线性代数与解析几何

学习指导

赵礼峰 丁秀梅 王晓平 编

科学出版社

线性代数与解析几何学习指导

赵礼峰　丁秀梅　王晓平　编

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书是与《线性代数与解析几何》(赵礼峰等编)配套的学习辅导书。全书共分7章，涉及行列式、矩阵、空间解析几何、向量、线性方程组和二次型等。每章内容分为五部分：教学基本要求、主要内容提要、考研要求、典型例题分析、自测题及参考答案。选题力求具有代表性，由浅入深，有些题目还给出多种解法，以开阔思路，一些题目后面加注了解题方法小结及注意事项，以提高读者在学习中举一反三、触类旁通的能力。读者通过自测题练习，可以进一步巩固所学知识，掌握各种题型的解题技巧。

本书内容丰富，例题题型丰富，方法较为全面，对学生学习起到较好的指导作用。本书可作为理工科大学生学习参考书，也可作为考研辅导书和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何学习指导/赵礼峰，丁秀梅，王晓平编. —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-038792-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①赵… ②丁… ③王… Ⅲ. ①线性代数–高等学校–教学参考资料②解析几何–高等学校–教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 236923 号

责任编辑：顾晋饴 于盼盼 黄 海/责任校对：刘亚琦
责任印制：肖 兴/封面设计：许 瑞

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年10月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2013年10月第一次印刷 印张：13 1/2
字数：272 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

“线性代数与解析几何”作为数学的基础以及科学技术的工具，在自然科学、社会科学以及工程技术等各个领域都有广泛而重要的应用。随着计算机科学和信息技术的快速发展，大量的工程技术问题要转化为线性问题处理，对线性代数与解析几何需求越来越多。由于该课程比较抽象，对于刚进大学的学生来说，难度不小，许多问题不知道如何分析、解答，或者对自己的解答没有把握，因此觉得学习起来非常困难。为此，我们编写了《线性代数与解析几何学习指导》一书。本书是教材《线性代数与解析几何》（赵礼峰等编，科学出版社出版）的配套用书，试图通过对解题方法的归纳和典型例题的分析，帮助学生正确理解线性代数与解析几何的基本概念、掌握解题方法和技巧，并通过适当自测练习巩固所学知识，培养学生运用线性代数与解析几何方法分析和解决问题的能力。

“线性代数与解析几何”是硕士研究生入学考试内容之一，为了帮助学生全面系统复习线性代数与解析几何内容，我们仔细研究了近年来全国硕士研究生入学试题，精选了部分真题作为典型例题和习题，分析、归纳和总结，以满足学生报考研究生的复习需要。

本书共分 7 章，每章内容分为五部分：教学基本要求、主要内容提要、考研要求、典型例题选讲、自测题及参考答案。在典型例题讲解中，力求从分析、比较入手，说明解决问题的切入点和应用技巧。在例题的选择上力求具有代表性，由浅入深，有些题目还给出多种解法，以开阔学生的思路，有些题目后面加注了解题方法小结及注意事项，以提高读者在学习中举一反三、触类旁通的能力。

本书内容全面，典型例题融入了作者多年的教学经验，对问题分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，可作为理工科院校大学生线性代数与空间解析几何课程学习、复习或参加研究生入学考试的参考用书，也可供任课教师参考。

本书第 1、2 章由赵礼峰编写，第 3、4、5 章由王晓平编写，第 6、7 章由丁秀梅编写，全书由赵礼峰统稿。在编写的过程中，得到南京邮电大学理学院李雷、王友国、包刚、唐加山、赵洪牛、孔告化等领导的大力支持与鼓励，得到了工程数学教学中心各位老师的支持与帮助，在此一并表示感谢。

限于作者水平，不当和错误之处在所难免，恳请各位同行和广大读者不吝赐教。

作者

2013 年 8 月 30 日

于南京邮电大学

目　　录

前言
第 1 章　行列式……1
1.1　教学基本要求……1
1.2　主要内容提要……1
1.2.1　n 阶行列式定义……1
1.2.2　行列式性质……2
1.2.3　克莱姆法则……2
1.3　考研要求……3
1.4　典型例题选讲……3
1.4.1　排列问题……3
1.4.2　行列式的计算……3
1.4.3　行列式性质的应用……17
1.5　自测题……22
1.6　巩固与提高……25
参考答案……26
第 2 章　矩阵及其运算……27
2.1　教学基本要求……27
2.2　主要内容提要……27
2.2.1　矩阵的运算……27
2.2.2　逆矩阵……29
2.2.3　矩阵的秩及其性质……30
2.2.4　初等变换与初等矩阵……30
2.2.5　矩阵的初等变换与秩……30
2.2.6　线性方程组解的判定……31
2.3　考研要求……31
2.4　典型例题选讲……31
2.4.1　矩阵运算……31
2.4.2　矩阵的逆及性质应用……38
2.4.3　矩阵行列式计算与证明……42

2.4.4 矩阵的初等变换与秩 ······ 46
2.4.5 线性方程组 ······ 49
2.5 自测题 ······ 51
2.6 巩固与提高 ······ 54
参考答案 ······ 55
第 3 章 空间解析几何与向量运算 ······ 57
3.1 教学基本要求 ······ 57
3.2 主要内容提要 ······ 57
3.2.1 向量的概念 ······ 57
3.2.2 向量的线性运算 ······ 58
3.2.3 向量的乘法 ······ 58
3.2.4 平面与直线 ······ 59
3.2.5 空间曲面及其方程 ······ 61
3.2.6 空间曲线及其方程 ······ 63
3.3 考研要求 ······ 63
3.4 典型例题选讲 ······ 64
3.4.1 向量及其运算 ······ 64
3.4.2 平面、直线及位置关系 ······ 66
3.4.3 空间曲面与空间曲线 ······ 77
3.5 自测题 ······ 79
3.6 巩固与提高 ······ 81
参考答案 ······ 81
第 4 章 n 维向量 ······ 83
4.1 教学基本要求 ······ 83
4.2 主要内容提要 ······ 83
4.2.1 向量的概念与运算 ······ 83
4.2.2 向量间的线性组合(线性表示) ······ 84
4.2.3 向量组的线性相关与线性无关 ······ 85
4.2.4 向量组的秩 ······ 86
4.2.5 向量空间 ······ 88
4.3 考研要求 ······ 89
4.4 典型例题选讲 ······ 90
4.4.1 判断向量组的线性相关性 ······ 90
4.4.2 已知一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关，讨论另一组向量 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ 的线性相关性 ······ 93

4.4.3　将一向量用一组向量线性表示 ……96
4.4.4　有关线性相关性与线性表示的证明题 ……100
4.4.5　关于向量组的秩和极大无关组的求解或证明 ……102
4.4.6　求过渡矩阵及向量的坐标 ……106
4.4.7　综合计算证明题 ……109
4.5　自测题 ……112
4.6　巩固与提高 ……114
参考答案 ……115
第 5 章　线性方程组 ……117
5.1　教学基本要求 ……117
5.2　主要内容提要 ……117
5.2.1　线性方程组的概念 ……117
5.2.2　线性方程组解的判定 ……118
5.2.3　线性方程组解的性质 ……118
5.2.4　线性方程组解的结构 ……119
5.2.5　与 AB=0 有关的两条重要结论 ……119
5.3　考研要求 ……119
5.4　典型例题选讲 ……120
5.4.1　解的判定，性质与结构 ……120
5.4.2　齐次线性方程组的基础解系、通解及应用 ……124
5.4.3　含有参数的线性方程组的求解 ……128
5.4.4　线性方程组求解的逆问题或反问题 ……130
5.4.5　同解方程问题、公共解问题 ……131
5.4.6　综合计算或证明题 ……134
5.4.7　线性方程组在几何上的应用 ……137
5.5　自测题 ……138
5.6　巩固与提高 ……141
参考答案 ……143
第 6 章　矩阵相似对角化 ……145
6.1　教学基本要求 ……145
6.2　主要内容提要 ……145
6.2.1　特征值与特征向量的定义 ……145
6.2.2　特征值与特征向量的求法 ……145
6.2.3　特征值与特征向量的性质 ……146
6.2.4　相似矩阵 ……146

6.2.5 相似矩阵的性质 ……146
6.2.6 矩阵的相似对角化 ……146
6.2.7 矩阵相似对角化的步骤 ……147
6.2.8 内积和正交向量组 ……147
6.2.9 施密特正交化 ……147
6.2.10 正交矩阵 ……148
6.2.11 实对称矩阵的相似对角化 ……148
6.3 考研要求 ……149
6.4 典型例题选讲 ……149
6.4.1 矩阵的特征值与特征向量的定义、性质和计算 ……149
6.4.2 相似矩阵和矩阵的相似对角化 ……156
6.4.3 实对称阵的相似对角化 ……165
6.4.4 向量空间的正交性 ……168
6.4.5 相似对角化的综合应用 ……170
6.5 自测题 ……174
6.6 巩固与提高 ……176
参考答案 ……177
第 7 章 二次型 ……179
7.1 教学基本要求 ……179
7.2 主要内容提要 ……179
7.2.1 二次型的概念 ……179
7.2.2 矩阵的合同 ……179
7.2.3 二次型的标准形、规范形 ……181
7.2.4 化二次型为标准形 ……182
7.2.5 实二次型的正定性 ……183
7.3 考研要求 ……184
7.4 典型例题选讲 ……184
7.4.1 二次型有关概念及性质 ……184
7.4.2 化二次型为标准形的方法 ……188
7.4.3 二次型矩阵及其标准形中参数的求法 ……192
7.4.4 一般二次曲面方程的化简 ……194
7.4.5 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明 ……196
7.5 自测题 ……201
7.6 巩固与提高 ……203
参考答案 ……203

第 1 章　行　列　式

1.1　教学基本要求

(1) 掌握二、三阶行列式的计算方法，掌握三阶行列式的特点。

(2) 理解排列的奇偶性，会计算排列的逆序数，并判断排列的奇偶性。

(3) 掌握 n 阶行列式的 3 个特点：

① n 阶行列式共有 $n!$ 项；

② 每项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积；

③ 当该项的行下标按自然顺序排列时，每项的正负号都取决于位于 n 个元素的列下标。当列下标为奇排列时，取负号，当列下标为偶排列时，取正号。

(4) 掌握行列式的基本性质及基本计算方法，并利用性质计算有关行列式的值。

(5) 掌握行列式的依行列展开定理，并会利用此性质计算有关问题。

(6) 掌握范德蒙行列式的基本形式及其值，并利用其计算行列式的值。

(7) 掌握上(下)三角形行列式的值等于对角线元素的乘积。

(8) 掌握克莱姆法则及齐次线性方程组有非零解的条件，会用克莱姆法则解线性方程组。

1.2　主要内容提要

1.2.1　n 阶行列式定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}, i, j=1,2,\cdots,n$ 组成的 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中求和 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 是对所有 n 阶排列进行的；a_{ij} 称为该行列式的 $(i,\ j)$ 元素。$D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ 是一个数值，计算行列式就是把这个数求出来。

1.2.2 行列式性质

(1) 将行列式转置则值不变。

(2) 某一行(列)有公因子可提出。

(3) 当某一行(列)每个元素都可以表示成两个元素之和时，则行列式可以分成两个行列式之和。

(4) 交换行列式的两行(两列)值反号。

(5) 如果行列式两行(两列)对应元素成比例，则值为零。

(6) 将行列式一行(列)的倍数加到另一行(列)上，值不变。

(7) 余子式和代数余子式　在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的元素，剩余的元素按原来的次序构成的一个 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

由此得到展开按行列展开定理，设 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases};\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases};\quad i,j=1,2,\cdots,n。$$

1.2.3 克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程构成的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

且它的系数行列式 $D\neq 0$ 时，则方程组有唯一解，这个解为 $\left(\dfrac{D_1}{D},\dfrac{D_1}{D},\cdots,\dfrac{D_1}{D}\right)^{\mathrm{T}}$，其中 D 是系数行列式，D_i 是把系数行列式的第 i 列换成常数项所得的行列式。

对于齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$ 有非零解(仅有零解)当且仅当系数行列式 $D = 0$ ($D \neq 0$)。

1.3 考 研 要 求

(1) 了解行列式的概念，掌握行列式的性质。

(2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式。

1.4 典型例题选讲

1.4.1 排列问题

这类题目主要是计算排列的逆序数以及判断排列的奇偶性，要注意对换改变排列的奇偶性。

例 1.1 已知 $14i5j62$ 是 7 阶奇排列，求 i，j 的值。

分析 一个排列奇偶性是由它的逆序数的奇偶性所决定，并且 n 阶排列是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列，本题中 i，j 只能取 3 或者 7 之一。

解 由于该排列是 7 阶排列，故 i=3，j=7 或者 i=7，j=3，因为

$\tau(1435762)=7$，故 1435762 是奇排列，所以 i=3，j=7。

例 1.2 已知 n 阶排列 $i_1 i_2, \cdots, i_n$ 的逆序数是 k，求排列 $i_n i_{n-1}, \cdots, i_1$ 的逆序数。

分析 任意两个数字在前一个排列中不构成逆序，在后一个排列中一定构成逆序，反之亦然。

解 对于任意一对数 i_s, i_t 或者在排列 $i_1 i_2, \cdots, i_n$ 中构成逆序，或者在排列 $i_n i_{n-1}, \cdots, i_1$ 中构成逆序，两者必居其一，故两个排列的逆序数之和为 n 个元素取两个元素的组合数，即为 $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$，于是排列 $i_n i_{n-1}, \cdots, i_1$ 的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2} - k$。

1.4.2 行列式的计算

(1) 用定义计算行列式的值。当行列式只有很少几个元素不为零时，可以用定义解。

(2) 化三角法：通过适当的变换且不改变行列式值而把行列化为三角行列式，

从而得到行列式的值。

上(下)三角形行列式的值是主对角元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

形如

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

结论：以主对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

以次对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于次对角线上元素的乘积，并带符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

(3) 化零降阶法：取定一行(列)，先将这行(列)的元素消到只有一个或很少几个不为零，再按照这行(列)展开，例如

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 3 & -1 \\ 2 & 2 & x & 4 \\ 3 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}。$$

解　将第一列的-1倍加到其余各列，再按照第一行展开

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x+1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & x-2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 4 & 0 \\ 0 & x-2 & 2 \\ 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+1)[(x-2)(x-3)-2] = (x+1)(x-1)(x-4)$$

方法 1 用定义计算(证明)

例 1.3 用行列式定义计算 $D_5=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0\\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0\end{vmatrix}$。

解 由定义，行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$。$j_1\neq 2,3$ 时，$a_{1j_1}=0$，当 $j_1=2$，则 $j_4=3$ 时，该项才不为零，但是 j_5 只能取 1，4，5 之一，这时 $a_{5j_5}=0$，所以该项值为零，总之，D_5 的每一项都为零，所以 $D_5=0$。

评注 本例是从一般项入手，将行标按标准顺序排列，讨论列标的所有可能取到的值，并注意每一项的符号，这是用定义计算行列式的一般方法。

例 1.4 计算行列式 $\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ x & 1 & 0 & x\end{vmatrix}$ 展开式中 x^4 与 x^3 的系数。

解 按行列式的定义，行列式中每一项都是不同行不同列 4 个元素的乘积。那么要构成 x^4 的项中必须各行各列都要含 x，因此只能是 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x\cdot x\cdot x\cdot x=2x^4$，故 x^4 的系数应该是 2。

对于 x^3，可判断该项必不含 a_{11}，若含 a_{12}，则可由 $a_{24}a_{33}a_{41}$ 或 $a_{21}a_{33}a_{44}$ 构成；若不含 a_{12}，则可由 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 构成，可见含 x^3 的项共有三项，即 $(1)^{\tau(2431)}a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}=x\cdot(-1)\cdot x\cdot x=-x^3$，$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x\cdot 1\cdot x\cdot x=-x^3$，$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-2\cdot x\cdot x\cdot x=-2x^3$。因此 x^3 的系数应该是 -4。

本题主要考查行列式展开式每一项及其符号。

方法 2 化行列式为上(下)三角形行列式

利用将一行(列)的倍数加到另一行(列)上，行列式值不改变的性质，一般从第 1 列开始，将 a_{11} 元素下方的所有元素化为零，再将第 2 列的 a_{22} 下方元素化为零，以此类推，即可化为上三角形行列式进行计算。

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$ 的值，其中 $a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$。

解 第 i 行提出 a_{i-1} $(i=2,3,\cdots,n+1)$，得

$$D=a_0a_1\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{r_1+r_j(-1)} \prod_{j=1}^{n}a_j\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}a_j(a_0-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j})$$

方法 3 利用行列式性质计算

例 1.6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$。

分析 此题所有元素都是平方数，并且上下相邻的两个数相差 1，故可以从最后一行开始，每一行减去上一行，得到的行列式 2，3，4 行成为公差是 2 的等差数列，后行减去前行，即得每一个元素都是公差 2。

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+r_1(-1)]{\substack{r_4+r_3(-1)\\ r_3+r_2(-1)}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_4+r_3(-1)\\ r_3+r_2(-1)}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\text{。}$$

一般地有

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 \\ (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 & (a+6)^2 \end{vmatrix}=0$$

例 1.7 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}。$$

分析　因为每一列元素之和都是 8，故先将各行都加到第 1 行，提出公因子 8，再计算。

解

$$D_4\xlongequal{r_i+1\cdot r_1(i=2,3,4)}\begin{vmatrix}8&8&8&8\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,3,4)}8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=512$$

推广　具有每列(行)和都等于数 a，则将每行(列)都加到第 1 行(列)，提出公因子 a，再计算。

$$D_4=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3$$

更一般地有

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b&b\\b&a&b&\cdots&b&b\\b&b&a&\cdots&b&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b&b&b&\cdots&a&b\\b&b&b&\cdots&b&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 1.8　计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}。$$

分析　要先考虑 $x\neq0$，$y\neq0$ 情况，一个等于零时，有两列一样，故值为零。可以通过增加一行一列而不改变行列式的值。

解法 1　当 $x\neq0$ 且 $y\neq0$ 时，将第 1 行的(−1)倍加到其余各行得到

$$D_4=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ -x & -x & 0 & 0\\ -x & 0 & y & 0\\ -x & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

再将第 2 列的(−1)倍，第 3 列的$\frac{x}{y}$倍，第 4 列的$-\frac{x}{y}$倍都加到第 1 列得到

$$D_4=\begin{vmatrix}x & 1 & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

当$x=0$或$y=0$时，$D_4=0$也成立。故$D_4=x^2y^2$。

解法 2　增加一行一列使行列式值不改变，然后利用行列式性质计算

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,3,4,5)}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -x & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & y & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$=x^2y^2\qquad(x\neq 0,\ y\neq 0)$$

当$x=0$或$y=0$时，$D_4=0$。

方法 4　利用行列式的展开定理计算

此类题目利用行列式的展开定理以及余子式和代数余子式的概念计算或者证明。

例 1.9　设$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & 6\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 7\\ 3 & 4 & 1 & 8\end{vmatrix}$，求$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中$A_{ij}$是$D$中元素$a_{ij}$

的代数余子式。

分析 由于第 2 行的元素均为 1，故 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 相当于第 2 行元素与第 4 行对应元素乘积的代数和。

解 $$\begin{aligned} A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} &= 1\times A_{41}+1\times A_{42}+1\times A_{43}+1\times A_{44} \\ &= a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}=0 \text{。} \end{aligned}$$

本题利用行列式一行元素与另一行对应元素代数余子式乘积的代数和等于零的性质。

例 1.10 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \end{vmatrix}$，求此行列式的所有代数余子式之和 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} A_{ij}$ 。

分析 根据行列式一行元素与另一行对应元素代数余子式乘积的代数和等于零性质，第 2,3,4 各行的代数余子式之和均为零，而第 1 行元素都是 1，所以第 1 行元素的代数余子式之和即为行列式的值。

解 由于第 1 行元素都是 1，故第 2,3,4 各行代数余子式之和都为零，于是有

$$\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij} = a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13} + a_{14}\ A_{14} = D$$

将各行减去第 1 行后，再按照第 4 列展开得 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} A_{ij} = D = (1-a)(1-b)(1-c)$ 。

例 1.11 已知 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$。其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

分析 注意到第 2 行与第 4 行元素的特点，可以按照第 4 行展开，以及用第 2 行元素与第 4 行对应元素的代数余子式相乘。

解 将 D 按第 4 行展开，以及将第 2 行元素乘以第 4 行对应元素的代数余子式之和，由行列式的展开定理及推论有

$$\begin{cases} A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45})=27 & (1) \\ 2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+A_{44}+A_{45}=0 & (2) \end{cases}$$

解(1)，(2)得 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$， $A_{44}+A_{45}=18$ 。