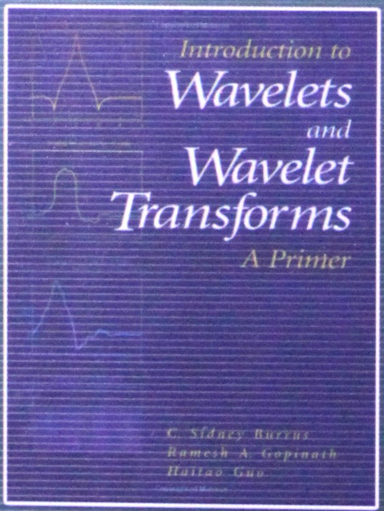
国 外 电 子 与 通 信 教 材 系 列

PEARSON

小波与小波变换导论

Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer



C. Sidney Burrus
[美] Ramesh A. Gopinath 著
Haitao Guo

芮国胜 程正兴 王 文 译

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

http://www.phei.com.cn

国外电子与通信教材系列

小波与小波变换导论

Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer

C. Sidney Burrus
［美］ Ramesh A. Gopinath 著
Haitao Guo

芮国胜 程正兴 王 文 译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书是一本介绍小波与小波变换的基础教材，书中以傅里叶方法为基础，讨论了尺度函数和小波构造的多种方法，综合了数学和信号处理文献中与小波变换相关的内容. 另外，本书还包含对基本多分辨小波系统的新的推广，例如 M 带小波系统、双正交小波系统、小波包、提升算法、多小波、平移不变冗余小波变换等. 在应用方面，本书简述了基于小波的信号处理、离散小波变换的非线性滤波或去噪、小波信号和图像压缩等.

本书可作为高等院校高年级本科生和研究生的教材，适用于信号处理、无线电通信、计算机科学和应用数学等专业，也可供相关领域的研究人员和从业人员阅读与参考.

图书在版编目（CIP）数据

小波与小波变换导论/（美）伯勒斯（Burrus, C.S.）等著；芮国胜，程正兴，王文译.

北京：电子工业出版社，2013.9

（国外电子与通信教材系列）

书名原文：Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer

ISBN 978-7-121-21319-9

Ⅰ. ①小…　Ⅱ. ①伯…　②芮…　③程…　④王…　Ⅲ. ①小波理论－高等学校－教材　Ⅳ. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 199088 号

策划编辑：谭海平

责任编辑：冯小贝

印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司

装　　订：三河市鑫金马印装有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036

开　　本：787×1092　1/16　印张：15　字数：384 千字

印　　次：2013 年 9 月第 1 次印刷

定　　价：45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

译 者 序

小波分析是 20 世纪 80 年代中期基于 Y. Meyer、S. Mallat 及 I. Daubechies 等人的奠基性工作而迅速发展起来的一门新兴学科，它是调和分析发展的划时代产物. 小波分析在理论上的发展和完善与实际应用紧密地联系在一起. 虽然小波分析已经经过了 20 多年的发展，但它的理论研究，尤其是与应用紧密结合的相关理论和算法的研究远没有完善，有许多基本的问题还没有解决. 在小波的应用上，虽然并不缺少好的典范，但应用的普及和对问题的深入解决，是随着小波分析理论与算法的进一步发展而发展起来的，而许多实际问题的解决过程本身就推动了小波分析理论的发展.

与傅里叶变换的频域分析方法不同，小波分析是一种时-频分析方法，它的时-频窗在高频时自动变窄变高，在低频时又自动变宽变低，具有自动“聚焦”功能，所以又把小波称为“数学显微镜”. 进而，小波分析的多分辨分析方法是一种分离信号分量的好方法，它比大多数分析、处理和压缩信号的其他方法更为优越.

本书采用与傅里叶变换和傅里叶级数相对比的方法，引入连续小波变换和小波级数；阐述了尺度函数和小波构造的多种方法；讨论了小波变换计算与数字信号处理的滤波器组理论之间的联系和等价性；对于小波的推广的多种形式，例如 M 带小波系统、小波包、双正交小波系统、提升算法、多小波、平移不变冗余小波变换、离散多分辨分析和离散时间小波变换等，进行了比较简单但有效的叙述. 在应用方面，本书简述了基于小波的信号处理；使用离散小波变换逼近快速傅里叶变换；离散小波变换的非线性滤波或去噪；小波统计估计；小波信号和图像压缩；小波在偏微分方程的数值解、地震和地球物理信号处理、医学和生物医学信号处理、图像处理、通信、分形等方面的应用. 本书注重叙述的连贯性，不拘泥于理论的证明，而且对于需要进一步了解相关内容的读者，提供了相应的参考文献.

本书采用工程师、科学家和应用数学研究人员都容易接受的一种方式来阐述小波分析，作者既把小波分析作为一种理论途径，又把它作为一种有效解决问题的实用方法. 本书适用于有一定技术背景、想了解和学习小波分析的理工科研究生与科学技术人员，尤其适合具备一些数字信号处理知识的读者阅读. 对于应用数学、计算数学领域从事小波分析的研究者和使用者来说，了解和使用本书中叙述的方法对于小波分析的具体应用也是很有帮助的.

由于译者水平有限，书中不妥与误译之处在所难免，希望广大读者和同行批评指正.

前　　言①

本书讨论小波的基本思想及其特性，说明如何将小波作为信号处理、数值分析和数学建模的分析工具. 书中采用工程师、科学家和应用数学研究人员都容易接受的一种阐述方式，既把小波分析作为一种理论途径，又把它作为一种有效解决问题的实用方法. 虽然这门学科的起源可以上溯到一个世纪前，但重新引起人们的兴趣并且有所进展仅有三十多年的光景.

小波方面早期的研究工作是由 Morlet、Grossmann、Meyer、Mallat 等人在 20 世纪 80 年代完成的，但是直到 1988 年，Ingrid Daubechies［Dau88a］的论文才在信号处理、统计学和数值分析等多个应用数学领域引起了人们更多的关注. 许多早期工作是在法国［CGT89，Mey92a］和美国［Dau88a，RBC*92，Dau92，RV91］开展的. 与许多新兴学科一样，开创工作同某个特殊应用或传统的理论框架有着紧密的联系. 本书中，我们将考察从实际应用中抽象出来和从其自身研究中发展出来的理论，并且讨论这种理论同其他相关理论的关系. 作者在信号处理方面的兴趣点和工作背景无疑会影响本书的阐述方式.

小波研究的目标是创建一族基函数（或广义的展开函数）和变换，用以对某个函数或信号给出丰富、有效和有用的描述. 如果信号表示成时间的函数，小波则在时间和频率（或尺度）两方面提供有效的局部化. 小波的另外一个中心思想是多分辨，即信号的分解是按照不同分辨率的细节一层一层进行的.

对于傅里叶级数，选择正弦函数作为基函数，然后考察得到的展开式的性质. 对于小波分析，首先提出想要的性质，然后推导出基函数. 小波基函数所具备的一个重要性质就是能提供多分辨分析. 出于多种原因，通常要求基函数是正交的. 有许多相关技术都可以达到此目标，包括傅里叶变换、短时傅里叶变换、离散傅里叶变换、维格纳分布、滤波器组、子带编码，以及由此扩展产生的其他信号展开和处理方法.

对于数学家、科学家和工程师而言，基于小波的分析是一种令人兴奋的新工具. 它天生就能与数字计算机密切配合，因为其基函数是靠求和而不是求积分或求导数得到的. 与大多数传统的分析系统不同，小波分析的基函数不是微分方程的解. 在一些领域，它是多年来第一个真正意义上的新工具. 确实，使用小波和小波变换时，需要采纳一些新观点和新方法，这与我们通常使用的方法不太一样.

近年来，Donoho、Johnstone、Coifman 等人的工作为小波分析为何有如此广泛的应用和如此强大的功能增添了新的理论依据，而且对当前的工作进行了归纳. 他们证明了小波系统具有一些固有的普适优势，而且对于许多问题而言是近似最优的［Don93b］. 他们还证明了自适应工具可以用于创建适用于某些信号和信号类的特定小波系统.

多分辨分解可看做是一种分离信号分量的方法，它比大多数其他分析、处理和压缩信号的方法更为优越. 由于离散小波变换可以把信号分解为不同尺度下的信号，而且非常灵活，所以 Burke 把小波称为“数学显微镜”［Bur94，Hub96］. 正是因为小波这种强有力和灵活的分解，为信号的检测、滤波和压缩提供了新的线性和非线性处理方法［Don93b，Don95，

① 书中的一些图示、符号、字体沿用了本书英文原版的写作风格，特此说明。

成功. 此外还要感谢 W. M. Lawton、R. O. Wells, Jr.、R. G. Baraniuk、J. E. Odegard、I. W. Selesnick、M. Lang、J. Tian 和莱斯大学计算数学实验室的各位成员，本书介绍的很多思想与结果是他们提出的. 第一署名的作者还要感谢Maxfield和Oshman一家的无私支持. 莱斯大学 EE-531 和 EE-696 班的学生们提供了极有价值的反馈，他们是 Bruce Francis、Strela Vasily、Hans Schüssler、Peter Steffen、Gary Sitton、Jim Lewis、Yves Angel、Curt Michel、J. H. Husoy、Kjersti Engan、Ken Castleman、Jeff Trinkle、Katherine Jones. 与此有关的还有莱斯大学和其他地方的同事.

我们还要特别感谢 Tom Robbins 及其 Prentice Hall 的同事们的支持与帮助，他们的评审意见使本书的内容大为充实.

我们乐于获取读者发现的书中的任何错误或使人误解的论述，真诚欢迎对本书提出任何改进意见. 各种建议和评论可通过电子邮件发至 csb @ rice. edu. 涉及本书的软件、文章、勘误及有关莱斯大学小波研究工作的其他信息，可以从网站 http://www.dsp.rice.edu/和链接的正在展开小波研究的其他网站上找到.

C. Sidney Burrus, Houston, Texas
Ramesh A. Gopinath, Yorktown Heights, New York
Haitao Guo, Sunnyvale, California

阅读指南

尽管本书是按照循序渐进的方式安排章节内容的，但读者也可有选择地阅读. 依据读者的基础，可先浏览全书，然后有重点地细读某章. 第 1 章和最后一章应当仔细地阅读，以求对小波理论有一个总体的掌握. 附录中的 MATLAB 程序和小波工具箱或者其他小波软件应当在实践中尽量多用. 证明或书中的一些细节可在参考文献中找到，研究方向或者应用方面的情况也可从参考文献中发现. 小波理论及其应用还在蓬勃发展之中，我们希望通过阅读本书能为读者开启一扇通往绚丽未来的大门.

Don93a，Sai94b，WTWB97，Guo97］. 同时，这还可以用来作为鲁棒数值算法的基础.

读者将看到它与数字信号处理中的滤波器组理论之间有一种有趣的联系和等价性［Vai92，AH92］. 其实，使用滤波器组得到的一些结果与使用离散小波得到的结果是相同的，并且已在信号处理界由 Vetterli、Vaidyanathan、Smith 和 Barnwell 等人的研究得到. 滤波器组及计算小波变换的大多数算法，是更为一般的多速率系统和时变系统的组成部分.

对于那些具有一定技术背景但对小波知之甚少或者全然不知的人而言，本书可作为一本自学辅导教材或入门教材. 假定读者具备傅里叶级数和傅里叶变换、线性代数和矩阵论的知识，并达到工学、理学或应用数学学士的同等水平. 掌握一些信号处理知识对阅读本书是有帮助的，但并非是必需的. 本书借助于一维信号处理［RV91］——作为时间的实函数或复函数模型展开讨论，但在图像表示和处理中，使用二维、三维甚至四维处理被证明更有效［SA92，Mal89a］. 随着对小波理论与应用的研究越来越深入，矢量空间的使用就显得很自然了. 具有这个领域的一些背景知识是有益的，不过也可以在需要的时候补充学习. 使用一些小波软件系统运行实例和进行实验对于小波的学习是大有裨益的. 书后附有 MATLAB 程序，这些程序在我们的网站[①]（写在前言的后面）上也能找到. 其他几种软件系统将在第 10 章介绍.

介绍小波理论有几种不同的方式. 我们从连续时间信号或函数表示为级数展开式出发，这与傅里叶分析中所用的傅里叶级数类似. 由这种级数表示，可以转移到离散变量（例如，一个信号的抽样）函数的展开和高效计算及表示展开系数的滤波器组理论. 这种情况类似于离散傅里叶变换（DFT）及其高效实现方法——快速傅里叶变换（FFT）. 还可以由这种级数展开得到一种积分变换——连续小波变换，这类似于傅里叶变换或傅里叶积分. 我们认为从级数展开出发可以充分领悟小波理论，而且很容易看清小波分析与傅里叶分析之间的异同.

本书分为若干相对自成体系的章节. 前面几章对离散小波变换（DWT）进行了非常全面的讨论，这种变换把一个信号展开为一系列的小波和尺度函数. 后面几章简述离散小波变换的推广和应用. 由于引用了许多其他著作，所以本书可以作为一种有注解的参考文献. 因为本书旨在作为小波分析的导论，而在这个领域已经积累了大量的文献，所以我们在书后附上一个很长的文献目录. 然而，这个目录很快就会变得不够全面，因为有大量不断发表的论文. 无论如何，对于作为导论这一目标而言，提供一个文献指南是非常重要的.

美国科学院出版了一本书，书中由 Barbara Burke 撰写的一章［Bur94］对小波分析原理及其发展的历史进行了很好的概述. Burke 还撰写了此章的精彩扩充版本［Hub96］，这是任何对小波理论感兴趣的人都应该阅读的. Daubechies 在［Dau96］中对早期的研究工作给出了简要的介绍.

本书描述的很多结果和关系是以定理、证明或推论的形式给出的. 我们把重点放在定理陈述的正确性方面，而对定理的证明往往只给出推导的轮廓，其目的在于理解结论而非冗长的证明过程. 事实上，为了不致使阐述凌乱，我们把很多推导放在附录中. 希望这种方式有助于读者深入理解这个非常有趣但有时又有些费解的数学工具.

我们在书中采用的记号兼有信号处理文献和数学文献所用的记号，希望这样做能使想法与结果更易于理解，但这会丧失一些一致性和严谨性.

作者感谢 AFOSR、ARPA、NSF、Nortel 公司、德州仪器公司和 Aware 公司所提供的支持. 特别感谢 H. L. Resnikoff，最初是他把我们领入小波领域，并准确地预见到小波的能力和

① 或登录华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）注册下载。

目　　录

第 1 章　小波导引 ······ 1

1.1　小波和小波展开系统 ······ 1
1.2　离散小波变换 ······ 6
1.3　离散时间小波变换和连续小波变换 ······ 7
1.4　练习和实验 ······ 7
1.5　本章小结 ······ 8

第 2 章　小波系统的多分辨阐述 ······ 9

2.1　信号空间 ······ 9
2.2　尺度函数 ······ 10
2.3　小波函数 ······ 12
2.4　离散小波变换 ······ 14
2.5　帕塞瓦尔定理 ······ 15
2.6　离散小波变换和小波展开的显示 ······ 16
2.7　小波展开的例子 ······ 17
2.8　哈尔小波系统的例子 ······ 22

第 3 章　滤波器组与离散小波变换 ······ 26

3.1　分析——由细尺度到粗尺度 ······ 26
3.2　综合——由粗尺度到细尺度 ······ 29
3.3　输入系数 ······ 30
3.4　网格和提升 ······ 31
3.5　不同的观点 ······ 31

第 4 章　基、正交基、双正交基、框架、紧框架和无约束基 ······ 34

4.1　基、正交基和双正交基 ······ 34
4.2　框架和紧框架 ······ 37
4.3　有约束基和无约束基 ······ 40

第 5 章　尺度函数与尺度系数、小波与小波系数 ······ 42

5.1　工具与定义 ······ 42
5.2　必要条件 ······ 44
5.3　频域必要条件 ······ 46
5.4　充分条件 ······ 47
5.5　小波 ······ 49
5.6　其他的规范化 ······ 50

5.7 尺度函数和小波的例子 50
5.8 尺度函数与小波的重要性质 53
5.9 尺度系数的参数化 55
5.10 计算基本的尺度函数和小波 58

第 6 章 正则性、矩和小波系统设计 63

6.1 K 正则尺度滤波器 63
6.2 小波消失矩 65
6.3 小波零矩设计的 Daubechies 方法 66
6.4 非最大正则性小波设计 71
6.5 小波零矩与光滑性的关系 72
6.6 尺度函数的消失矩 74
6.7 使用尺度函数投影逼近信号 74
6.8 利用信号的抽样逼近尺度系数 75
6.9 Coiflet 和相关的小波系统 77
6.10 矩的极小化而不是零矩 84

第 7 章 基本多分辨小波系统的推广 85

7.1 花砖时-频或时间-尺度平面 85
7.2 重数 M（M 带）尺度函数和小波 88
7.3 小波包 94
7.4 双正交小波系统 97
7.5 多小波 103
7.6 超完备表示、框架、冗余变换和自适应基 108
7.7 局部三角函数基 113
7.8 离散多分辨分析、离散时间小波变换和连续小波变换 119

第 8 章 滤波器组和传输多路复用器 124

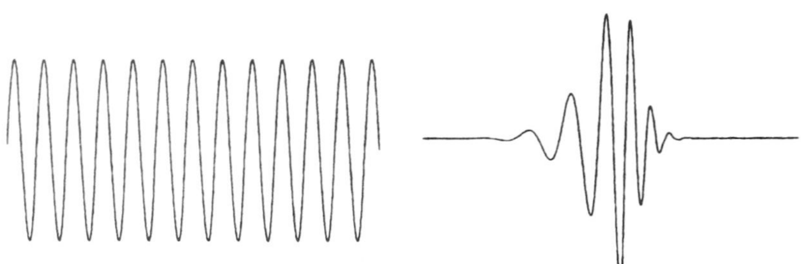
8.1 导引 124
8.2 酉滤波器组 130
8.3 酉滤波器组——一些具体的例子 135
8.4 M 带小波紧框架 137
8.5 调制滤波器组 139
8.6 调制小波紧框架 142
8.7 线性相位滤波器组 143
8.8 线性相位小波紧框架 149
8.9 线性相位调制滤波器组 150
8.10 线性相位调制小波紧框架 151
8.11 时变滤波器组树 152
8.12 滤波器组和小波——总结 159

第 9 章 离散小波变换的计算 …… 160
9.1 有限小波展开和有限小波变换 …… 160
9.2 周期或循环离散小波变换 …… 162
9.3 离散小波变换计算的滤波器组结构和复杂性 …… 163
9.4 周期情形 …… 163
9.5 周期离散小波变换的结构 …… 165
9.6 更一般的结构 …… 166
第 10 章 基于小波的信号处理及应用 …… 167
10.1 基于小波的信号处理 …… 167
10.2 使用离散小波变换逼近快速傅里叶变换 …… 168
10.3 对离散小波变换的非线性滤波或去噪 …… 173
10.4 统计估计 …… 179
10.5 信号和图像压缩 …… 180
10.6 小波为什么如此有用 …… 182
10.7 应用 …… 183
10.8 小波软件 …… 184
第 11 章 一些总结 …… 185
11.1 基本的多分辨尺度函数的性质 …… 185
11.2 小波系统的类型 …… 186
附录 A 对第 5 章关于尺度函数的推导 …… 188
附录 B 对 5.8 节性质的推导 …… 194
附录 C MATLAB 程序 …… 199
参考文献 …… 205
索引 …… 226

第1章　小 波 导 引

本章将概述本书中涉及的主题，目的是为了介绍小波的基本概念、目的和性质，以便更加清晰、准确、有效地使用它. 更为严谨的定义和细节内容将在后续章节中陆续给出.

波（wave）通常定义为时间或空间的一个振荡函数，例如一条正弦曲线. 傅里叶（Fourier）分析就是一种波的分析工具. 它借助于正弦函数（或复指数函数）展开信号或函数. 已经证明，在数学、科学和工程领域中，针对周期的、时不变的或平稳的信号，傅里叶分析是非常有效的. 小波（wavelet）即“小的波”，具有在时域上集中能量的能力，是分析瞬变的、非平稳的或时变的信号的一个工具. 小波仍然具有振荡波的特征，而且通过一个灵活的基函数还可以同时分析时域和频域特性. 图 1-1 中的正弦波在 $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ 上为等幅振荡，所以具有无限能量，而小波则围绕一点振荡，能量有限.



(a) 正弦波　　(b) Daubechies 小波 ψ_{D20}

图 1-1　波和小波

与傅里叶级数用正弦波表示信号或函数一样，我们可以用小波对信号或函数进行分解. 信号是一个连续变量的函数，这个变量通常表示时间或距离. 由小波级数展开，我们将提出一个类似于离散傅里叶变换的离散时间版本，其中信号用一串数字表示，而这串数字可以是信号的抽样、另一串数字的抽样或信号与某个展开集的内积. 最后，将简要描述连续小波变换，类似于傅里叶变换，其中信号和变换都是连续变量的函数.

1.1　小波和小波展开系统

在深入研究小波及其性质之前，先给出它的一般特征，以及要用它做什么［Swe96b］.

1.1.1　什么是小波展开或小波变换

若一个信号或函数 $f(t)$ 能表示为一个线性分解：

$$f(t)=\sum_{\ell} a_{\ell}\psi_{\ell}(t) \tag{1.1}$$

则能够更好地对它进行分析、描述和处理. 其中 ℓ 是有限或无限和的整数指标，a_{ℓ} 是实值展开系数，而展开集 $\psi_{\ell}(t)$ 是 t 的实值函数的集合. 如果展开式（1.1）是唯一的，则展开集就

称为所能展开的函数类的一组基（basis）. 如果这组基是正交的，即

$$\langle \psi_k(t), \psi_\ell(t) \rangle = \int \psi_k(t)\psi_\ell(t)\mathrm{d}t = 0 \quad k \neq \ell \tag{1.2}$$

那么系数可以用内积（inner product）计算：

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

可见，把式（1.1）代入式（1.3）并利用式（1.2）的正交性质，就得到一个系数 a_k. 如果基是非正交的，那么存在一个对偶基 $\widetilde{\psi}_k(t)$，把对偶基应用于式（1.3），仍然可以得到 a_k. 这将在第 2 章中叙述.

对于傅里叶级数，正交基函数 $\psi_k(t)$ 是频率为 $k\omega_0$ 的 $\sin(k\omega_0 t)$ 和 $\cos(k\omega_0 t)$. 对于泰勒（Taylor）级数，非正交基函数是简单的单项式 t^k，对于许多其他展开式，基函数可以是各种各样的多项式、样条函数甚至分形.

对于*小波展开*（wavelet expansion），可以构造一个两参数系统，使得式（1.1）变成

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{1.4}$$

其中 j 与 k 是整数指标，$\psi_{j,k}(t)$ 是小波函数，通常形成一组正交基.

展开的系数集 $a_{j,k}$ 称为 $f(t)$ 的*离散小波变换*（discrete wavelet transform，DWT），而式（1.4）称为逆变换.

1.1.2　什么是小波系统

小波展开集不是唯一的. 存在许多不同的可以有效使用的*小波系统*，但是所有的系统都具有下述三个共性［Swe96b］.

1. 小波系统是构造或表示一个信号或函数的*建筑块*（building block）的集合. 它把一维（或高维）信号用二维展开集（通常是一组基）表示. 也就是，如果小波集由 $\psi_{j,k}(t)$（$j, k = 1, 2, \cdots, n$）表示，则信号可以写为 $f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t)$.

2. 小波展开具有时频*局部化*（localization）特点. 即信号的大部分能量可以仅由少数展开系数 $a_{j,k}$ 表示.

3. $a_{j,k}$ 的计算效率可以非常高，大多数小波变换（展开系数集）的计算量为 $O(N)$，即浮点乘法和加法的次数随着信号长度线性增加. 更多的一般小波变换需要 $O(N\log N)$次运算，与快速傅里叶变换（FFT）相同［BP85］.

事实上所有小波系统都具有上述共性. 傅里叶级数将一维连续变量的函数映射到一维系数序列，小波展开则将一维函数映射到二维系数数组. 我们将看到，正是这种二维表示允许在时间和频率两方面局部化信号. 傅里叶级数展开只在频域上局部化信号，因为如果一个信号的傅里叶级数展开只有一个大系数，那么这个信号就是一个单频正弦波. 信号本身的时域表示仅能给出时间局部化特点. 如果信号是一个单脉冲，则该脉冲的位置就是时间局部化的. 一个小波表示将同时给出在时间和频率两方面的局部化. 事实上，小波表示像五线谱，其中音符的位置确定了发声的时间和声音频率.

1.1.3　小波系统更具体的特征

对于小波展开，还有另外三个特征［Swe96b，Dau92］需要注意.

1. 所有的一代小波系统是由一个尺度函数或小波函数通过简单的*尺度伸缩*（scaling）和平移（translation）生成的. 二维参数化函数是通过 $\psi(t)$（也称生成小波或母小波）得到的：

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \qquad j, k \in \mathbf{Z} \tag{1.5}$$

其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，因子 $2^{j/2}$ 在这里是为了使上式具有独立于尺度 j 的保范性. 参数 k 代表时间或空间，j 代表频率或尺度（准确地说是尺度的对数）.

2. 几乎所有有用的小波系统都满足*多分辨*（multiresolution）条件. 这是指，如果一个信号集能表示为 $\varphi(t-k)$ 的加权和，那么一个（包含原来的）更大的信号集可以用 $\varphi(2t-k)$ 的加权和表示. 也就是说，如果展开基的宽度减小一半，且平移步长也减半，那么它们将足以精确地表示一个更大的信号集或更好地描述任意信号.

3. 使用一个称为滤波器组（filter bank）的树结构算法，低分辨率系数可以由高分辨率系数得到，因此计算效率很高（通常称为离散小波变换）. 在此，读者不妨联想一下数字信号处理中的 FFT.

平移和伸缩运算对许多信号和信号产生过程而言是很基本的，因此小波是有效的展开函数. 图 1-2 描述了式（1.5）中一个母小波的平移和伸缩. 当指标 k 改变时，小波沿横轴移动，从而可以准确地表示事件发生的时间或者空间位置. 当指标 j 改变时，小波的形状在尺度上发生改变，从而可以表示出各种细节或分辨率. 注意到，当尺度变得比较精细（j 变大）时，时间步长将会变小，正是这个更窄的小波和更小的步长才可以表示更丰富的细节或较高的分辨率. 为清晰起见，在平移中每隔 4 个 k 才示意性地画一个小波（$k = 1, 5, 9, 13, \cdots$），否则就太乱了. 这里要特别强调的是，基本母小波的形状是可以改变的，并不仅限于图 1-2 中所示的那样. 这是在小波系统前期设计时所要做的工作，与所要分析的信号特性密切相关，因此一定要对待分析的信号有充分的了解.

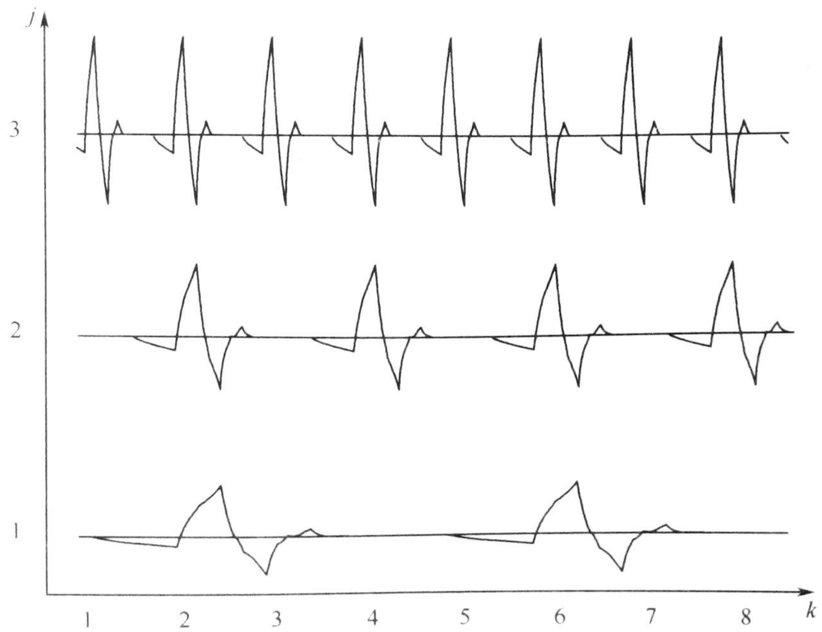


图 1-2　小波 ψ_{D4} 的平移（每隔 4 个 k）和伸缩

对于傅里叶级数与傅里叶变换，以及大多数信号展开系统，展开（基）函数是选定的，因此可以导出并分析变换的性质. 而对于小波系统，首先选定需要哪些数学上的性质或特征，然后推导出基函数. 满足以上约束的小波有很多，还需要继续根据特定的应用，要求小波系统有另外的性质，从而最终确定使用哪一个小波. 例如，一旦选择使用傅里叶级数，则正弦基函数是完全确定的. 而对于小波，就不确定了，有许多不同的小波都满足上述性质. 事实上，了解和设计小波是本书的一个重要课题.

小波分析很适合瞬变信号，傅里叶分析则适合周期信号或者统计特性不随时间变化的信号. 小波的局部化性质使得一个瞬变事件的小波展开仅有少量系数，这在实际应用中是很有用的.

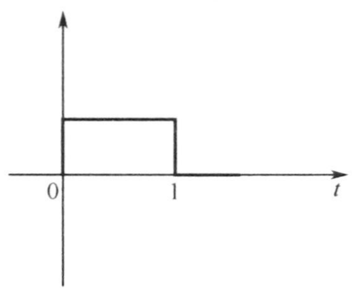
1.1.4 哈尔尺度函数和小波函数

多分辨的阐述需要两个紧密联系的基函数. 除了已经讨论（但还没有精确定义）的小波 $\psi(t)$外，还需要另一个称为*尺度函数*（scaling function）的基函数$\varphi(t)$. 需要这个函数的理由和这两个函数关系的详细叙述将在第 2 章展开，本章仅仅是使用它而已.

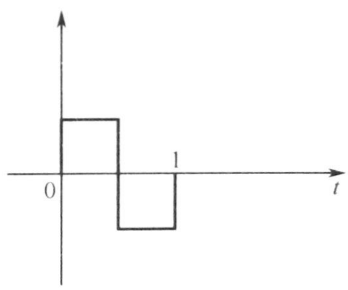
最简单的正交小波系统是由哈尔（Haar）尺度函数和小波函数生成的，如图 1-3 所示. 使用这些尺度函数和小波函数的组合，可以将一大类信号表示为

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi(t-k)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k}\psi(2^j t-k) \tag{1.6}$$

哈尔［Haa10］在 1910 年证明了这一结果，而我们现在通常所说的小波正是从此开始产生的. 哈尔系统和展开的一个例子在第 2 章末尾给出.



(a) $\varphi(t)$



(b) $\psi(t)$

图 1-3 哈尔尺度函数和小波函数

1.1.5 小波看起来像什么

所有傅里叶基函数看起来都很像. 高频正弦波看起来像压缩版的低频正弦波，余弦波是正弦波平移 90°或π/2 弧度得到的. 傅里叶级数需要大量的系数表示某个不连续点或急剧变化的信号. 相比之下，小波的种类非常多，其中一些小波本身就具有不连续或急剧变化的特点.

直到 20 世纪 80 年代末期一些特别有价值小波的出现，才使人们领悟到小波的独特魅力. 图 1-4 描述了 4 个不同的尺度函数，它们在 $0<t<6$ 区间之外都是零，且对于平方可积函数，每个尺度函数均可构造出一个正交小波基.

更多的尺度函数及其相应的小波函数将在后面的章节中描述，哈尔小波参见图 1-3，而其细节在第 2 章末尾给出.

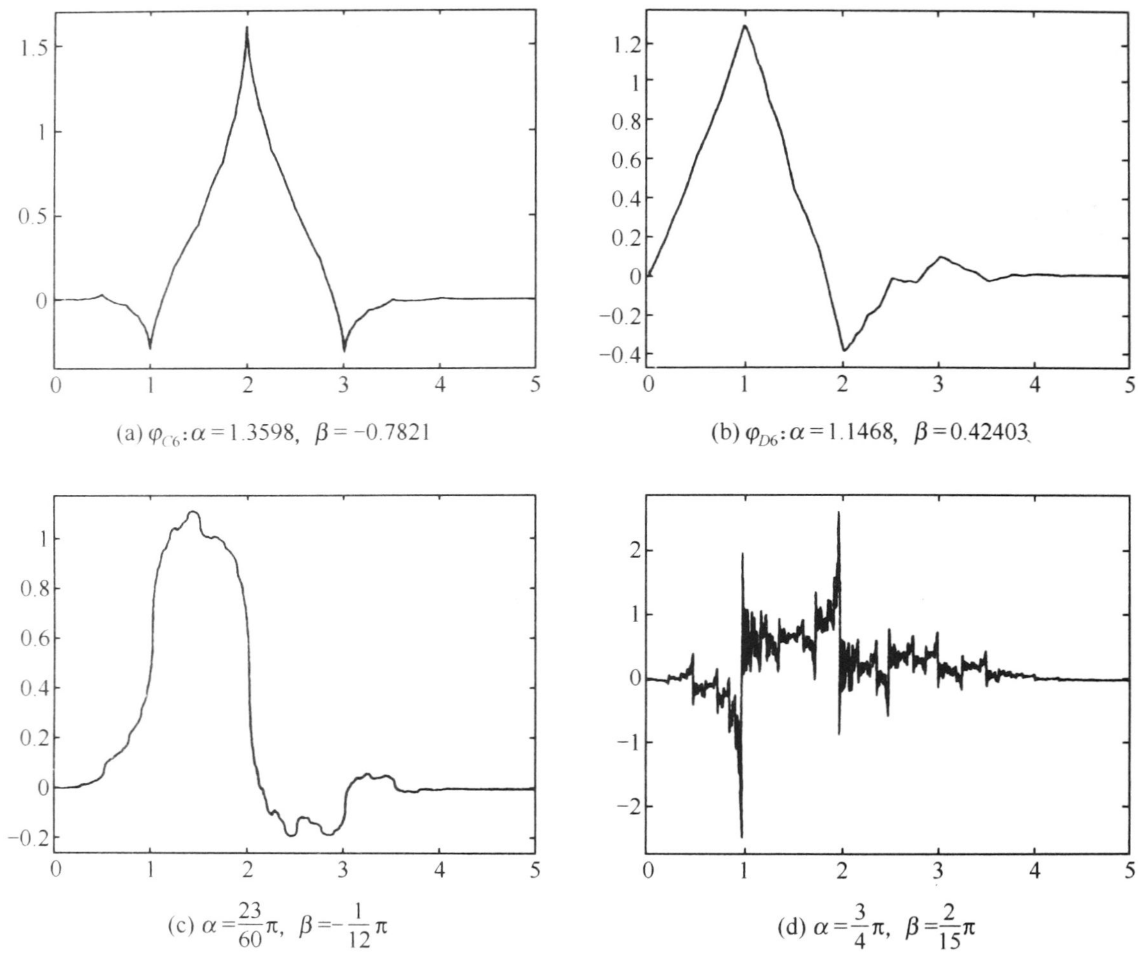


图 1-4 尺度函数的例子（α和β的意义见 5.8 节）

1.1.6 小波分析为什么是有效的

已经证明，小波展开和小波变换对一大类信号和现象的分析均有效并且高效. 这是为什么呢？什么样的性质给出了这种有效性？

1. 对于大多数信号，随着 j 与 k 的增大，式（1.4）中的 $a_{j,k}$ 或式（1.6）中的 $d_{j,k}$ 的个数将迅速地减少，这个性质称为无约束基（unconditional basis），这也是在信号和图像压缩、去噪及检测中小波有效的原因. Donoho［Don93b，DJKP95b］指出，对于一大类信号的压缩、去噪和检测，小波是接近最优的.

2. 利用小波展开，可以对信号特征进行更精确的局部描述和分离. 一个傅里叶系数代表一个存在于所有时间上的分量，所以瞬态事件必须用一个在大多时间段上系数之间能够相互抵消或增强的相位特征来描述. 而小波系数本身就具有局部化特征，可以把在时域和频域上都有交叠的信号分量分离出来，因而也更容易描述瞬态信号.

3. 小波变换具有可调性和可适性. 因为不是只有一个小波，我们可以将它们设计成适合各种应用. 同时，小波变换是自适应系统的理想工具，它们可以自行调整自身以匹配相应的信号.

4. 小波的生成和离散小波变换系数的计算很适合利用数字计算机实现. 稍后我们将看到，小波的定义方程没有使用微积分，没有求导或积分，只有乘法和加法——这是数字计算机的基本运算.

到此虽然仅给出了宏观上的一些概念，但它们对理论学习和工程应用是至关重要的，大家感兴趣的细节部分将在本书随后章节及其他书中涉及.

1.2 离散小波变换

小波变换的双变量基函数集，在使用方法上类似于时-频分析的短时傅里叶变换、盖博（Gabor）变换或者维格纳（Wigner）分布［Coh89，Coh95，HB92］. 我们的目标是生成一个展开函数集，使（平方可积函数空间）$L^2(\mathbf{R})$中的任一信号可以表示为级数

$$f(t)=\sum_{j,k}a_{j,k}2^{j/2}\psi(2^j t-k) \tag{1.7}$$

或者，利用式（1.5），表示为

$$f(t)=\sum_{j,k}a_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{1.8}$$

其中二维系数 $a_{j,k}$ 的集合称为 $f(t)$ 的离散小波变换（DWT）. 如果 $\psi_{j,k}(t)$ 对于感兴趣的信号空间形成一组正交基[1]［Dau92］，且 $a_{j,k}$ 可以写为内积形式，则更具体的表达式为

$$f(t)=\sum_{j,k}\left\langle\psi_{j,k}(t),f(t)\right\rangle\psi_{j,k}(t) \tag{1.9}$$

其中，内积通常定义为

$$\left\langle x(t),y(t)\right\rangle=\int x^*(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{1.10}$$

大多数函数或信号展开的目的是展开系数 $a_{j,k}$ 给出关于信号的更有用的信息，而这些信息无法从信号本身直接得到. 第二个目的是希望大多数系数为零或很小，即所谓的稀疏（sparse）表示，这对于统计估计和检测、数据压缩、非线性去噪及其快速算法等应用是相当重要的.

虽然这种展开称为离散小波变换，但或许称为小波级数更合适，因为它是一个级数展开，将一个连续变量的函数映射到一个系数序列，其方法与傅里叶级数展开相同. 但是这一点已经约定俗成了.

这个小波级数展开借助于两个指标，即时间平移 k 和尺度指标 j. 对于傅里叶级数，只有两个可能的 k 值——0 或$\pi/2$，分别对应正弦项和余弦项，而 j 指示不同的频率. 也就是说，傅里叶级数也是一个二维展开，但从其指数形式中看不出来，而在其三角函数形式中也不易发现.

用图形表示一个信号的离散小波变换有点困难，因为它是一个两变量或两指标的函数. 然而，我们在图 1-5 中给出了一个简单脉冲的离散小波变换，以展示变换的局部化特性. 其他例子将在第 2 章给出.

① 基和紧框架将在第 4 章定义.

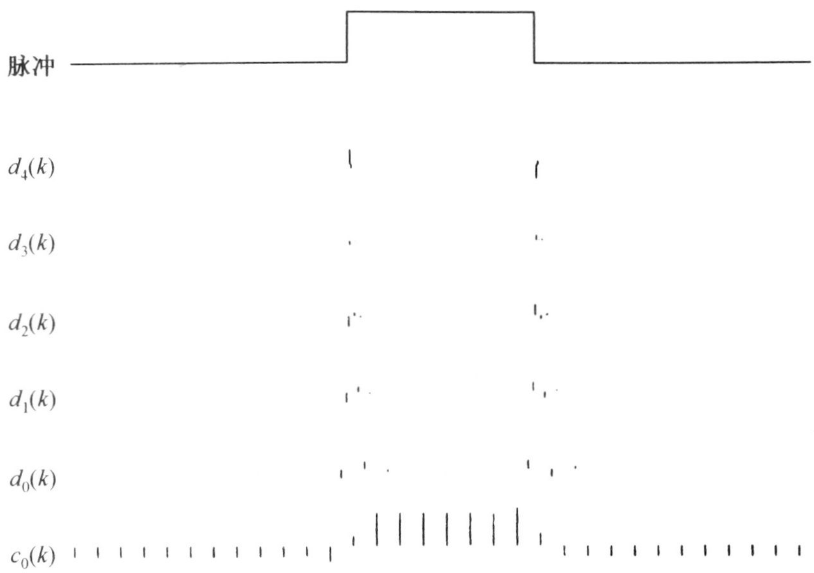


图 1-5 一个脉冲的离散小波变换，使用 ψ_{D6}，图中的每个 d 都乘以 $\sqrt{2}$

1.3 离散时间小波变换和连续小波变换

如果信号本身是一个数的序列，或许是某个连续变量函数的抽样，或许是一个内积的集合，则这个信号的小波展开称为离散时间小波变换（DTWT）. 将一个数字序列映射到另一个数字序列的方法与离散傅里叶变换（DFT）是一样的. 但不像离散傅里叶变换中要求信号是有限的或周期的. 若为了与傅里叶变换中的术语一致，称为离散时间小波级数其实更合适，但大家都习惯称之为离散小波变换. 如果离散时间信号的长度是有限的，则变换可以表示为一个有限矩阵. 这个离散时间信号的级数展开是用滤波器组方法实现的［Vai92，VK95］，本书的第 8 章将对此详述.

如果信号是一个连续变量的函数，并且希望变换是两个连续变量的函数，则连续小波变换（CWT）可以定义为

$$F(a, b) = \int f(t) w\left(\frac{t-a}{b}\right) \mathrm{d}t \tag{1.11}$$

其逆变换为

$$f(t) = \iint F(a,b) w\left(\frac{t-a}{b}\right) \mathrm{d}a \mathrm{d}b \tag{1.12}$$

其中 $w(t)$ 是基小波，$a,b \in \mathbf{R}$ 是实连续变量. 对于小波 $w(t)$，Daubechies［Dau92］、Heil 与 Walnut［HW89］等人讨论了支持这个可逆变换的容许性条件，在本书的 7.8 节中给出了简要叙述. 傅里叶变换或傅里叶积分中也有类似内容.

1.4 练习和实验

随着本书讨论小波和小波变换的深入，强烈建议各位运行本书附录中的 MATLAB 程序