高等院校经济管理学科数学基础教材

应用微积分

YingYong WeiJiFen

主编 黄秋灵 郭 磊

经济科学出版社
Economic Science Press

◎高等院校经济管理学科数学

应用微积分

主　编　黄秋灵　郭　磊
副主编　周玉珠　宋　浩
　　　　李善海　孙业朋

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

应用微积分/黄秋灵，郭磊主编．—北京：经济科学出版社，2013.9
ISBN 978-7-5141-3782-8

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①黄…②郭…　Ⅲ.①微积分-高等学校-教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第215717号

责任编辑：柳　敏　李晓杰
责任校对：靳玉环
版式设计：齐　杰
责任印制：李　鹏

应用微积分

主　编　黄秋灵　郭　磊
副主编　周玉珠　宋　浩　李善海　孙业朋
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010-88191217　发行部电话：010-88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
汉德鼎印刷厂印刷
华玉装订厂装订
710×1000　16开　28.5印张　550000字
2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷
印数：0001—5000册
ISBN 978-7-5141-3782-8　定价：49.00元

前 言

微积分是高等学校经济类、管理类各本科专业的学科基础课，是学习后续课程和解决某些实际问题的工具。随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高，微积分已渗透到包括经济、金融、管理、信息、社会等各个领域，人们越来越深刻地认识到微积分学习在高等教育中的重要性。微积分不仅是基础和工具，更重要的是一种思维模式，是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体，是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础。同时，微积分又是一种数学思想和文化，它显示着千百年来人类文化的缩微景象，是当代大学生必须具备的文化修养之一。

本教材是根据教育部颁布的财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲、教学改革的需要以及教学实际情况编写而成，是我校教研课题“独立学院经管类专业数学课程的教学改革与实践”研究成果之一，是作者依据多年丰富的教学实践经验和对高校经济管理类专业培养应用型人才的教学改革的认识，并汲取了国内外优秀教材的优点编写而成。

本书的编写以基础为主、够用为度、学以致用的原则，力求使学生在较为系统地掌握数学概念、思想和方法的同时，掌握微积分的基本理论，为今后的工作与学习打下必要的数学基础和良好的数学素养。

本书在内容安排和编写形式上，充分考虑应用型本科院校学生的特点，在引出概念、定理、公式方面，尽可能按照认识规律，从直观背景出发，提出问题，解决问题，水到渠成地得出结论，并把数学知识和教学方法融合为一体，既富有启发性又通俗易懂。为提高学生的学习兴趣，开

阔眼界，活跃思想和运用数学知识解决实际问题的能力，在书中提出了一些激发思维的问题和饶有趣味具有真实背景的实例，相信这些内容的设置，会有助于提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书主要内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分、多元函数的微积分、无穷级数、微分方程和差分方程。书中每节后配置相应的思考题和练习题，每章后配置复习题。在习题的配置上，既注意体现基本概念、基本理论和方法的习题，又注意加强应用性习题的配置。

本书适合作为高等院校经济管理类各专业微积分课程的教材或参考书，也适合报考经济学和管理学门类硕士研究生的读者参考。讲授全书共需118学时（不含习题课），还可根据专业需要和不同的教学要求删减部分内容。

本书由山东财经大学黄秋灵、郭磊任主编，由刘贵基教授审定和统稿。参加编写的人员还有周玉珠、宋浩、李善海、孙业朋。在编写过程中，参考和借鉴了国内外的有关资料，得到了许多同行专家的帮助以及经济科学出版社的大力支持，在此谨致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中能够不断完善。

编　者

2013年8月

目　录

第 1 章
函数与极限

函数是微积分学的研究对象,极限方法是研究函数的基本方法,而连续是函数变化的一个重要性态,它们是微积分的基础.本章介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

§1.1 函 数

在现实世界中,一切事物都在一定的空间中运动着.17 世纪初,数学家首先从对运动的研究中引出了函数这个数学中的最基本概念.在那以后的 200 多年里,这个概念在几乎所有的科学研究中占据了中心位置.

1.1.1 集合

1. 集合的概念

集合①是现代数学中一个重要的概念,可以说几乎全部现代数学就是建立在集合这一概念的基础之上的.所谓**集合**(set)就是按照某些规定能够识别的一些确定对象或事物的全体.构成集合的每一个对象或事物称为集合的**元素**.例如,一间教室里的学生构成一个集合,方程 $x^3-2x^2-5x+6=0$ 根的全体为一个集合,一直线上所有点的全体为一个集合.

---

① 集合论的创始人德国数学家乔治·康托(Georg Cantor,1845~1918)1897 年指出:把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象,也可以是思维的对象——放在一起,称为一个集合.

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为**有限集**，否则称为**无限集**．

集合一般有两种表示法：列举法和描述法．所谓列举法就是把集合的元素都列举出来，并写在括号$\{\quad\}$中．例如，A 是由 1，3，5，7，9 这五个数组成的集合，可表示成

$$A=\{1,3,5,7,9\}.$$

所谓描述法就是给出集合元素的特征，一般用

$$A=\{a\mid a\text{ 具有的特征}\}$$

来表示具有某种特征的全体元素 a 构成的集合．例如，由 1，3，5，7，9 这五个数构成的集合 A，也可表示成

$$A=\{2n-1\mid n<6,n\text{ 为自然数}\}.$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合．如果没有特别声明，以后提到的数都是实数．

习惯上，全体自然数的集合记作 N. 全体整数的集合记作 Z. 全体有理数的集合记作 Q. 全体实数集合记作 R，R^+、R^-、R^* 分别为全体正实数、负实数、除 0 以外的实数的集合．

设 A 和 B 是两个集合，若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**(subset)，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

若集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，集合

$$\{x\mid x\in R,x^2+1=0\}$$

就是一个空集，因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的．规定空集是任何集合的子集．

2. 区间和邻域

区间是在微积分中最常用的一类数集．设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为以 a、b 为端点的**开区间**(open interval)，记作 (a,b). 即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a、b 为端点的**闭区间**(closed interval)，记作 $[a,b]$. 即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$、$\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为以 a、b 为端点的**半开区间**，分别记作

$[a,b)$、$(a,b]$. 即

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 此外还有所谓**无限区间**. 例如,

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\},$$
$$(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b\}.$$

注意,这里的 $+\infty$(读作正无穷大)、$-\infty$(读作负无穷大)以及 ∞(读作无穷大)只是一种记号,既不能把它们视为实数,也不能对它们进行运算.

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

邻域也是一个经常用到的集合,以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**(neighborhood),记作 $U(a)$.

设 $\delta \in R^{+}$,则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 **δ 邻域**,记作 $U(a, \delta)$. 即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径(图 1-1).

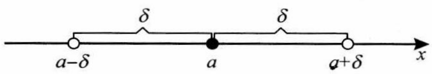

图 1-1

由于 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$,因此

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

在微积分中还常常用到集合

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这是在点 a 的 δ 邻域内去掉中心 a 所得到的集合,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $U(\hat{a}, \delta)$. 即

$$U(\hat{a}, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便,我们把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**,把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

1.1.2 函数

1. 函数的概念

在人们观察研究自然现象和社会现象的过程中,经常会涉及一些量,其中一些量在观察过程中始终保持一固定数值,称为**常量**,通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示;另一些量在观察过程中会不断变化,也就是可以取不同的数值,称为**变量**,通常用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示. 变量 x 可取的值之集合 X 称为变量的变化范围或取值范围,记作 $x \in X$.

如果将变量看成是可以在一非空数集内任意取值的量,则常量可看成是在单元素集合中取值的变量,因而常量可看成是变量的特例.

在同一个问题中,往往同时有几个变量,这些变量的变化也不是孤立的,而是相互联系并遵循着一定的变化规律.

例如,温度自动仪所记录的某地某天 24 小时气温变化曲线(图 1-2)描述了当天气温 T 随时间 t 的变化情形.

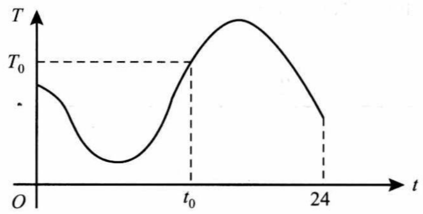

图 1-2

对任何时刻 $t_0 \in [0,24]$,可按图 1-2 上的曲线确定出一个对应的气温 T_0.

我们抽去上面例子中所考虑量的实际意义,它表达了两个变量之间的相依关系,这种相依关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1.1① 设 x,y 是两个变量,D 是一个给定的非空实数集,$x \in D$,f 是变量 x 与 y 之间的对应关系. 如果对于 D 内的变量 x 的每一个值,按照 f 在 R 内能确定唯一的变量 y 的值与之对应,则称 f 是定义在 D 上的**函数**(function),也称变

---

① 函数(function)一词,起用于 1692 年,最早见自莱布尼兹(Leibniz)的著作. 记号 $f(x)$ 则是由瑞士数学家欧拉(Euler)于 1724 年首次使用的.

量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**,数集 D 称为函数的**定义域**(domain).当定义域是区间时,则将该区间称为定义区间.因变量 y 与自变量 x 之间的这种对应关系,通常称为**函数关系**.

如果 $x_0\in D$,则称函数在 x_0 点有定义;如果 $x_0\notin D$,则称函数在 x_0 点没有定义.对于 $x_0\in D$,按照 f 与之相应的因变量 y 的值,称为函数在 x_0 点的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当自变量 x 取遍 D 内的各个数值时,对应的函数值全体构成的集合,称为函数的**值域**(range),记作 R_f.即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

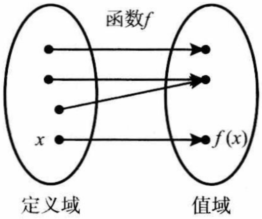

图1-3

图1-3简明地标注了函数的定义域、值域及对应关系等.

函数 $y=f(x),x\in D$ 中表示对应关系的记号 f 也可用其他字母.例如,用“F”、“φ”、“h”、“g”等,甚至有时用 $y=y(x),x\in D$ 表示函数,此时等号右边的 y 表示对应关系.如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数,则必须用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定,而在纯数学问题中,常常是只给出函数变量间的对应关系,而没有指明定义域,这时我们认为其定义域就是按对应关系有唯一确定实数与之对应的自变量 x 所能取的一切实数值构成的集合.例如,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$,函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-5)}$ 的定义域是 $(5,6)\cup(6,+\infty)$.

设函数 $y=f(x),x\in D$,以 D 内的每一点 x 为横坐标及相应函数值 $f(x)$ 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一点 $P(x,f(x))$,当 x 在 D 内变动时,点 P 便在坐标面上移动,所有这些点集合 $\{P(x,y)\mid x\in D,y=f(x)\}$,称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的**图**

形(图 1 – 4).

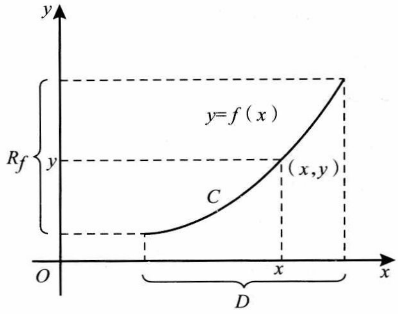

图 1 – 4

需要指出,函数的实质是指定义域 D 上的对应关系 f,即确定函数的要素是定义域 D 与对应关系 f. 因此,常用记号“$f(x), x\in D$”,或“$f(x)$”、“$y=f(x)$”等来表示定义在 D 上的函数,同时可得出对于两个函数,若它们的定义域和对应关系分别相同,则这两个函数相同,否则就是不同的.

例如,函数 $f(x)\equiv 1$ 与函数 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$,它们的定义域都是 $R=(-\infty,+\infty)$,且对 R 中的任一点 x,两者都对应着相同的实数 1,即有相同的对应关系,因此,它们是相同的函数. 但对于函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$,由于定义域不同,所以它们是不同的函数.

注 在函数 $y=f(x), x\in D$ 中 $f(x)$ 表示将对应关系 f 作用于 x. 这里 x 可指 D 中的一个点,也可指与 D 中某个点相当的数学表达式.

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f(2)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f[f(x)]$.

解 由 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,得

$$f(2)=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+x},$$

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}.$$

例2 设$f(x+1)=x^2-x$,求$f(x)$,$\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$.

解 令$x+1=t$,则$x=t-1$. 于是

$$f(t)=(t-1)^2-(t-1)=t^2-3t+2,$$

所以 $f(x)=x^2-3x+2$.

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}&=\frac{[(4+h)^2-3(4+h)+2]-(4^2-3\times4+2)}{h}\\&=\frac{h^2+5h}{h}\\&=h+5.\end{aligned}$$

2. 函数的表示法

函数的表示法是指描述因变量与自变量之间对应关系的方法,常用的表示法有解析法、列表法和图像法三种.

(1)解析法

即用解析表达式来表达自变量与因变量之间的对应关系. 如

①$y=x^2-5x+6$

②$y^3-4x^2=7$

③$y=\ln(1+x^2)$

都是解析法表示的函数,它将是我们今后表示函数的主要形式,解析法表示函数的优点是便于运算和分析.

需要特别指出的是,用解析法表示函数,不一定总是用一个式子表示,也可以在其定义域的不同部分用不同的式子表示一个函数. 例如,绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\-x & x<0\end{cases}$$

这种在函数定义域的不同部分,因变量与自变量之间的对应关系用不同的式子表示的函数,称为**分段函数**.

又如,取整函数

$$y=[x]$$

也是分段函数,其中$[x]$表示不超过x的最大整数. 例如,$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$,$[-0.2]=-1$. 这个函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为全体整数集$Z$,其图形是逐步升高的阶梯形(图1-5). 这类函数又称为阶梯函数.

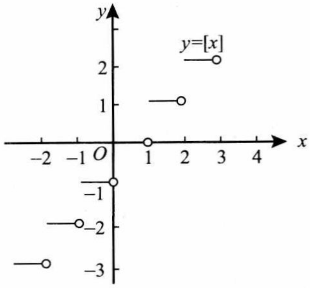

图 1－5

有许多实际问题可以用阶梯函数表示，如长途电话收费和时间的函数关系，出租车计价器显示的金额和行车里程的函数关系等．

例 3 已知 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f(1)$，$f(3)$，$f(x-1)$．

解 $f(1)=(x+2)\big|_{x=1}=1+2=3$，

$f(3)=x^2\big|_{x=3}=3^2=9$，

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2\\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3\\ x^2-2x+1, & 3<x\leqslant 5\end{cases}.$$

例 4 将函数 $f(x)=5-|3-x|$ 写成分段函数的形式．

解 因为 $|3-x|=\begin{cases}3-x, & x\leqslant 3\\ x-3, & x>3\end{cases}$，

所以，$f(x)=5-|3-x|=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 3\\ 8-x, & x>3\end{cases}$.

(2) 列表法

即用表格来表达自变量和因变量之间的对应关系．我们所用的各种数学表——平方表、开方表、三角函数表与对数表等，都是用列表法表示函数的例子．在统计学中，研究社会经济现象也常用这种列表法．列表法的优点是简单明了，便于应用，但也应看到它所给出的变量间的对应关系有时是不全面的．

(3) 图像法

即用图形来表达自变量与因变量之间的对应关系．如图 1－2 所示函数，两个变量之间的对应关系是某个坐标系中的一条曲线，这就是用图像法表示函数．在