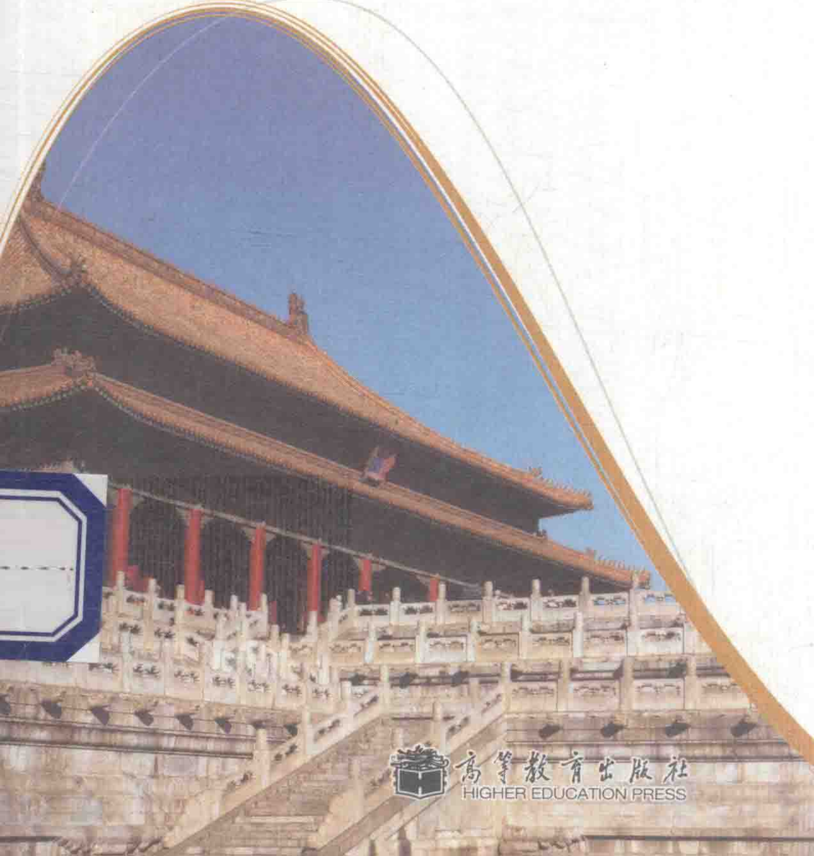
21

数学文化小丛书

李大潜 主编

从多面体到水立方

齐民友



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学文化小丛书

李大潜　主编

从多面体到水立方

cong Duomianti dao Shuilifang

齐民友

高等教育出版社　北京
BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

从多面体到水立方/齐民友编. —北京:高等教育出版社,2013.6

(数学文化小丛书/李大潜主编. 第3辑)

ISBN 978-7-04-037199-4

Ⅰ.①从… Ⅱ.①齐… Ⅲ.①多面体-普及读物 Ⅳ.①O189-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第068051号

策划编辑	李 蕊	责任编辑	胡 颖	封面设计	张 楠
版式设计	王艳红	插图绘制	邓 超	责任校对	杨雪莲
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm × 1092mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印 张	2.25	版 次	2013年6月第1版
字 数	37千字	印 次	2013年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	9.00元

物 料 号 37199-00

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学,而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用,是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学,不等于拼命做习题、背公式,而是要着重领会数学的思想方法和精神实质,了解数学在人类文明发展中所起的关键作用,自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样,才能从根本上体现素质教育的要求,并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多,更远未引起各方面足够的重视,很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下,本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益,本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对

世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目　录

一、多面体和欧拉公式……………………1

二、拓扑学的瑰宝……………………16

三、阿基米德多面体及其他……………………36

四、从蜂巢到水立方……………………45

参考文献……………………58

后记……………………59

一、多面体和欧拉公式

人类和多面体打交道已经有悠久的历史: 古埃及的金字塔就是非常典型的多面体: 四面体. 从那时起, 人们就熟知了一些具有特殊性质的多面体, 特别是正多面体. 这种多面体的特点是: 每一个面都是同样的正多边形. 早在古希腊, 人们已经熟知有 5 种正多面体, 特别在柏拉图的《**蒂迈欧篇**》(*Timaeus*) 一书中就已经详细讨论过它们了, 所以这些正多面体就被称为**柏拉图多面体** (图 1). 这些正多面体在柏拉图哲学中有特殊的重要性. 古希腊人认为世界是由 4 种元素构成的, 而每一种元素都对应于一个正多面体. 第一是“土”, 它对应于立方体、即正六面体, 因为它正正方方, 如泥土一样: 拿起来就会捏碎了; 再说, 只有正六面体才能铺平如土地那样. 第二是“气”, 它用正八面体来表示, 因为气的微粒如此光滑, 谁也感觉不到它. 第三种元素“水”, 是正二十面体, 您把水拿起来它就会像小球一样, 从手指缝里溜走了. 第四种“火”是正四面体, 与前者恰成对比, 身上长满了刺, 拿起

来就会把您伤了. 第五种正十二面体, 柏拉图讲得很含混, 只说是天神用它来构成天界, 后来亚里士多德又添上第五种元素“以太”(拉丁文是 aether, 英文则是 ether), 是构成天球和星座的“材料”, 意思是凡人难以捉摸的. 后来物理学中也借用以太这个词, 无非取其难以捉摸之义, 与亚里士多德没有什么关系了.

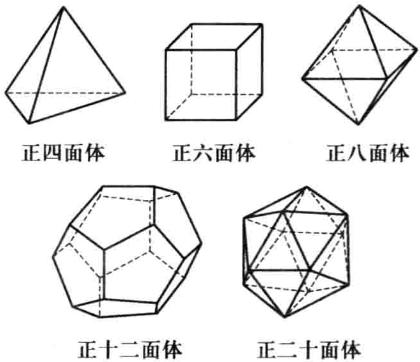


图 1　柏拉图多面体

既然多面体这样引起了柏拉图的注意, 在欧几里得的《**几何原本**》中也给予它很显著的位置就不足为奇了. 事实上, 欧几里得的《**几何原本**》第十三卷讲立体几何, 主要就是讲多面体. 特别是其中的命题 18 就指出只存在这 5 种正多面体, 而所谓正多面体就是以正多边形为表面的多面体. 当然, 这个命题的证明是谈不上严格的, 但是更重要的问题在于我们对多面体一直还没有合适的定义. 这一点正是我们研究多面体的时候遇到的根本困难: 每当我们给出多面体的一个定义, 随着研究工作的进展,

以及我们见到更多的自然现象, 就会发现这些定义有例外, 因此所得到的结论也有例外, 需要加以改进. 所以我们只能暂时采用一个现在大家都能接受的定义, 再随时改进.

我们现在定义多面体如下:

1. 它是一个表面由有限个**凸多边形**组成的三维**凸体** (说一个集合如平面区域或三维区域是凸的, 就是说, 取其中任意两点, 则连接这两点的线段也位于这个集合内).

2. 这些凸多边形称为它的“**面**”. 两个面一定沿一条直线段相连, 而且每一条这样的直线又只连接着两个面. 这些直线段称为“**棱**”. 这些直线段一定在其端点相连, 棱的端点称为多面体的“**顶点**”. 两条棱只能在端点处相遇. 如果它们相交, 但不是在端点处相交, 是不许可的. 同样, 两个面在一点相遇、或者沿着不是棱的直线段相交、或者互相穿过, 也都是不许可的.

3. 多面体一定是“**简单的**”, 它的面也一定是“**简单的**”. 所谓简单, 粗略地说就是**没有洞**. 准确一点说, 一个平面区域或三维空间区域是简单的, 在平面区域的情况就是其中的任意封闭曲线一定可以通过连续变形变成一个点, 而在三维空间区域的情况则是封闭曲面在变形过程中不会离开这个三维区域.

这些概念其实是很深刻的拓扑概念, 而我们有一个简单的判别方法: 假设这些面都是由柔软而可以拉伸的塑料或橡皮薄膜做成的, 我们可以像吹气球一样把它吹成一个球面. 图 2 就是一个例子.

图 2　一个多面体被吹成了一个足球

对于多面体，人们最为熟知而且在教学中最常提到的美丽结果就是**欧拉公式**.

定理 1(欧拉公式)　*对于适当正规的多面体，必有*

$$V - E + F = 2. \tag{1.1}$$

这里所谓适当正规就是指上面所作的解释，而 V, E, F 分别表示多面体的顶点、棱及面的数目.

在证明这个美丽的定理之前，我们先来介绍一下它的历史. 欧拉在 1750 年 11 月 14 日给哥德巴赫的一封信里宣布了这个结果. 他写道："我很吃惊，立体几何中这样一个一般的性质，就我所知，还没有其他人注意到." 这里的其他人包括了柏拉图、毕达哥拉斯、阿基米德、欧几里得以及德国大天文学家和数学家开普勒. 他们都曾经和多面体有过密切的接触，但是对这个漂亮的结果居然都没有注意到. 可能笛卡儿是例外，他离这个结果从逻辑上说只有一步之遥，但是也没有得到它. 笛卡儿的"证明"我们将在第二部分介绍.

不过, 欧拉本人并没有给出正确的证明. 第一个正确证明似乎出自勒让德之手. 但是下面我们将要给出的是柯西在 1821 年的证明的一个变体. 这主要是因为, 其他人证明的路数都是来自立体几何: 把多面体在一个顶点附近看成一个"立体角"①, 而柯西则把它化成了一个图论的问题. 下面我们给出这个证明的一个变体, 这样更容易看懂.

欧拉定理的证明. 我们不妨把这个多面体的表面看成地球表面 (图 2 左侧), 上面筑了一些堤坝, 围成了有限多个小圩子. 圩子的个数就是多面体的面的数目 F; 堤坝分成 E 段, 每一段就是一条棱; 在每一段堤坝的两端各立一根柱子, 来标志堤坝的起点和终点, 这些柱子就是多面体的顶点, 其总数为 V. 我们的目的就是来研究 F, E 和 V 的关系. 为此, 我们选择一个圩子, 让里面灌满了水, 于是没有被水淹没的圩子总数成了 $F'=F-1$. 我们的目标是证明 $V-E+F'=1$.

现在我们再来给出一个不太严格的证明, 其方法是挖掉一段堤坝 (但是其起点和终点处的柱子保留不动, 以免影响其他坝段). 本来一段堤坝是两个圩子的分界线 (每一条棱只连接两个面), 现在有

① 欧拉和笛卡儿使用的名词与现在大学教学中常用的不同. 例如现在的"立体角"就是中学教学中的"多面角", 它的各个面各有自己的面角. 下文中讲到立体角的大小和角亏、角盈时, 都是讲的这些面角之和. 而在现在的大学教学中的"立体角", 是指以顶点为球心、所作的半径适当小的球面在此角内的区域的面积与半径平方之比. 但是讲立体角的全角时, 欧拉和笛卡儿的用法有时与现在大学教学一致, 即指上述的球面是整个球面, 从而立体角是 4π, 但有时仍旧指这些面角之和.

一个圩子已经灌满了水, 另一个还没有被淹没. 挖掉这一段堤坝以后, 另一个也被水淹没了. 所以 E 和 F' 的数目都减少了 1, 但是 V 没有变, 所以 $V-E+F'$ 不变. 像这样做下去会遇到另一种情况, 就是一段堤坝两侧都被水淹没了. 这时就挖掉一段堤坝, 连起点处的柱子都挖掉, 但终点处的柱子保留不动. 这时 F' 不变, 但是 V 和 E 各减去 1, $V-E+F'$ 仍然不变. 很可能这种情况会继续做若干步, 不过 $V-E+F'$ 是不会变的.

总之, 我们会遇到两种情况: 或者还有一个没有被淹的圩子, 它就一定有没有被拆掉的堤坝; 或者是两边都被水淹没了的堤坝, 这时就把一段堤坝连同其起点的杆子拆掉. 总之 $V-E+F'$ 是不会改变的. 因为这里的圩子只有有限多个, 所以到最后就一定只剩下一段堤坝. 再把这段堤坝连同起点的杆子拆掉, 就只剩下它的终点处的杆子孤零零地站在水里, 也就是说: $V=1, E=0, F'=0, V-E+F'=1$. 但是 $V-E+F'$ 在这个过程中一直没有变, 所以恒有 $V-E+F'=1$, 也就是 $V-E+F=2$. 就是说 (1.1) 式成立, 从而定理得证.

这个证明之所以还不严格, 是由于实际上可能不止这两种情况. 但是想要把它变严格可能还要花太大的力气, 反而会把基本思想弄模糊了.

这个证明和柯西原来的证明只有两点不同. 柯西是把这个球从挖掉的地方拉开、铺平在平面上. 如果设想地球表面是软软的塑料或者橡皮

做的，随便拉多么大，也**只是改变形状和大小，而不会拉断它，也不需要黏补起来**，则柯西的做法是很自然的. 这个做法在数学上称为一个拓扑变换、或者“**同胚**”(homeomorph). 如果把这一个圩子灌满水，整个图形就变成茫茫大海里的一个孤岛，再把环岛的堤坝统统拆掉，就变成大海里留下一座灯塔. 我们的做法就是认为地球本身就是无穷的，例如设北极就在最早挖掉的圩子里面，不妨认为北极就在无穷远处. 这个思想在现代数学里面是非常常见的. 至此为止，我们的思考都属于拓扑学的范畴.

第二个区别在于柯西设每一个面都是三角形. 如果不是，就在多边形的边上取定一个顶点，并且用一条线段把它与另一个顶点连接起来，于是多出了一条棱，把原来的一个多边形分成两个而多出了一个. 既然 E 和 F 都加了 1，整个 $V-E+F$ 就没有变. 然后柯西又把添加上的堤坝挖掉. 但是在我们看来，既然要挖掉，当初何苦又去添上呢？这样做虽然有点白费劲，总还属于“组合学”(combinatorics) 的范畴. 这一下可说到点子上了，我们可以把这些多面体化成平面上的**图** (graph). 例如相应于那 5 种正多面体的图就是图 3.

这件事其实很容易想象：上面那些区域外的无限区域就是大海. 把这些图从中间往上拎起来，再把这茫茫大海绕到纸后面封起来，“稍加整理”(就是作适当的拓扑变换) 岂不就回到原来的多面体了吗？如果我们真的这样想那就太小瞧了柯西:

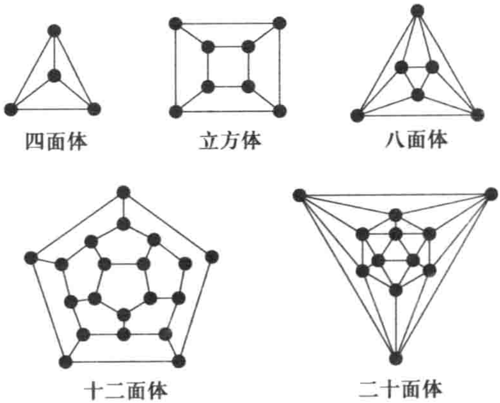


图 3　相应于柏拉图多面体的平面图

宁可说我们自己贻笑大方！柯西的证明把我们带到了图论这个领域. 这是现代数学的一个十分广泛的理论. 所谓图是一种出现得很频繁的数学结构, 图由一些 (通常是有限多个) 点和连接两点的线段构成, 其中点称为图的**结点** (nodes), 也称**顶点**, 连接两点的线段称为这个图的**边** (edge), 也称为**棱**.

这些名词都和多面体理论中的意思一样, 但是对于一般的图却没有“面”的概念, 因为图论的目的不同于多面体理论: 图论的问题就是研究这些结构的性质. 例如有一些图可以在平面上画出来, 这种图称为平面图. 图 3 上画出的图——称为这些正多面体的图, 它们都是平面图. 对于这些图就可以定义面的概念, 而关于多面体的欧拉公式也就成了关于这些图的欧拉公式. 不过现在应该把包含无穷远处的区域也看成一个面, 而它的顶角就是顶点的外角. 无穷远点虽然不是一个顶点, 但是应该规定

那里有一个顶角 -2π. 一个图是否平面的, 即是否可以在平面上画出来, 有重要的意义. 例如电路 (如芯片上的电路) 就是由一些导线连接起一些元件所成的图. 如果这些图不是平面的, 这些导线就会交叉, 这就十分麻烦. 图 4 就是非平面图的例子.

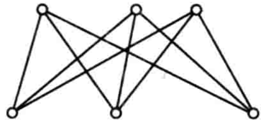


图 4　非平面图的例子

我们把上面的三个点看成变电站、煤气站和水厂, 下面三个点看成三户人家. 现在要求给这三家人通电、通气和通水, 按照图论的结果, 这些管线一定会在平面上交叉, 且只有从上方或从下方互相穿越. 图论的内容极为丰富, 我们在这里不可能多作介绍了.

但是欧拉的这个定理却能帮助我们回答一个老问题. 我们在前面已经看到了 5 种正多面体, 而且说过欧几里得想要证明只可能有这 5 种, 现在我们很容易就能证明这一点.

定理 2　*正多面体只有 5 种: 即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体以及正二十面体. 这里所谓正多面体都是指的凸多面体.*

证明　和上面一样, 多面体的棱仍为关键. 设正多面体的每一个面均为正 k 边形, 而通过每一个顶点都有同样个数 q 条棱 (q 也称为 "**度数**" (degree)). 对于正多面体, k, q 对于每个顶点都是

一样的, 它们恰好标志了这个正多面体的性质. 所以我们引入一个记号 $\{k, q\}$, 称为这个正多面体的**施莱弗利** (Ludwig Schläfli, 1814—1895, 瑞士几何学家) **符号**.

因为这个正多面体有 F 个面, 所以总共有 kF 条边. 因为每条棱都邻接于两个面, 所以 $kF = 2E$, 即

$$F = \frac{2E}{k}. \tag{1.2}$$

同时棱的总数还应该是 qV, 所以 $qV = kF = 2E$, 即

$$V = \frac{2E}{q}. \tag{1.3}$$

把 (1.2) 和 (1.3) 代入欧拉公式 (1.1) 即有

$$V - E + F = \frac{2E}{q} + \frac{2E}{k} - E = 2.$$

用 $2E$ 除上式, 即得

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \tag{1.4}$$

很明显, $q, k \geqslant 3$, 因为每一个面至少是三边形; 而过每一个顶点至少有 3 条棱, 否则这个多面体至少部分地被“压扁”成为平面的一部分, 而不可能是凸的. 但是它们又不可能同时 $\geqslant 4$, 因为若 q, k 均 $\geqslant 4$, 则 (1.4) 的左方 $\leqslant \frac{1}{2}$, 而 (1.4) 不能成立. 这样 q, k 中至少有一个为 3. 同样的考虑说明 k, q 中