苏联部分高等院校

高考数学试题选编

[附题解]

GAOKAOSHUXUESHITIXUANBIAN

天津市河北区教师进修学校编译

说　明

为了了解国外数学教学的情况，为了给高中毕业生提供一些数学练习题，也为了给数学教师在教学中提供一些参考资料，我们从七七年苏联高考试题中，选择了23所有代表性的高等院校的数学试题，编成这个小册子。书中并附有详细的提示和答案，供读者参考。

参加本书编译的是我校外语组的罗珣、李丕章老师，数学组的于桂华老师。本书承蒙南开大学数学系侯自新同志审阅，在此表示感谢。

由于水平所限，书中可能有不当之处，请读者批评指正。

天津市河北区教师进修学校

79年12月

目 录

（一）国立莫斯科大学

数学力学系

1．求 $a>0$ 的所有的数值，对于这些数，

$$\int_0^a (2-4x+3x^2)\,dx \leqslant a。$$

2．梯形的两腰分别等于3和5。已知可在梯形中作一与它四边都相切的内切圆。梯形的中位线把梯形分成两部分，此两部分面积之比为$\frac{5}{11}$。求梯形两个底边的长。

3．求证：对于函数 $f(x)=\cos x\sin 2x$，

$$\min_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -\frac{7}{9}$$

4．求以下方程组所有的解：

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$$

5．棱锥 $SABC$ 的底面是边长为 $4\sqrt{2}$ 的等边三角形 ABC。侧棱 SC 垂直于底面的平面，长为2。有一条直线通过 S 点和棱 BC 的中点，另一条直线通过 C 点和 AB 中点，求此两异面直线间夹角的大小及此两直线间距离。

化学系

1．从 A 站运到 B 站一邮件。邮件先由甲（摩托车手）运送，走完 A 站到 B 站距离的2/3，然后把邮件递交给了等候他的乙（骑自行车），乙把邮件送到了 B 站（设递交邮件化费的时间为0）。在上述情况下，邮件从 A 站送到 B 站所需的时间

为以40公里／小时的速度从 A 行驶到 B 的时间。

已知，若甲与乙从 A 和 B 同时相向出发，则他们经过一段时间将相遇，此段时间为从 A 出发以100公里/小时的速度行驶到 B 的时间。求甲的速度。已知甲速较乙速大。

2． 求以下图形面积，已知它由曲线

$y=x^2-2x+2$, $y=x^2+4x+5$, $y=1$ 所围成

3． 解不等式

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2。$$

4． 在凸四边形中，对角线长分别为1与2米。已知连接其两对边中点的线段长度相等，求四边形面积。

5． 求方程 $2-\sqrt{3}\cdot\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x$ 所有的满足不等式 $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$ 的解。

地理系

1． 解不等式 $2|x+1|>x+4$

2． 在三角形 ABC 中，AB 边长为3米，AB 边上的高 CD 长 $\sqrt{3}$ 米。高 CD 的垂足 D 在 AB 边上，线段 AD 长等于 BC 边的长。求 AC 边的长。

3． 求函数 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 的单增与单减的区间及极大与极小值点。

4． 卡车与竞赛用的汽车从 A 站同时出发，并都应到达 C 站。卡车匀速行驶到达 C 站走过的路程为360公里，竞赛汽车沿环形路走，先到达位于距 A 为120公里的 B 站，其速度为卡车速度的2倍、过了 B 站后，竞赛汽车速度提高了40公里／小时，从 B 站到 C 站走过的路程为1000公里，它到达 C 站比卡车晚1小时15分钟。假如竞赛汽车从 A 到 C 的全程上都以从 B 到

C的路程上的速度行驶，则它就将比卡车迟1小时到C。求卡车速度。

5. 解方程

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cdot\cos^2 2x}$$

生物系

1. 解方程

$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$。

2. 在凸四边形$ABCD$中，$\angle A$和$\angle B$为直角，$\angle D$为$45°$，BC边长为1米，对角线BD长为5米，求这个四边形的面积。

3. 求下列图形面积，它由曲线

$y=0.5x^2-3x+4.5$和它在点（1，2）的切线$y=4-2x$以及在点$\left(4,\frac{1}{2}\right)$上的切线$y=x-3.5$所围成。

4. 解方程

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right).$$

5. 求参变数s所有那样的值，对这些值中的每一个值，方程式$x^2+3x+2s=0$，$x^2+6x+5s=0$的所有的根都各不相同并且相间排列着，即两个方程式都具有两个根，并且在一个方程式的两个根的之间恰有另一方程式的一个根。

土壤系

1. 解方程　　$2\sqrt{x+5}=x+2$。

2. 求函数$f(x)=xe^{-3x}$的单增和单减的区间及极大值与

极小值点。

3. 解方程

$$|\sin x| = \sin x + 2\cos x\ 。$$

4. 梯形 $ABCD$ 的底边 AB 长是底边 CD 长的 2 倍，也是腰 AD 长的 2 倍。对角线 AC 长为 a，腰 BC 长为 b。求梯形面积。

5. 一连士兵全体出勤，以每排24人的长方形参加检阅。到达以后发现不是全体士兵都能参加检阅。连队留下参加捡阅的士兵重新编队，使排数比原先少 2 排，每排人数比新排法的排数多26。假设全体士兵参加检阅，则连队可以如下排列：使每排人数等于排数。问连队中有多少名士兵？

计算数学及控制论系

1. 解不等式

$$2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0\ .$$

2. 一个三角形，其中一个角等于其它两角之差，最短的边长为 1，其它两边上所作的两个正方形的面积之和是三角形外接圆的面积的 2 倍。求三角形的最大的边之长。

3. 解方程组

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3-\sqrt{2})\,\mathrm{tg}(5y) = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \mathrm{tg}^2(5y) + (3-\sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}.$$

4. 四个城市 A，B，C，D 分布如下：四边形 $ABCD$ 是凸的，相互连接的直路为 $AB = 6$ 公里，$BC = 14$ 公里，$CD = 5$ 公里，$AD = 15$ 公里，$AC = 15$ 公里。有三个旅行者，从一城同时出发，三人均以匀速不停地前进。三人路线互不相同，每人的路线都包括三条路，并都得走过四个城市。

甲、乙在通过自己路线上的第三条路前在一个城里相遇，丙比最晚结束旅程的人早一小时到达自己的终点．求三人的速度。设丙速比乙速大，比甲速小 1/2 公里／小时，并且三人的速度都在 5 ~ 8 公里／小时范围之内。

5． 求满足以下条件的参变数 a 所有的值，这些值满足不等式 $0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$，而且使函数 $f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos a - \sin a) - 3x^2 \sin 2a$ 在区间 $-\sin a \leqslant x \leqslant \cos a$ 上的极小值也是最小值。

物理系

1． 解方程 $\sin^2 x = \frac{3}{4}$。

2． 求封闭图形的面积。它由曲线

$y = 0$，$y = 20 - 2x^2 - 6x$ 所围成。

3． 求序列 $x_n = \frac{A^4_{n+4}}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ 的取负值的各项。其中 A^4_{n+4} 为排列数，P_{n+2} 和 P 为全排列数。

4． 已知等腰梯形，内切一圆，外接一圆。梯形的高与外接圆半径之比为 $\sqrt{\frac{2}{3}}$，求梯形各角。

5． 立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1 \times \left((AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)\right)$※的棱长为 1。在 AA_1 棱上取 E 点，使线段 $AE = \frac{1}{3}$，在棱边 BC 上取 F 点，使线段 $BF = \frac{1}{4}$。过立方体的中心和 E 点、F 点作一平面 α。求从顶点 B_1 到平面 α 的距离。

※译注：凡在本书中出现的下列符号 (AB)、$[AB]$ 及 (ABC) 分别表示连结 A，B 的直线．连结 A、B 的线段及点 A、B、C 所决定的平面。

※译注：$ABCD\,A_1B_1C_1D_1 \times ((AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1))$ 表示这个立方体中，AA_1 所在直线与BB_1，CC_1 及DD_1 所在的各直线都平行。以下出现的这类符号均作类似理解，不再说明。

（二）国立列宁格勒大学

数学力学系

1. 求随 p 变化的 a 的那些值，这些值能使以下方程具有三个不同的根。

$$x^3+2px^2+p=a$$

2. 求以下方程在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$之内所有的解。

$$8\cos 6x\cdot\cos^3 x-\cos 9x-\cos 3x=0$$

3. 有多少种方法可以把十份同样的礼物分给六个孩子，使每个孩子至少获得一份礼物？

4. 求以下圆锥的高，此圆锥内接于半径为R的球，并且在所有这样的圆锥中具有最大的全表面积。

5. 矢量$\vec{C}$垂直于矢量$\vec{a}=(1, 1, 1)$及$\vec{b}(1, -1, 3)$，并与轴O_z构成钝角，求其坐标。已知$|\vec{C}|=3$。

应用数学管理系

1. 对于参变数 p 的哪些值来说，三次三项式x^3-2px^2+1在区间$[0, 1]$上的最小值在区间的右端达到？

2. 求方程式在区间$(0, 2\pi)$内所有的解。

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3 。$$

3. 在10个罐中放进 6 个白球和 6 个黑球。球的大小相同。每个罐中至少得有一个球。问这些球可以有多少不同放法？

4. 当k等于何值时，函数$y=kx^2$图象的切线可以和轴O_x构成等于$\frac{\pi}{3}$的角，并且在第四象限上截出一个面积为$\frac{8\sqrt{3}}{3}$的三角形？

5. 向量$\vec{a}$的第一个坐标比第二个坐标大；向量$\vec{a}$垂直于向量$\vec{b}=(1, -3, -1)$并与轴O_z构成$135°$角。求它的坐标，已知$|\vec{a}|=5\sqrt{2}$。

物理系

1. 给竖直放置的平板电容器的两极加上交流电压，它产生一个场强为$E=A\cos\omega t$的电场。求在电容器两极间的电子运动规律及作出电子运动曲线图，要考虑到重力作用。在初始的时刻电子静止，并位于距较近的板距离为l。电子质量等于m，电荷等于e，l足够大，以至在任何时刻电子都不能达到电容器的两极上。
2. 求三个正数，使它们的乘积在以下条件时为最大：甲数和乙数之和为a，甲数和丙数之和为$2a$。
3. 求方程$6\operatorname{tg}x+\frac{5}{\operatorname{tg}3x}=\operatorname{tg}2x$的属于区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$的那些解。
4. 可以有多少种方法把n个相同的球分布到k个盒中？
5. 三个球与一个三角形所在的平面相切，此三角形的边各为a，b，c；切点为此三角三个顶点。此三球并两两相切。求三个球的半径。

经济系（经济控制专业，国民经济计划专业）；化学系，心理学系

1. 在区间（0，1）内求满足于以下不等式的那些x的子

集：

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x}$$

2. 求以下方程在区间$[0, 2\pi]$上的所有的解。

$8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0$

3. 存在多少小于10^4的正整数，这些正整数的十进位记数法的所有数字都不相同？

4. 已知一曲边梯形，由曲线$y=0$，$x=a\,(a>0)$，$y=x^3$所围成。问曲线$y=x^3$在点$x=\dfrac{2a}{3}$的切线从该梯形上截下来三角形的面积占梯形的几分之几？

5. 求以下圆锥的高，此圆锥内接于半径为R的球，并具有最大的侧表面积。并问侧表面最大面积是多少？

生物土壤系和地理系

1. 解不等式：

$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

2. 求以下方程在区间$(-\pi, \pi)$内所有的解：

$$\frac{3(1-\sin 3x)}{\sin x - \cos 2x} = 2\cos 2x - 7 .$$

3. 存在多少个小于10^4的并能被4整除的正整数，在其十进位记数法中仅仅有0,1,2,3,5诸数字，并且同一数字不重复？

4. 过函数$y=(x+1)\sqrt{x}$的图象上一点作它的切线，使切线在该点的斜率等于2，而且此切线不通过坐标原点。求这切线与各坐标轴的交点。

5. 已知圆锥侧表面的面积为S，圆锥的底面半径应多大，才能使其体积最大？

地质系与经济系政治经济学专业

1. 解不等式

$$\sqrt{x^2+x}>1-2x。$$

2. 求以下方程在区间$\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$内的所有的解。

$\sin 7x+\cos^2 2x=\sin^2 2x+\sin x$。

3. 解方程

$$\sqrt{2-\log_x 9}=-\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}。$$

4. 计算曲边三角形的面积，此三角形位于第一象限，由曲线 $xy=4$，$x=y$，$y=2x$所围成。

5. 矢量$\vec{a}$与矢量$\vec{b}=(12,\ -16,\ -15)$共线，而且与轴O_z构成锐角。已知$|\vec{a}|=100$，求它的坐标。

（三）国立基辅大学

笔　　试

数学力学系

1. 正四棱锥的侧面对底面的倾角为φ，在正四棱锥里内接一圆柱（圆柱的一个底面在棱锥底平面里，而它的另一个底面的圆周和棱锥的每一侧面都有一个公共点）。圆柱底面的半径和它的高等于r。计算棱锥的体积。问角φ取什么值时棱锥体积最小？

2. 计算用函数

$y=\frac{|4-x^2|}{4}$和$y=7-|x|$的图象所围成的图形面积。

3. 解不等式

$$\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}>\sqrt{5}(\log_4 x^2-3).$$

4. 有多少个四位数，它的十进位制记法中含有不多于两个不同的数字？

物理系

1. 高为H的一正三棱锥外切于半径为r的一个球。计算棱锥的侧表面积。H为多大时，这个面积最小？求出面积的最小值。

2. 当x为何值时，函数

$y=\sin 2x+10\cos x-6x$ 的导数等于零？

3. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$$的极限。

4. 在一平面上给定两条互相垂直的直线，求平面上所有如下的点的集合，从这些点到已知各直线的距离的乘积等于这些距离的和。

口 试

1. 解方程

$$\sin|x|=|\sin x|.$$

2. 解不等式

$$\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}\geqslant 0.$$

3. 根据参变数a，方程$x^5=5x+2a$具有几个根？

4. 根据参变数a，方程组

$$\begin{cases}|x|+|y|=1,\\ x^2+y^2=a.\end{cases}$$ 具有几个根？

5. 在直角坐标系中画出如下的点集：

$$\left\{(x, y) \,\middle|\, \log_{(|x|-\frac{1}{2})}(x^2+y^2) \leqslant \log_{(|x|-\frac{1}{2})} 4\right\}$$

6. 求 a 的所有如下的值，对这些值，集合

$\{(x, y) \mid x^2+y^2+2x \leqslant 1\} \cap \{(x, y) \mid x-y+a=0\}$

只含有一个点。求这个点。

7. 作出如下函数的图象：

$$y=\begin{cases} 1-\sqrt{1-x^2}, & \text{若} x \leqslant 1, \\ 1+\log_{\frac{1}{2}} x, & \text{若} x>1. \end{cases}$$

8. 证明：函数

$$f(x)=\frac{2}{3} x^9-x^6+2 x^3-3 x^2+6 x-1$$

在 R 上单增。

9. 求 a 的如下的值，对这些值，函数

$$f(x)=\frac{a^2-1}{3} x^3+(a-1) x^2+2 x+1$$

对所有的 $x \in R$ 单增。

10. 设 x_1 和 x_2 分别是函数

$$f(x)=2 x^3-9 a x^2+12 a^2 x+1$$

的极大值点和极小值点，当 a 是何值时，$x_1^2=x_2$？

11. 当 a 为何值时，函数

$$f(x)=\frac{a}{3} x^3+(a+2) x^2+(a-1) x+2$$

具有负的极小值点？

12. x 为何值时，函数 $f(x)=\pi \sin \pi x+2x-4$ 的原函数为零？这个原函数当 $x=1$ 时，值为 3。

13．计算由函数

$$y=2+\sin x \text{ 和 } y=1+\cos^2 x$$

在区间$[0, \pi]$上的图象所围成的图形面积。

14．计算由函数 $y=1+\cos^2 x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$的图象和直线$y=1$所围成的平面图形围绕直线$y=1$旋转所得的旋转体体积。

15．序列

$$a_n=\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\text{是单调的吗？}$$

16．证明：对于任意自然数 $n\geqslant 2$，

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

17．计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$$

18．有多少个 5 位数，在它们的记法中，每个后边数字大于前边的数字？

19．直线l_1，l_2，l_3 平行且不在一个平面里，在l_1上取 m 个点，在l_2上取 n 个点，在l_3上取 k 个点。问有多少以这些点为顶点的三角形？

20．正多边形的所有的边和所有的对角线的长的平方和等于n^2r^2，其中 n 是多边形的边数，r 是外接圆的半径。证明这个结论。

21．证明：三角形各中线长的平方和与它的各边长平方和之比等于$\frac{3}{4}$。

22．计算等腰梯形面积，设它的高等于 h，从外接圆心看它

的一个腰的视角为 α。

23. 用三个分别等于一个三角形的各中线的线段，能作出一个三角形吗？

24. 用矢量 $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ 和 $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$ 构成一个平行四边形，求此平行四边形两条对角线的长，设 $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{q}|=3$ 和 $(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{4}$。

(四)国立乌拉尔大学

数学力学系

1. 一排椅子共有八把，坐有 5 个男孩和 3 个女孩。他们有多少种排法可以不使三个女孩都紧挨在一起？

2. 棱锥的底面是一个等腰三角形，它的腰等于 a，而两腰之间的夹角等于 α，棱锥的过三角形底边的侧面垂直于底平面，而其它两面和底平面组成角 φ。求棱锥的体积。

3. 解不等式

$$\log_{x3}\frac{|x-5|}{6x}+\frac{1}{3}\geqslant 0.$$

4. 从区间 $[-\pi,0]$ 中求 x 的所有如下的值，对这些值，函数 $f(x)=e^{\sin(\frac{\pi}{4}-2x)}$ 满足不等式组

$$\begin{cases} \ln f(x)>\frac{1}{2}, \\ f'(x)\leqslant -f(x). \end{cases}$$

物理系

1. 一个点沿坐标直线运动，使它的坐标 S 依据规律 $S=A$

$+B\sin\frac{\pi t}{2}$（A和B是常数）变化，求$t=1$时的加速度。

2. 一等腰三角形的周长等于$2p$，当它的各边为多长时，用这个三角形围绕着腰旋转所构成的旋转体的体积为最大？

3. 解不等式

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+4x+3}}\leqslant 3^{1+x}.$$

4. 在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]$中，当$x$是哪些值时，函数

$y=\sin x\cdot\cos 2x$满足于不等式

$$y''+y+2\sqrt{3}>0\ ?$$

口　　试

数学力学系

1. 对参变数a的每一个值，解不等式

$$\log_a(1-x^2)\geqslant 1.$$

2. 对参变数a的哪些正值，不等式

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\geqslant 32\text{成立？}$$

3. 解不等式组

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\cos x<\log_{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}x,\\ 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

4. 由曲线$y=e^{x-1}$，$y=0$，$x=0$　$x=2$所围成图形的面积小于2，这正确吗？

5. 圆扇形整个边界的长等于l，为使其面积为最大，扇形半径的长度应该是多少？

6. 当参变数a是哪些正值时，用曲线$y=\cos ax$，$y=0$，