复变函数

目　录

第一章　复　　数

这里，我们将复习已经学过的复数及平面点集。它们都是学习复变函数的必要准备。

本章的基本要求：理解复数及点集中的一些概念，掌握运算的基本性质，正确鉴别复平面上常见点集的几何意义。

§1·1　复　　数

1. 复数

形如$x+iy$的数，称为复数。记为

$$z=x+iy\ (\text{或}=x+yi) \tag{1}$$

式中的x，y是任意实数，i是虚数单位。

在（1）式中，x称为复数z的实部，记为$x=\mathrm{Re}z$（Re来自拉丁字realis的开头两个字母），y称为复数z的虚部，记为$y=\mathrm{Im}z$（Im来自拉丁字母imayinare的开头两个字母），于是

$$z=\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}z \tag{2}$$

在（2）式中，当$\mathrm{Im}z=0$时，则$z=\mathrm{Re}z$，即z为实数。可见实数是复数的特别情况；当$\mathrm{Im}z\neq 0$时，将$z=\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}z$称为虚数；当$\mathrm{Re}z=0$时，将$z=i\mathrm{Im}z$称为纯虚数。

复数相等　设$z_1=x_1+iy_1$，　$z_2=x_2+iy_2$，　当且仅当$x_1=x_2$及$y_1=y_2$时，则称z_1与z_2相等。

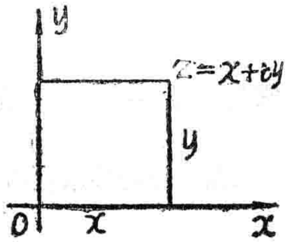
共轭复数　设$z=x+iy$，称$x-iy$为z的共轭复数，记为$\bar{z}=x-iy$.

2. 复数的几何表示

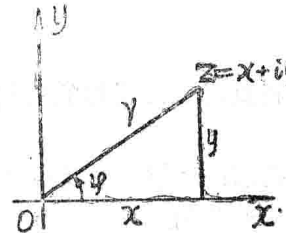
1）用点表示复数　规定复数$z=x+iy$用平面上给定的直角坐标系xoy中的点表示，这个点的横标等于x，纵标等于y。即z用点(x, y)表示（图1·1），根据这一规定，对任何一个复数，在平面xoy上有一个唯一的点与之对应。反之，平面上的任何一点，有唯一的一个复数与之对应。这就建立了复数$z=x+iy$与平面xoy上的点(x,y)之间的一一对应。

将所有的复数组成一个数集，平面xoy上的一切点组成一个点集，这两个集合之间是一一对应的。鉴于这样，今后将复数与点，复数集与平面点集不加区别，视为一回事。

在平面xoy上，如果z落在x轴上，则Imz=0，得 z=Rez，即 x 轴上的点表示的是实数，将x轴称为实轴；如果z落在y轴上，则 Rez=0，得 z=iImz，即y轴上的点表示的是纯虚数，将y轴 称 为 虚 轴。对于原点，既作为实数又作为纯虚 数的唯一数，这样我们将表示复数的平面xoy，称为复平面。常以字母z，w，α，β分别表示为z 平面，w平面，……等。



（图1·1）



（图1·2）

2）用向量表示复数　　设z=x+iy 是复平面上的任一点，向 量 $\overline{OZ}$ 是 连 接 原点（作始点），与点Z（作终点）的有向线段，x，y分别是向量$\overline{OZ}$在实轴与 虚 轴上的分量，这样，Z与向量$\overline{OZ}$构成了一一对应。我们规定：一向量经过平移后所得的 向 量 与原向量相同。这就得到复数与向量是一一对应的。因此，今后，将复数与向量不加区别视为一回事。

下面，给出复数z的另一种表示式：

在复平面xoy上，设有向量 z=x+iy（图1·2）用 $|z|=r$表示向量 z的大小，称为 z的模，用Argz=φ表示向量z的方向（即向量 z 与实轴正向的夹角），称为 z的辐角。

由图1 · 2得关系：

$$x=r\cdot \mathrm{CoS}\varphi \qquad y=r\cdot \mathrm{Sin}\varphi$$

所以
$$z=r(\mathrm{CoS}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)$$

即
$$z=|z|(\mathrm{CoSArg}z+i\mathrm{SinArg}z) \tag{3}$$

这就是用向量z的大小、方向表示的复数.将它称为复数的三角函数表示式，简 称 为 三角式。

对于复数的表示法，再应用尤拉（Euler）公式：　$e^{i\varphi}=\mathrm{CoS}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi$

从（3）式，得

$$z=|z|\cdot e^{i\mathrm{Arg}z} \tag{4}$$

称（4）式为复数的指数表示式，简称为指数式.

注：在（3）式中，要使Argz有意义，必须假定 $z\neq0$，所以，复数凡用三角式表示时，均满足 $z\neq0$；但当z=0时，$|z|=0$.

尤拉公式将在第三章的指数函数中介绍。

我们知道，Argz是无穷多值的，且其中的任二值之差是2π 的整数倍，在Argz 的一切值中，满足$-\pi<\arg z\leqslant\pi$的值argz称为Argz的主值，于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{5}$$

注：有时为了某种方便，也用$\arg z$表示$\operatorname{Arg} z$的某一个确的值。

下面再看$\operatorname{Arg} z$的计算．从（5）式可知，$\operatorname{Arg} z$的计算，归结为$\arg z$的计算，对此，我们的算法为：

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & (x>0)\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi & (x<0,\ y\geqslant 0)\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi & x<0,\ y<0)\end{cases}$$

其中 $$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

当$y>0$，$x=0$时，$\arg z=\dfrac{\pi}{2}$；当$y<0$，$x=0$时，$\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$

例1·1， 设$z_1=-2+2i$； $z_2=-1-\sqrt{3}i$； $z_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$。

试求 $\operatorname{Arg} z_k$（$k=1$、2、3）？

解：（1） 因$\arg z_1=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{-2}+\pi=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}$。

所以 $\operatorname{Arg} z_1=\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi$ （$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。

（2） 因 $\arg z_2=\operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}-\pi=\dfrac{\pi}{3}-\pi=-\dfrac{2\pi}{3}$。

所以$\operatorname{Arg} z_2=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ （$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）

（3） $\arg z_3=\operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}/2}{1/2}=(-\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$。

所以 $\operatorname{Arg} z_3=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ （$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）

由图1·2，可得复数z的模$|z|$与x，y之有下列关系；

1）$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

2） $|z|\geqslant|x|$， $|z|\geqslant|y|$， $|z|\leqslant|x|+|y|$；

3） $-|z|\leqslant x\leqslant|z|$， $-|z|\leqslant y\leqslant|z|$。

设复数Z_1及Z_2用三角式表示为：

$$z_1=|z_1|(\cos \operatorname{Arg} z_1+i\sin \operatorname{Arg} z_1)$$

$$z_2=|z_2|(\cos \operatorname{Arg} z_2+i\sin \operatorname{Arg} z_2)$$

如果$z_1=z_2$，则$|z_1|=|z_2|$及$\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_1$ 。

这里，对于$\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2$，理解为：在$\operatorname{Arg} z_1$与$\operatorname{Arg} z_2$中，任何一个取定一个值以后，另一个所取的无穷多个值中，可以找到一个值与之相等。

例1·2，将下列复数表示成三角式、指数式：

$2i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; $-i$, $-4+3i$.

解： 1）.因 $|2i|=2$, $\operatorname{Arg}(2i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm1\pm2, \cdots)$.

所以 $2i=2(\operatorname{CoS}\frac{\pi}{2}+i\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2})$ 及 $2i=2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$;

2）. $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=1$, $\operatorname{Arg}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

$(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\operatorname{CoS}(-\frac{\pi}{6})+i\operatorname{Sin}(-\frac{\pi}{6})$ 及 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{6}}$;

3） 因 $|-i|=1$, $\operatorname{Arg}(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

所以 $-i=\operatorname{CoS}(-\frac{\pi}{2})+i\operatorname{Sin}(-\frac{\pi}{2})$ 及 $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

4） $|-4+3i|=5$, $\operatorname{Arg}(-4+3i)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2k\pi$

$(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

所以 $-4+3i=5[\operatorname{CoS}(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4})+i\operatorname{Sin}(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4})]$ 及

$-4+3i=5\cdot e^{i(-\operatorname{aretg}\frac{3}{4})}$.

练 习 一

1. a、b是什么数时，$a+bi$ 是实数，是虚数，是纯虚数；
2. 已知复数：$1+\sqrt{3}i$, -2, $\sqrt{3}-i$.
   1）试在复平面上描出这些复数的点；
   2）试写出这些复数的三角式，指数式。
3. 已知复数：

   $z_1=3\sqrt{2}(\operatorname{CoS}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{Sin}\frac{\pi}{4})$, $z_2=8(\operatorname{CoS}\frac{11\pi}{6}+i\operatorname{Sin}\frac{11\pi}{6})$.

   $z_3=9(\operatorname{CoS}\pi+i\operatorname{Sin}\pi)$, $z_4=6(\operatorname{CoS}\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{Sin}\frac{4\pi}{3})$。

   1）试在复平面上描出这些复数的点；
   2）试写出这些复数的代数式。
4. 设复数 $z=x+iy$（x、y都是实数），试求下列各点的Rez, Imz?
   1） $(x+y)-xyi=-5+24i$;
   2） $2x^2-5x+2+(y^2+y-2)i=0$.

§1·2 复数的运算

1. 四则运算

设$z_1=x_1+iy_1$， $z_2=x_2+iy_2$。

1）加法 规定复数

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

为z_1与z_2的和。求和的方法称为加法。

容易验证复数的加法满足加法定律：

1^0 交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$

2^0 结合律 $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$。

2）减法 规定加法的逆运算为复数的减法，称

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

为z_1与z_2的差。

3）乘法 规定复数

$$z=z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)。$$

为z_1与z_2的积。求积的方法称为乘法。

容易验证，复数的乘法满足乘法定律：

1^0 交换律 $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；

2^0 结合律 $z_1(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)z_3$；

3^0 分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$。

特例：若$z_1=0+i$。 $z_2=0+i$ 由复数的乘法规定。

则$i\cdot i=-1$， 记$i\cdot i=i^2$，

所以 $i^2=-1$。

如果，将复数$z=x+iy$视为两个实数x、y及虚单位i，通过i与y的乘积再同x的和的二项式，那么，关于复数相乘的积，可这样计算：按多项式的乘法及$i^2=-1$性质，即得。

4）除法 规定乘法的逆运算为复数的除法，称

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

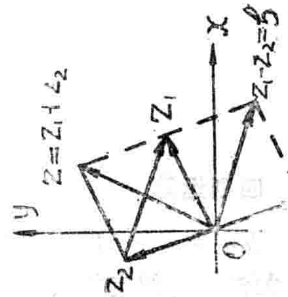
为z_1与z_2的商。

关于复数相除的商，可这样计算：用$\frac{z_1}{z_2}$的分母z_2的共轭复数$\overline{z_2}=x_2-iy_2$，同乘以分子，分母，，再将$z_1\cdot\overline{z_2}$，$z_2\cdot\overline{z_2}$按多项式相乘及$i^2=-1$的性质即得。

运算的几和意义

1）和与差　用向量z_1，z_2为边构成的平行四边形中，过点O的对角线oz为z_1与z_2的和（即平行四边形法则）。另一条对角线$\overline{z_2z_1}$为z_1与z_2的差（图1·3）。

z_1与z_2的差，还可用向量z_1与$-z_2$为边构成的平形四边形中，过点O的对角线$\overline{o\zeta}$表示（图1·3）即$\overline{o\zeta}=z_1-z_2$。



（图1·3）

由图1·3可知，向量$\overline{z_2z_1}$与$\overline{o\zeta}$平行、同向、相等所以，得

$|z_1-z_2|=|\overline{z_2z_1}|$，$\arg(z_1-z_2)$同向量$\overline{z_2z_1}$与实轴正向的夹角相等。

从图1·3可得：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \text{ 及 } |z_1-z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|$$

（证明见后）即三角形中两边之和不小于第三边，两边之差不大于第三边。

2）积与商　设

$$z_1=|z_1|(\mathrm{Cos}\,\mathrm{Arg}z_1+i\mathrm{Sin}\,\mathrm{Arg}z_1)$$

$$z_2=|z_2|(\mathrm{Cos}\,\mathrm{Arg}z_2+i\mathrm{Sin}\,\mathrm{Arg}z_2)$$

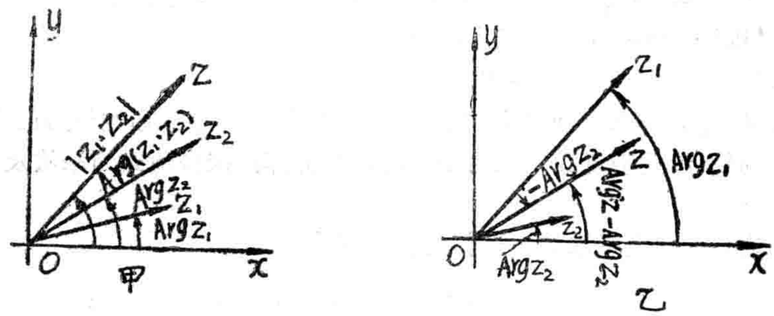
由$z_1\cdot z_2=|z_1||z_2|[\mathrm{Cos}(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)+i\mathrm{Sin}(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)]$

得　$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$　及

$$\mathrm{Arg}z_1\cdot z_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \qquad (6)$$

于是，z_1与z_2乘积的几何意义为：$z_1\cdot z_2$所对应的向量是将向量z_1伸长$|z_2|$倍，再把它旋转$\mathrm{Arg}z_2$角度(图1·4甲)。

注　（6）式理解为：对于$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)$的任一值，一定有$\mathrm{Arg}z_1$及$\mathrm{Arg}z_2$的各一值与它对应，使得等式成立，反过来也是一样。



（图1·4）

再由　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\mathrm{Cos}(\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2)+i\mathrm{Sin}(\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2)]$$

得　$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

及
$$\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2 \tag{7}$$

于是z_1与z_2的商的几何意义为：z_1/z_2所对应的向量是将向量z_1伸长$\frac{1}{|z_2|}$倍，再将它旋转$-\mathrm{Arg}z_2$角度(图1·4乙)。

注　(7)式理解与(6)式理解同。

练　习　二

1. 计算下列各题

1) $(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)-(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)-[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})i]$.

2) $[(a+b)+(a-b)i]-[(a-b)-(a+b)i]$.

3) $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{3}i)(x-2-\sqrt{3}i)$.

4) $\dfrac{69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i}{3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i}$.

2. 试求下列复数的模：

1) $([ac-bd)+i(ad+bc)$.

2) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$.

2. 乘幂和方根

1)乘幂　n(正整数)个相等复数z的连乘，称为z的n次乘幂。记为z^n。设$z=|z|(\cos\mathrm{Arg}z+i\sin\mathrm{Arg}z)$，则
$$z^n=|z|^n[\cos(n\mathrm{Arg}z)+i\sin(n\mathrm{Arg}z)]$$
特例，当$|z|=1$时，得：
$$(\cos\mathrm{Arg}z+i\sin\mathrm{Arg}z)^n=\cos(n\mathrm{Agrz})+i\sin(n\mathrm{Arg}z).$$
这个式子称为棣美弗(De moiVre)公式。

关于乘幂z^n的n作如下推广：

设　$n=0$，　$z^0=1$；

$n=-k$，k(>0的)整数，　约定 $z^{-k}=\dfrac{1}{z^k}$.

由于
$$\frac{1}{z^k}=\frac{1}{|z|^k[\cos(k\mathrm{Arg}z)+i\sin(k\mathrm{Arg}z)]}$$
$$=|z|^{-k}[\cos(-k\mathrm{Arg}z)+i\sin(-k\mathrm{Arg}z)]$$
所以　$z^{-k}=|z|^{-k}[\cos(-k\mathrm{Arg}z)+i\sin(-k\mathrm{Arg}z)]$.

于是，对于任意的整数m，我们有
$$z^m=|z|^m[\cos(m\mathrm{Arg}z)+i\sin(m\mathrm{Arg}z)].$$

例1·3　应用棣美弗公式，可求$i^2=-1$.

解　因
$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

所以，
$$i^2=\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

由性质　$i^2=-1$，再应用乘法定律，可得：

$i^3=i^2\cdot i=-i$,　　$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$.

$i^5=i^4\cdot i=i$,　　$i^6=i^4\cdot i^2=-1$.

………

一般有　$i^{4m}=1$，$i^{4m+1}=i$，$i^{4m+2}=-1$，$i^{4m+3}=-i$。

式中的m为整数。

例1.4　已知$(1+i)^n=(1-i)^n$，求n?

解：∵　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

由已知，有
$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

得
$$\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}$$

所以　$\sin\frac{n\pi}{4}=0$，　即　$\frac{n\pi}{4}=k\pi$。

故　$n=4k\pi$　（$k=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$）。

2）方根　设n为不小于2的整数，满足方程
$$w^n=z \tag{8}$$
的解称为z的n次方根，记为　$w=\sqrt[n]{z}$

下面证明，若$z=|z|(\cos\mathrm{Arg}z+i\sin\mathrm{Arg}z)$

则
$$w=\sqrt[n]{z}={}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}z}{n}+i\sin\frac{\mathrm{Arg}z}{n}\right) \tag{9}$$

式中的　${}_{+}\sqrt[n]{|z|}$　表示$|z|$的n次算术根。

事实上，设　$w=|w|(\cos\mathrm{Arg}w+i\sin\mathrm{Arg}w)$

由（8）式，有：
$$|w|^n[\cos n\mathrm{Arg}w+i\sin n\mathrm{Arg}w]=|z|(\cos\mathrm{Arg}z+i\sin\mathrm{Arg}z)$$
根据复数的相等，得：
$$|w|^n=|z|,\qquad n\mathrm{Arg}w=\mathrm{Arg}z$$

即　$|w|={}_{+}\sqrt[n]{|z|}$，　　$\mathrm{Arg}w=\frac{\mathrm{Arg}z}{n}$

于是 $w=\sqrt[n]{z}={}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}z}{n}\text{—}i\sin\frac{\mathrm{Arg}z}{n}\right)$

在（9）式中，$\frac{\mathrm{Arg}z}{n}$区别了$\sqrt[n]{z}$ 的n个不同的值，如果

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$$

（$-\pi<\arg z\leq\pi$，$k=0$，±1，±2，……）则$\sqrt[n]{z}$的n个值为：

$$w_k={}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right) \tag{10}$$

式中$k=0$，1，2，……，（$n-1$）。

对于（10）式说明两点：

1° k虽然可取任意整数，但当k取0，1，2，……，（$n-1$）以外的其它值时，$\sqrt[n]{z}$的相应值将重复出现在$k=0$，1，2，……，（$n-1$）时的值。例如，取$k=n$，由（10）式得：

$$w_n={}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2n\pi}{n}\right)$$

$$={}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\arg z}{n}+2\pi\right)\right]$$

$$={}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n}\text{—}i\sin\frac{\arg z}{n}\right)=w_0$$

2° $\sqrt[n]{z}$的几个值：w_0，w_1，w_2……，w_{n-1}的几何意义是以原点为心，${}_{+}\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的园的内接正n边的形的顶点（见下面例1.6）。

例1·5 解方程 $z^5-1=0$

解： 因 $1=\cos o+i\sin o$。

所以 $z^5=\cos o+i\sin o$。

于是 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$，$k=0$，1，2，3，4，为所求方程的根，具体写出这五个根为：

$k=0$，　　$z_0=\cos\frac{0}{5}+i\sin\frac{0}{5}$

$k=1$，　　$z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，

$k=2$，　　$z_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$，

$k=3$，　　$z_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$，

$k=4$，　　$z_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$。

例1·6计算$\sqrt[6]{\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}i}$，并就算得的值给出几何说明。

解： 因 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

则：$w_k=\left(\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\right)_k=\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6}$

式中 $k=0，1，2，\cdots\cdots，5$，所以，$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$ 的6个值为：

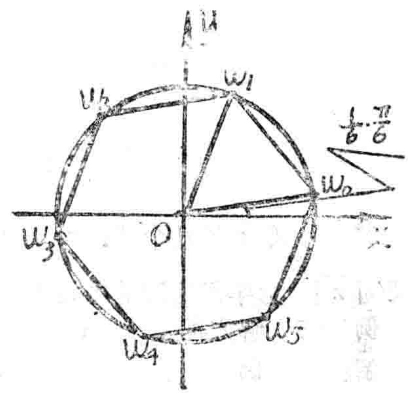
$w_0=\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{6}$，　　$w_1=\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{6}$，

$w_2=\cos\frac{\frac{\pi}{6}+4\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+4\pi}{6}$　　$w_3=\cos\frac{\frac{\pi}{6}+6\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+6\pi}{6}$，

$w_4=\cos\frac{\frac{\pi}{6}+8\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+8\pi}{6}$，

$w_5=\cos\frac{\frac{\pi}{6}+10\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+10\pi}{6}$。

而这6个值的几例意义：内接于半径为1园心在原点的园的正六边形的顶点。（见图1·5）



（图1·5）

练　习　三

1、计算：1）$i^{633}=?$；　　2）$i^{-5}=?$　　3）$i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}=?$

2、计算：1）$(1+\sqrt{3}i)^4$　　2）$\sqrt[4]{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$；

3）$\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}$；　　4）$\sqrt[6]{-1+\sqrt{3}i}$。

3、解方程：

1）$z^6-1=i$；　　2）$(z+1)^9=(1+i)^9$；

2）$(z+1)^2(z-1)^2=0$。

4、设 $x+iy=\sqrt{a+bi}$，试求 $x，y$。

5、n取什么值时，$(1+\sqrt{3}i)^n$ 是一个实数？

6、若x，y是不为0的实数，试证：

$$\left(iy+\frac{1}{ix}\right)^2-\left(ix+\frac{1}{ix}\right)^2=\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{xy}-1\right)^2$$

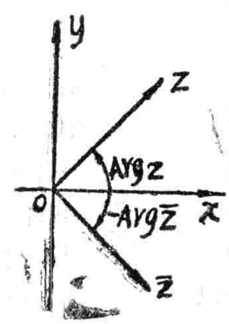
7、试证： $\left(\frac{1+itg\theta}{1-itg\theta}\right)^n=\frac{1+itgn\theta}{1-itgn\theta}$ 。 $\left(\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$。

3、共轭复数的性质

设$z=x+iy$，则$\overline{z}=x-iy$为z的共轭复数，在复平面上，z与$\overline{z}$关于实轴对称（图1·6）。

由图1·6可得：

$$|z|=|\overline{z}|,\quad \text{Arg}z=-\text{Arg}\overline{z}。$$



（图1·6）

共轭复数具有下列性质：

1、$\overline{(\overline{z})}=z$;

2、$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$

3、$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$；

4、$|z|^2=z\cdot\overline{z}$

5、$\text{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2}$，$\text{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

上述各性质，应用共轭复数的概念，即可证明。

例1.7 试证$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$。

证： 设$z_1=x_1+iy_1$， $z_2=x_2+iy_2$。

有$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

又$\overline{z}_1=x_1-iy_1$， $\overline{z}_2=x_2-iy_2$。

有$\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$

故$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$。

在例1·7中，如果$z_1=z=z_2$，得$\overline{z^2}=(\overline{z})^2$。一般地，有$\overline{z^n}=(\overline{z})^n$。

例1·8 设$a+bi$是实系数方程

$$A_0z^n+A_1z^{n-1}+A_2z^{n-2}+\cdots\cdots+A_{n-1}z+A_n=0$$

的根，则$a-bi$也是它的根。

证：由已知，有

$$A_0(a+bi)^n+A_1(a+bi)^{n-1}+A_2(a+bi)^{n-2}+\cdots\cdots+A_{n-1}(a+bi)+A_n=0$$

两端取共轭，得

$$A_0\overline{(a+bi)^n}+A_1\overline{(a+bi)^{n-1}}+A_2\overline{(a+bi)^{n-2}}+\cdots+A_{n-1}\overline{(a+bi)}+A_n=0$$

即 $A_0(a-bi)^n+A_1(a-bi)^{n-1}+A_2(a-bi)^{n-2}+\cdots+A_{n-1}(a-bi)$
$+A_n=0$

所以，a－bi满足方程

$$A_0z^n+A_1z^{n-1}+A_2z^{n-2}+\cdots\cdots+A_{n-1}z+A_n=0$$

例1·9 试证： 1） $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

2） $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$

证： 1）∵ $|z_1+z_2|=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2z_1$$

而 $z_2\cdot\overline{z_1}=(\overline{\overline{z_2}\cdot z_1})$

有 $2\mathrm{Re}(z_2\cdot\overline{z_1})=z_2\cdot\overline{z_1}+\overline{z_2}\cdot z_1$

因 $-|z_2\cdot\overline{z_1}|\leq\mathrm{Re}(z_2\cdot\overline{z_1})\leq|z_2\cdot\overline{z_1}|$

得 $|z_1+z_2|^2\leq|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2$

由 $|z_1|+|z_2|\geqslant0$， $|z_1+z_2|\geqslant0$。

所以 $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

2） 因 $-|z_2\cdot\overline{z_1}|\leq\mathrm{Re}(-z_2\cdot\overline{z_1})$，

而 $|z_1+(-z_2)|^2=z_1\cdot\overline{z_1}+(-\overline{z_2})\cdot z_1+\overline{z_1}\cdot(-z_2)+z_2\cdot(-\overline{z_2})$

有 $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(-z_2\cdot\overline{z_1})$

$$\geqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|$$

$$=(|z_1|-|z_1|)^2$$

所以 $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$。

例1.10 试证：在复平面上的直线方程，可表示为：

$$\alpha\overline{z}+\alpha z+C=0。$$

式中的α为复数，C为实数。

证： 设在平面xoy上的直线方程：

$$Ax+By+C=0$$

将 $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$， $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$，代入上述方程

得
$$\frac{A}{2}z+\frac{A}{2}\overline{z}-\frac{B}{2}iz+\frac{B}{2}i\overline{z}+C=0$$

即
$$\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}i\right)z+\left(\frac{A}{2}+i\frac{B}{2}\right)\overline{z}+C=0$$

令 $\alpha=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}i$

所以 $$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$$

为所求。

练 习 四

1、设复数$z=x+iy$,试求下列方程中的z：

1） $z+|\bar{z}|=2+i$,

2） $z^2=\bar{z}$

2、试证：当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，复数z为实数。

3.如果二复数的和与积都为实数，试证这两个复数共轭。

4、试证：z平面上的园可表示成：

$$Az\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+D=0$$

式中的α是复数，A、D为实数，且$|\alpha|^2>AD$。

5、试证$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明它的几何意义。

6、若$z=\sqrt{z_1\cdot z_2}$ 试证明

$$|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{2}(z_1+z_2)-z\right|+\left|\frac{1}{2}(z_1+z_2)+z\right|$$

§1·3 复数在几何方面的应用

1）设$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，试求z_1与z_2的距离$P(z_1,z_2)$？

解：因为 $z_1\Longleftrightarrow(x_1,y_1)$，$z_2\Longleftrightarrow(x_2,y_2)$且在平面xoy上两点间的距离

$$p(z_1,z_2)\text{为：}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

又由 $$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

所以 $p(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$

即复数z_1与z_2之差的模就是点z_1，z_2之间的距离。

2）试求动点z到定点z_0的距离为定长R的轨迹。

解：应用1）的结论，得$P(z_1,z_0)=R$ 即

$$|z-z_0|=R$$

为所求。若令$z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$， 则有

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

这是圆心在点(x_0,y_0)，半径为R的圆周。