

复变函数

目 录

前 言

第一章 复数	1
§ 1.1 复数	1
1. 复数 (1) 2. 复数的几何表示 (1)	
§ 1.2 复数的运算	5
1. 四则运算 (5) 2. 乘幂和方根 (7) 3. 共轭复数的性质 (11)	
§ 1.3 复数在几何方面的应用	13
§ 1.4 无穷远点与复球面	16
§ 1.5 平面点集	20
1. 基本概念 (20) 2. 区域 (21) 3. 曲线 (22)	
本章小结	26
习题一	27
第二章 解析函数	29
§ 2.1 复变函数	29
1. 复变函数 (29) 2. 单叶函数 (31) 3. 反函数 (32)	
4. 复合函数 (32)	
§ 2.2 极限	32
1. 函数极限 (32) 2. 必要充分条件 (33)	
§ 2.3 连续性	35
1. 连续 (35) 2. 连续的必要充分条件 (35) 3. 连续性 (37)	
§ 2.4 解析函数	39
1. 导数 (39) 2. 可微条件 (41) 3. 解析函数 (45)	
4. C_1 — R_1 条件的应用 (48)	
§ 2.5 单叶解析函数及其几何意义	49
1. 单叶解析函数 (49) 2. 导数的几何意义 (49) 3. 保形变换概念 (51)	
本章小结	53
习题二	53
第三章 初等复函数	55
§ 3.1 幂函数 $W = z^n$, 根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 及其黎曼面	55
1. 幂函数 $w = z^n$ (55) 2. 根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 及黎曼面 (57)	
§ 3.2 指数函数, 对数函数及其黎曼面	64
1. 指数函数 (64) 2. 对数函数及其黎曼面 (66)	

§ 3.3	三角函数, 反三角函数	73
1.	三角函数 (73) 2. 反三角函数 (76)	
§ 3.4	双曲函数, 反双曲函数	77
1.	双曲函数 (77) 2. 反双曲函数 (78)	
§ 3.5	一般幂函数, 一般指数函数	79
1.	一般幂函数, (79) 2. 一般指数函数 (81)	
	本章小结	88
	习题三	84
第四章	复变函数积分	86
§ 4.1	复变函数的积分概念	89
1.	复积分的概念 (86) 2. 复积分的基本性质 (87)	
3.	沿光滑曲线积分的计算 (89)	
§ 4.2	柯西积分定理	92
1.	柯西积分定理 (92) 2. 原函数 (93)	
3.	柯西积分定理推广到多连通区域 (96)	
§ 4.3	柯西积分公式	98
1.	柯西积分公式 (98) 2. 解析函数无穷可微性 (101)	
3.	解积函数的一个等价概念 (107)	
* § 4.4	柯西积分定理, 柯西积分公式在无界区域的推广	108
§ 4.5	几个重要定理	110
1.	平均值定理 (110) 2. 柯西不等式 (111)	
3.	刘维尔定理 (111) 4. 代数基本定理 (112)	
§ 4.6	调和函数	112
	本章小结	116
	习题四	118
第五章	解析函数的泰勒展式	120
§ 5.1	复数域内的级数	120
1.	复数项级数 (120) 2. 复函数项级数 (125)	
§ 5.2	幂级数	131
1.	幂级数的敛散性 (132) 2. 收敛半径求法 (133)	
3.	幂级数的和函数的性质 (136)	
§ 5.3	泰勒展式	137
1.	解析函数的泰勒展式 (137) 2. 初等函数的泰勒展式 (140)	
§ 5.4	零点及解析函数唯一性定理	145
1.	零点及其阶 (145) 2. 零点的性质 (147)	
3.	解析函数唯一性定理 (148) 4. 最大模原理 (151)	
§ 5.5	解析开拓	152
1.	解析开拓概念 (153) 2. 解析开拓的幂级数方法 (153)	
	本章小结	158

习题五	158
第六章 解析函数的罗朗展式	160
§ 6.1 罗朗展式	160
1. 双边级数 (160) 2. 解析函数的罗朗展式 (161) 3. 罗朗展式举例 (165)	
§ 6.2 解析函数在孤立奇点领域内的性质	170
1. 孤立奇点 (170) 2. 孤立奇点分类 (170) 3. 解析函数在孤立奇点邻域的性质 (172)	
§ 6.3 解析函数在无穷远点邻域的性质	180
1. 孤立奇点分类 (180) 2. 解析函数在无穷远点邻域的性质 (181)	
§ 6.4 整函数和亚纯函数的概念	181
1. 整函数 (181) 2. 亚纯函数 (182)	
本章小结	183
习题六	184
第七章 留数及其应用	185
§ 7.1 留数的一般理论	185
1. 留数 (185) 2. 留数计算 (186) 3. 无穷远点的留数 (192)	
4. 留数定理 (194)	
§ 7.2 幅角原理	199
1. 幅角原理 (196) 2. 儒歇定理 (200)	
§ 7.3 实函数积分值的计算	202
1. 三角函数有理式的积分 (203) 2. 有理函数的积分 (206)	
3. 混合型积分 (209) *4. 其他积分 (213)	
本章小结	215
习题七	224
第八章 保形变换	225
§ 8.1 一般定理	226
§ 8.2 线性变换	226
1. 整线性函数 (226) 2. $w = \frac{1}{z}$ (227) 3. 分式线性函数 (229)	
4. 分式线性变换的性质 (233) 5. 两个特殊的分式线性变换 (236)	
§ 8.3 变换举例	240
本章小结	247
习题八	247
附 录	
I. 柯西积分定理的古莎证明	248
II. 复变函数在流体力学中的解释	251
III. 参考书目	254
习题答案	255

第一章 复数

这里，我们将复习已经学过的复数及平面点集。它们都是学习复变函数的必要准备。

本章的基本要求：理解复数及点集中的一些概念，掌握运算的基本性质，正确鉴别复平面上常见点集的几何意义。

§ 1.1 复数

1. 复数

形如 $x + iy$ 的数，称为复数。记为

$$z = x + iy \quad (\text{或} = x + yi) \quad (1)$$

式中的 x, y 是任意实数， i 是虚数单位。

在 (1) 式中， x 称为复数 z 的实部，记为 $x = \operatorname{Re}z$ (Re 来自拉丁字 *realis* 的开头两个字母)， y 称为复数 z 的虚部，记为 $y = \operatorname{Im}z$ (Im 来自拉丁字母 *imaginare* 的开头两个字母)，于是

$$z = \operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z \quad (2)$$

在 (2) 式中，当 $\operatorname{Im}z = 0$ 时，则 $z = \operatorname{Re}z$ ，即 z 为实数。可见实数是复数的特殊情况；当 $\operatorname{Im}z \neq 0$ 时，将 $z = \operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z$ 称为虚数；当 $\operatorname{Re}z = 0$ 时，将 $z = i\operatorname{Im}z$ 称为纯虚数。

复数相等 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z_2 = x_2 + iy_2$ ，当且仅当 $x_1 = x_2$ 及 $y_1 = y_2$ 时，则称 z_1 与 z_2 相等。

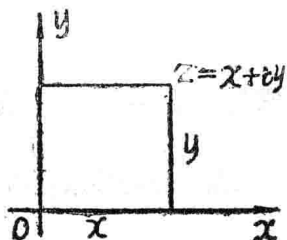
共轭复数 设 $z = x + iy$ ，称 $x - iy$ 为 z 的共轭复数，记为 $\bar{z} = x - iy$ 。

2. 复数的几何表示

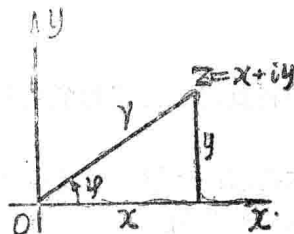
1) 用点表示复数 规定复数 $z = x + iy$ 用平面上给定的直角坐标系 xOy 中的点表示，这个点的横标等于 x ，纵标等于 y 。即 z 用点 (x, y) 表示 (图 1.1)，根据这一规定，对任何一个复数，在平面 xOy 上有一个唯一的点与之对应。反之，平面上的任何一点，有唯一的一个复数与之对应。这就建立了复数 $z = x + iy$ 与平面 xOy 上的点 (x, y) 之间的一一对应。

将所有的复数组成一个数集，平面 xOy 上的一切点组成一个点集，这两个集合之间是一一对应的。鉴于这样，今后将复数与点，复数集与平面点集不加区别，视为一回事。

在平面 xoy 上, 如果 z 落在 x 轴上, 则 $Imz=0$, 得 $z=Rez$, 即 x 轴上的点表示的是实数, 将 x 轴称为实轴; 如果 z 落在 y 轴上, 则 $Re z=0$, 得 $z=iImz$, 即 y 轴上的点表示的是纯虚数, 将 y 轴称为虚轴。对于原点, 既作为实数又作为纯虚数的唯一数, 这样我们将表示复数的平面 xoy , 称为复平面。常以字母 z, w, α, β 分别表示为 z 平面, w 平面, ……等。



(图1.1)



(图1.2)

2) 用向量表示复数 设 $z=x+iy$ 是复平面上的任一点, 向量 \overline{OZ} 是连接原点(作始点), 与点 Z (作终点)的有向线段, x, y 分别是向量 \overline{OZ} 在实轴与虚轴上的分量, 这样, Z 与向量 \overline{OZ} 构成了一一对应。我们规定: 一向量经过平移后所得的向量与原向量相同。这就得到复数与向量是一一对应的。因此, 今后, 将复数与向量不加区别视为一回事。

下面, 给出复数 z 的另一种表示式:

在复平面 xoy 上, 设有向量 $z=x+iy$ (图1.2)用 $|z|=r$ 表示向量 z 的大小, 称为 z 的模, 用 $Argz=\varphi$ 表示向量 z 的方向(即向量 z 与实轴正向的夹角), 称为 z 的辐角。

由图1.2得关系:

$$x=r \cdot \cos\varphi \quad y=r \cdot \sin\varphi$$

所以

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

即

$$z=|z|(\cos Argz+i\sin Argz) \quad (3)$$

这就是用向量 z 的大小、方向表示的复数, 将它称为复数的三角函数表示式, 简称为三角式。

对于复数的表示法, 再应用尤拉(Euler)公式: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$
从(3)式, 得

$$z=|z| \cdot e^{i Argz} \quad (4)$$

称(4)式为复数的指数表示式, 简称为指数式。

注: 在(3)式中, 要使 $Argz$ 有意义, 必须假定 $z \neq 0$, 所以, 复数凡用三角式表示时, 均满足 $z \neq 0$; 但当 $z=0$ 时, $|z|=0$ 。

尤拉公式将在第三章的指数函数中介绍。

我们知道, $Argz$ 是无穷多值的, 且其中的任二值之差是 2π 的整数倍, 在 $Argz$ 的一切值中, 满足 $-\pi < argz \leq \pi$ 的值 $argz$ 称为 $Argz$ 的主值, 于是

$$Argz=argz+2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

注: 有时为了某种方便, 也用 $\operatorname{arg}z$ 表示 $\operatorname{Arg}z$ 的某一个确的值。

下面再看 $\operatorname{Arg}z$ 的计算. 从 (5) 式可知, $\operatorname{Arg}z$ 的计算, 归结为 $\operatorname{arg}z$ 的计算, 对此, 我们的算法为:

$$\operatorname{arg}z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & (x > 0) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & (x < 0, y \geq 0) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & (x < 0, y < 0) \end{cases}$$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$

当 $y > 0, x = 0$ 时, $\operatorname{arg}z = \frac{\pi}{2}$; 当 $y < 0, x = 0$ 时, $\operatorname{arg}z = -\frac{\pi}{2}$

例1.1, 设 $z_1 = -2 + 2i, z_2 = -1 - \sqrt{3}i, z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

试求 $\operatorname{Arg}z_k (k=1, 2, 3)$?

解: (1) 因 $\operatorname{arg}z_1 = \operatorname{arctg} \frac{2}{-2} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

所以 $\operatorname{Arg}z_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(2) 因 $\operatorname{arg}z_2 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$.

所以 $\operatorname{Arg}z_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

(3) $\operatorname{arg}z_3 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

所以 $\operatorname{Arg}z_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

由图1.2, 可得复数 z 的模 $|z|$ 与 x, y 之有下列关系;

1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) $|z| \geq |x|, |z| \geq |y|, |z| \leq |x| + |y|;$

3) $-|z| \leq x \leq |z|, -|z| \leq y \leq |z|.$

设复数 Z_1 及 Z_2 用三角式表示为:

$$z_1 = |z_1| (\operatorname{CoS} \operatorname{Arg}z_1 + i \operatorname{Sin} \operatorname{Arg}z_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\operatorname{CoS} \operatorname{Arg}z_2 + i \operatorname{Sin} \operatorname{Arg}z_2)$$

如果 $z_1 = z_2$, 则 $|z_1| = |z_2|$ 及 $\operatorname{Arg}z_1 = \operatorname{Arg}z_2$.

这里, 对于 $\operatorname{Arg}z_1 = \operatorname{Arg}z_2$, 理解为: 在 $\operatorname{Arg}z_1$ 与 $\operatorname{Arg}z_2$ 中, 任何一个取定一个值以后, 另一个所取的无穷多个值中, 可以找到一值与之相等。

例1.2, 将下列复数表示成三角式、指数式:

$$2i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad -i, \quad -4+3i.$$

解: 1) 因 $|2i|=2$, $\text{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

$$\text{所以 } 2i = 2(\text{CoS}\frac{\pi}{2} + i\text{Sin}\frac{\pi}{2}) \text{ 及 } 2i = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$2) \cdot \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = 1, \quad \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \text{CoS}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\text{Sin}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ 及 } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}};$$

$$3) \text{ 因 } |-i|=1, \quad \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{所以 } -i = \text{CoS}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\text{Sin}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ 及 } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$4) \quad |-4+3i|=5, \quad \text{Arg}(-4+3i) = \pi - \text{arctg}\frac{3}{4} + 2k\pi$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{所以 } -4+3i = 5(\text{CoS}(\pi - \text{arctg}\frac{3}{4}) + i\text{Sin}(\pi - \text{arctg}\frac{3}{4})) \text{ 及}$$

$$-4+3i = 5 \cdot e^{i(-\text{arctg}\frac{3}{4})}.$$

练习一

1. a、b是什么数时, $a+bi$ 是实数, 是虚数, 是纯虚数;

2. 已知复数: $1+\sqrt{3}i, -2, \sqrt{3}-i$.

1) 试在复平面上描出这些复数的点;

2) 试写出这些复数的三角式, 指数式。

3. 已知复数:

$$z_1 = 3\sqrt{2}(\text{CoS}\frac{\pi}{4} + i\text{Sin}\frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 8(\text{CoS}\frac{11\pi}{6} + i\text{Sin}\frac{11\pi}{6}).$$

$$z_3 = 9(\text{CoS}\pi + i\text{Sin}\pi), \quad z_4 = 6(\text{CoS}\frac{4\pi}{3} + i\text{Sin}\frac{4\pi}{3}).$$

1) 试在复平面上描出这些复数的点;

2) 试写出这些复数的代数式。

4. 设复数 $z=x+iy$ (x, y 都是实数), 试求下列各点的 $\text{Re}z, \text{Im}z$?

$$1) (x+y) - xyi = -5+24i;$$

$$2) 2x^2 - 5x + 2 + (y^2 + y - 2)i = 0.$$

§ 1.2 复数的运算

1. 四则运算

设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1) 加法 规定复数

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

为 z_1 与 z_2 的和。求和的方法称为加法。

容易验证复数的加法满足加法定律：

1° 交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2° 结合律 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ 。

2) 减法 规定加法的逆运算为复数的减法，称

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

为 z_1 与 z_2 的差。

3) 乘法 规定复数

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)。$$

为 z_1 与 z_2 的积。求积的方法称为乘法。

容易验证，复数的乘法满足乘法定律：

1° 交换律 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

2° 结合律 $z_1 (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) z_3$;

3° 分配律 $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ 。

特例：若 $z_1 = 0 + i$, $z_2 = 0 + i$ 由复数的乘法规定。

则 $i \cdot i = -1$, 记 $i \cdot i = i^2$,

所以 $i^2 = -1$ 。

如果，将复数 $z = x + iy$ 视为两个实数 x 、 y 及虚单位 i ，通过 i 与 y 的乘积再同 x 的和的二项式，那么，关于复数相乘的积，可这样计算：按多项式的乘法及 $i^2 = -1$ 性质，即得。

4) 除法 规定乘法的逆运算为复数的除法，称

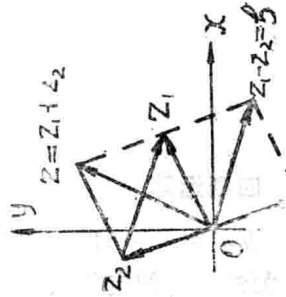
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

为 z_1 与 z_2 的商。

关于复数相除的商，可这样计算：用 $\frac{z_1}{z_2}$ 的分母 z_2 的共轭复数 $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$ ，同乘以分子，分母，再将 $z_1 \cdot \overline{z_2}$, $z_2 \cdot \overline{z_2}$ 按多项式相乘及 $i^2 = -1$ 的性质即得。

运算的几何意义

1) 和与差 用向量 z_1, z_2 为边构成的平行四边形中,过点O的对角线 oz 为 z_1 与 z_2 的和(即平行四边形法则)。另一条对角线 z_2z_1 为 z_1 与 z_2 的差(图1.3)。



(图1.3)

z_1 与 z_2 的差,还可用向量 z_1 与 $-z_2$ 为边构成的平行四边形中,过点O的对角线 oz 表示(图1.3)即 $oz = z_1 - z_2$ 。

由图1.3可知,向量 z_2z_1 与 oz 平行、同向、相等所以,得

$$|z_1 - z_2| = |z_2z_1|, \arg(z_1 - z_2) \text{ 同向量 } z_2z_1 \text{ 与实轴正向的夹角相等。}$$

从图1.3可得:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ 及 } |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

(证明见后)即三角形中两边之和不小于第三边,两边之差不大于第三边。

2) 积与商 设

$$z_1 = |z_1| (\cos \text{Arg} z_1 + i \sin \text{Arg} z_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \text{Arg} z_2 + i \sin \text{Arg} z_2)$$

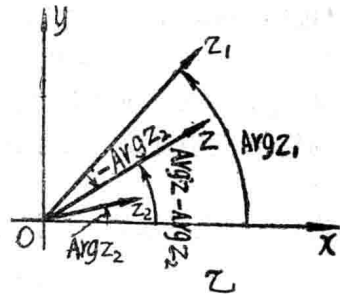
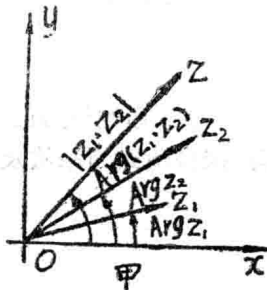
由 $z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2) + i \sin(\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2))$

得 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 及

$$\text{Arg} z_1 \cdot z_2 = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 \quad (6)$$

于是, z_1 与 z_2 乘积的几何意义为: $z_1 \cdot z_2$ 所对应的向量是将向量 z_1 伸长 $|z_2|$ 倍,再把它旋转 $\text{Arg} z_2$ 角度(图1.4甲)。

注 (6)式理解为:对于 $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ 的任一值,一定有 $\text{Arg} z_1$ 及 $\text{Arg} z_2$ 的各一值与它对应,使得等式成立,反过来也是一样。



(图1.4)

再由 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2) + i \sin(\text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2))$

得 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

及

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \quad (7)$$

于是 z_1 与 z_2 的商的几何意义为: z_1/z_2 所对应的向量是将向量 z_1 伸长 $\frac{1}{|z_2|}$ 倍, 再将它旋转 $-\operatorname{Arg} z_2$ 角度(图1.4乙)。

注 (7) 式理解与 (6) 式理解同。

练 习 二

1. 计算下列各题

$$1) (\sqrt{3} - \sqrt{2}i) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}i) - \{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2})i\}.$$

$$2) \{(a+b) + (a-b)i\} - \{(a-b) - (a+b)i\}.$$

$$3) (x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{3}i)(x-2-\sqrt{3}i).$$

$$4) \frac{69 - 7\sqrt{15} + (\sqrt{3} - 6\sqrt{5})i}{3 - (\sqrt{3} - 3\sqrt{5})i}.$$

2. 试求下列复数的模:

$$1) (ac - bd) + i(ad + bc).$$

$$2) \frac{a+bi}{a-bi}.$$

2. 乘幂和方根

1) 乘幂 n (正整数) 个相等复数 z 的连乘, 称为 z 的 n 次乘幂. 记为 z^n . 设 $z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$, 则

$$z^n = |z|^n (\cos (n \operatorname{Arg} z) + i \sin (n \operatorname{Arg} z))$$

特例, 当 $|z| = 1$ 时, 得:

$$(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)^n = \cos (n \operatorname{Arg} z) + i \sin (n \operatorname{Arg} z).$$

这个式子称为棣美弗 (De Moivre) 公式。

关于乘幂 z^n 的 n 作如下推广:

$$\text{设 } n=0, \quad z^0 = 1,$$

$$n = -k, \quad k (>0 \text{ 的}) \text{ 整数,} \quad \text{约定 } z^{-k} = \frac{1}{z^k}.$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{1}{z^k} &= \frac{1}{|z|^k (\cos (k \operatorname{Arg} z) + i \sin (k \operatorname{Arg} z))} \\ &= |z|^{-k} (\cos (-k \operatorname{Arg} z) + i \sin (-k \operatorname{Arg} z)) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } z^{-k} = |z|^{-k} (\cos (-k \operatorname{Arg} z) + i \sin (-k \operatorname{Arg} z)).$$

于是, 对于任意的整数 m , 我们有

$$z^m = |z|^m (\cos (m \operatorname{Arg} z) + i \sin (m \operatorname{Arg} z)).$$

例1.3 应用棣美弗公式, 可求 $i^2 = -1$.

解 因
$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

所以,
$$i^2 = \cos(2 \times \frac{\pi}{2}) + i \sin(2 \times \frac{\pi}{2}) = -1.$$

由性质 $i^2 = -1$, 再应用乘法定律, 可得:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1.$$

.....

一般有 $i^{4m} = 1, i^{4m+1} = i, i^{4m+2} = -1, i^{4m+3} = -i$.

式中的 m 为整数。

例1.4 已知 $(1+i)^n = (1-i)^n$, 求 n ?

解: $\because 1+i = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

$$1-i = \sqrt{2} [\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})]$$

由已知, 有

$$(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^n = [\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})]^n$$

得

$$\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} = \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4}$$

所以 $\sin \frac{n\pi}{4} = 0$, 即 $\frac{n\pi}{4} = k\pi$.

故 $n = 4k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

2) 方程 设 n 为不小于 2 的整数, 满足方程

$$w^n = z \tag{8}$$

的解称为 z 的 n 次方根, 记为 $w = \sqrt[n]{z}$

下面证明, 若 $z = |z| (\cos \text{Arg}z + i \sin \text{Arg}z)$

$$\text{则 } w = \sqrt[n]{z} = +\sqrt[n]{|z|} (\cos \frac{\text{Arg}z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg}z}{n}) \tag{9}$$

式中的 $+\sqrt[n]{|z|}$ 表示 $|z|$ 的 n 次算术根。

事实上, 设 $w = |w| (\cos \text{Arg}w + i \sin \text{Arg}w)$

由 (8) 式, 有:

$$|w|^n [\cos n \text{Arg}w + i \sin n \text{Arg}w] = |z| (\cos \text{Arg}z + i \sin \text{Arg}z)$$

根据复数的相等, 得:

$$|w|^n = |z|, \quad n \text{Arg}w = \text{Arg}z$$

$$\text{即 } |w| = +\sqrt[n]{|z|}, \quad \text{Arg}w = \frac{\text{Arg}z}{n}$$

于是 $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg}z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg}z}{n} \right)$

在(9)式中, $\frac{\text{Arg}z}{n}$ 区别了 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同的值, 如果

$$\text{Arg}z = \text{arg}z + 2k\pi$$

($-\pi < \text{arg}z \leq \pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 则 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值为:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{arg}z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\text{arg}z + 2k\pi}{n} \right) \quad (10)$$

式中 $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 。

对于(10)式说明两点:

1° k 虽然可取任意整数, 但当 k 取 $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 以外的其它值时, $\sqrt[n]{z}$ 的相应值将重复出现在 $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 时的值。例如, 取 $k=n$, 由(10)式得:

$$\begin{aligned} w_n &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{arg}z + 2n\pi}{n} + i \sin \frac{\text{arg}z + 2n\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\text{arg}z}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\text{arg}z}{n} + 2\pi \right) \right] \\ &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{arg}z}{n} + i \sin \frac{\text{arg}z}{n} \right) = w_0 \end{aligned}$$

2° $\sqrt[n]{z}$ 的几个值: $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ 的几何意义是以原点为心, $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点 (见下面例1.6)。

例1.5 解方程 $z^5 - 1 = 0$

解: 因 $1 = \cos 0 + i \sin 0$,

所以 $z^5 = \cos 0 + i \sin 0$,

于是 $z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k=0, 1, 2, 3, 4$, 为所求方程的根, 具体写出这五个根为:

$$k=0, \quad z_0 = \cos \frac{0}{5} + i \sin \frac{0}{5}$$

$$k=1, \quad z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5},$$

$$k=2, \quad z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5},$$

$$k=3, \quad z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5},$$

$$k=4, \quad z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}.$$

例1.6 计算 $\sqrt[5]{\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}}$, 并就算得值给出几何说明。

解： 因 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\text{则： } w_k = \left(\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}\right)_k = \cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6}$$

式中 $k=0, 1, 2, \dots, 5$, 所以, $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$ 的6个值为:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6},$$

$$w_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi}{6},$$

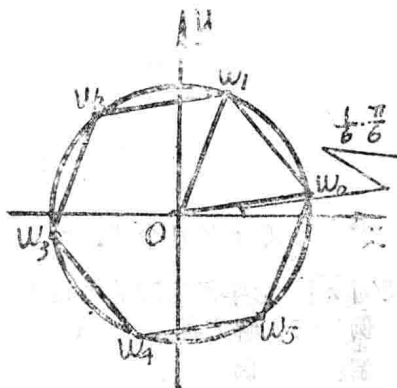
$$w_2 = \cos\frac{\frac{\pi}{6} + 4\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 4\pi}{6}$$

$$w_3 = \cos\frac{\frac{\pi}{6} + 6\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 6\pi}{6},$$

$$w_4 = \cos\frac{\frac{\pi}{6} + 8\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 8\pi}{6},$$

$$w_5 = \cos\frac{\frac{\pi}{6} + 10\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 10\pi}{6}.$$

而这6个值的几何意义: 内接于半径为1园心在原点的圆的正六边形的顶点. (见图1.5)



(图1.5)

练 习 三

1、计算: 1) $i^{633}=?$; 2) $i^{-5}=?$ 3) $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + \dots + i^{k+s}=?$

2、计算: 1) $(1 + \sqrt{3}i)^4$ 2) $\sqrt[4]{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$;

3) $\frac{(\sqrt{3} + i)^5}{-1 + \sqrt{3}i}$; 4) $\sqrt[6]{-1 + \sqrt{3}i}$.

3、解方程:

1) $z^6 - 1 = i$;

2) $(z+1)^9 = (1+i)^9$;

2) $(z+1)^2(z-1)^2 = 0$.

4、设 $x + iy = \sqrt{a + bi}$, 试求 x, y .

5、 n 取什么值时, $(1 + \sqrt{3}i)^n$ 是一个实数?

6、若 x, y 是不为0的实数，试证：

$$\left(iy + \frac{1}{ix} \right)^2 - \left(ix + \frac{1}{iy} \right)^2 = (x^2 - y^2) \cdot \left(\frac{1}{xy} - 1 \right)^2$$

7、试证： $\left(\frac{1 + itg\theta}{1 - itg\theta} \right)^n = \frac{1 + itgn\theta}{1 - itgn\theta}$ 。 $(\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$ 。

3、共轭复数的性质

设 $z = x + iy$ ，则 $\bar{z} = x - iy$ 为 z 的共轭复数，在复平面上， z 与 \bar{z} 关于实轴对称（图1·6）。

由图1·6可得：

$$|z| = |\bar{z}|, \text{Arg}z = -\text{Arg}\bar{z}.$$

共轭复数具有下列性质：

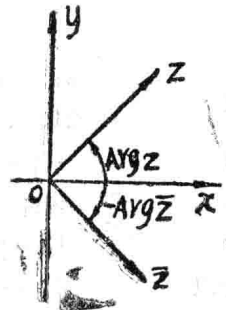
1、 $\overline{(\bar{z})} = z$;

2、 $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

3、 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

4、 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

5、 $\text{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\text{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$



(图1·6)

上述各性质，应用共轭复数的概念，即可证明。

例1.7 试证 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ 。

证： 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 。

$$\text{有 } z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\text{又 } \bar{z}_1 = x_1 - iy_1, \quad \bar{z}_2 = x_2 - iy_2.$$

$$\text{有 } \overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\text{故 } \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

在例1·7中，如果 $z_1 = z = z_2$ ，得 $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$ 。一般地，有 $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ 。

例1·8 设 $a + bi$ 是实系数方程

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

的根，则 $a - bi$ 也是它的根。

证：由已知，有

$$A_0 (a + bi)^n + A_1 (a + bi)^{n-1} + A_2 (a + bi)^{n-2} + \dots + A_{n-1} (a + bi) + A_n = 0$$

两端取共轭，得

$$A_0 \overline{(a + bi)^n} + A_1 \overline{(a + bi)^{n-1}} + A_2 \overline{(a + bi)^{n-2}} + \dots + A_{n-1} \overline{(a + bi)} + A_n = 0$$

即 $A_0(a-bi)^n + A_1(a-bi)^{n-1} + A_2(a-bi)^{n-2} + \dots + A_{n-1}(a-bi) + A_n = 0$

所以, $a-bi$ 满足方程

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

例1.9 试证: 1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 2) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

证: 1) $\because |z_1 + z_2| = \sqrt{(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})}$
 $= \sqrt{z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_2}}$

而 $z_2 \cdot \overline{z_1} = \overline{z_2 \cdot z_1}$
 有 $2\operatorname{Re}(z_2 \cdot \overline{z_1}) = z_2 \cdot \overline{z_1} + \overline{z_2} \cdot z_1$
 因 $|z_2 \cdot \overline{z_1}| \leq \operatorname{Re}(z_2 \cdot \overline{z_1}) \leq |z_2 \cdot z_1|$
 得 $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$
 由 $|z_1| + |z_2| \geq 0, |z_1 + z_2| \geq 0$
 所以 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2) 因 $-|z_2 \cdot \overline{z_1}| \leq \operatorname{Re}(-z_2 \cdot \overline{z_1})$,

而 $|z_1 + (-z_2)|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1} + (-z_2) \cdot z_1 + \overline{z_1} \cdot (-z_2) + z_2 \cdot \overline{z_2}$
 有 $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(-z_2 \cdot \overline{z_1})$
 $\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|$
 $= (|z_1| - |z_2|)^2$

所以 $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ 。

例1.10 试证: 在复平面上的直线方程, 可表示为:

$$\alpha \overline{z} + \alpha z + C = 0.$$

式中的 α 为复数, C 为实数。

证: 设在平面 xoy 上的直线方程:

$$Ax + By + C = 0$$

将 $x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$, 代入上述方程

得 $\frac{A}{2} z + \frac{A}{2} \overline{z} - \frac{B}{2} iz + \frac{B}{2} i \overline{z} + C = 0$

即 $(\frac{A}{2} - \frac{B}{2} i) z + (\frac{A}{2} + \frac{B}{2} i) \overline{z} + C = 0$

$$\text{令 } \alpha = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}i$$

所以
为所求。

$$\overline{\alpha z} + \alpha \overline{z} + c = 0$$

练 习 四

1. 设复数 $z = x + iy$, 试求下列方程中的 z :

1) $z + |\overline{z}| = 2 + i$,

2) $z^2 = \overline{z}$

2. 试证: 当且仅当 $z = \overline{z}$ 时, 复数 z 为实数。

3. 如果二复数的和与积都为实数, 试证这两个复数共轭。

4. 试证: z 平面上的圆可表示成:

$$Azz + \alpha z + \overline{\alpha z} + D = 0$$

式中的 α 是复数, A, D 为实数, 且 $|\alpha|^2 > AD$ 。

5. 试证 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明它的几何意义。

6. 若 $z = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$ 试证明

$$|z_1| + |z_2| = \left| \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - z \right| + \left| \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + z \right|$$

§ 1.3 复数在几何方面的应用

1) 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 试求 z_1 与 z_2 的距离 $P(z_1, z_2)$?

解: 因为 $z_1 \leftrightarrow (x_1, y_1)$, $z_2 \leftrightarrow (x_2, y_2)$ 且在平面 xoy 上两点间的距离

$$P(z_1, z_2) \text{ 为: } \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

又由

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

所以 $P(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

即复数 z_1 与 z_2 之差的模就是点 z_1, z_2 之间的距离。

2) 试求动点 z 到定点 z_0 的距离为定长 R 的轨迹。

解: 应用 1) 的结论, 得 $P(z, z_0) = R$ 即

$$|z - z_0| = R$$

为所求。若令 $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, 则有

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

这是圆心在点 (x_0, y_0) , 半径为 R 的圆周。