大学数学函授教材

微分几何讲义

万福之　陈润瀛　毛东明　编

东北师范大学出版社

大学数学函授教材

微分几何讲义

万福之　陈润瀛　毛东明　编

东北师范大学出版社
1993・长春

(吉)新登字 12 号

微分几何讲义

WEIFEN JIHE JIANGYI

万福之　陈润瀛　毛东明　编

责任编辑:杨述春　　封面设计:李冰彬　　责任校对:万福之

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
(长春市斯大林大街 110 号)　　吉林工学院印刷厂制版
(邮政编码:130024)　　吉林工学院印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32　　1993 年 7 月第 1 版
印张:10.125　　1993 年 7 月第 1 次印刷
字数:270 千　　印数:0 001—2 000 册

ISBN 7-5602-1242-5/O·78　　定价:4.00 元

编者的话

本教材是根据原教育部1980年颁发的函授微分几何教学大纲，参照高师本科数学专业微分几何教学大纲的要求，在几年来函授及本科教学所用教材的基础上，总结、修改、编写而成的. 根据教学时数、函授特点，重点讲述经典微分几何的基本内容.

微分几何是数学的一个重要分支，是主要以数学分析为工具研究空间形式的一门学科. 而经典微分几何（或称局部微分几何）主要讨论曲线与曲面的局部性质，即研究曲线或曲面在一点邻近的性质. 随着各学科的发展，近二三十年来，微分几何研究内容已由对曲线与曲面局部性质的研究向曲线与曲面的整体性质研究方面迅速地发展. 特别是到了60年代，它与分析相结合，形成了一个新的数学分支——大范围分析，对其它自然科学发展影响越来越深刻. 其学科的内容、方法在不断地发展与改进.

作为一本教材应尽可能地反映这门学科的发展趋势，但由于高师函授时间短、集中面授等条件的限制，不可能完全满足这样的要求. 因而我们只限于讲授经典微分几何最基本的部分——三维欧氏空间中曲线和曲面的局部理论. 在曲面论中，适当地采用一些张量分析的指示记号. 这只是为进一步学习近代微分几何，在方法上作极初步的一些准备.

本教材第1、2、3、7章由万福之副教授编写；第4、6章由毛东明同志编写；第5、8章由陈润瀛副教授编写. 最后由万福之副教授统校全书. 刘梦飞同志绘制了全部插图. 郭卫中教授审阅了原稿并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，文中不妥之处一定存在，恳请读者不吝赐教.

编　者

1992年8月

目　　录

第 1 章　向量分析

第 2 章　空间曲线

第 3 章 特殊曲线

第 4 章 曲面的第一基本形式

第 5 章 曲面的第二基本形式

第 6 章　包络曲面　可展曲面

第 7 章　曲面基本定理

第 8 章　测地线

第1章 向量分析

现代研究微分几何一般采用三种方法：一种是以向量分析为工具；二是以张量分析为工具；三是近年来由于微分几何向研究曲线与曲面的整体性质方面发展，而多采用外微分形式法.

本教材为三维欧氏空间的微分几何，主要研究曲线与曲面的局部性质，即研究曲线与曲面在一点邻域的性质.因而本教材采用向量分析工具研究点邻域内的性质.这是由教材内容所决定的，而且可以使教材便于自学，适于函授的特点.向量分析的很多性质可以通过我们熟知的实分析而得到，它的很多结论又与实分析的结论在形式上没有什么不同，因而是易于学习与掌握的.

为了学好向量分析的基本知识，先复习向量代数知识，然后再简单介绍向量函数的极限、连续性、微分及积分等内容.

§1.1 向量代数复习

1 向量与纯量

向量是既有大小又有方向的量.如物理学中的位移、速度、力和加速度等.

在几何学中，用具有方向的线段表示向量（图 1-1）.在文字叙述中，一般采用黑体字 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，…或用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{RQ}$，$\overrightarrow{RT}$……表示向量.向量也可以用 $\vec{a}$ 表示.它的大小，即向量的模，用记号 $|\boldsymbol{a}|$ 表示.

如果一个向量的始点不是固定的，称这种向量为自由向量.如

果它的始点是固定的，称为固定向量. 在符号上不加区别.

纯量是只有大小而无方向的量. 例如：质量、长度、面积、时间、温度以及任意实数等. 纯量象在初等代数中一样，用常用的字母表示. 纯量的运算也遵循初等代数的运算规律.

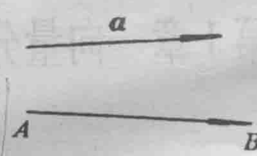

图 1-1

在三维欧氏空间 E^3 中，向量是与一有序的三数组 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 相对应. 若 M 是空间直角坐标系中一点，它的坐标为 x, y, z，坐标原点为 O，那么$\overrightarrow{OM}$称为点 M 的向径，这时可定义向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为 $\{x, y, z\}$. 或者说数组 $\{x, y, z\}$ 与向量$\overrightarrow{OM}$是等价的，或者说 E^3 中一向径是代表一点. 一向量 $\boldsymbol{a}$ 的逆向量是指与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反模相等的向量，用 $-\boldsymbol{a}$ 表示. 由此它可定义为：$-\boldsymbol{a}=\{-a_1, -a_2, -a_3\}$. 零向量为 $\overrightarrow{\boldsymbol{0}}=\{0, 0, 0\}$. 向量的长度或模是实数：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. 显然$|\boldsymbol{a}|\geqslant 0$. $|\boldsymbol{a}|=0$ 只有当向量 $\boldsymbol{a}$ 为零向量.

2　向量的加法与减法

向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和是向量 $\boldsymbol{c}$，它的起点及终点是这样确定的：将 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，那末，以 $\boldsymbol{a}$ 的起点作为 $\boldsymbol{c}$ 的起点，而以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为 $\boldsymbol{c}$ 的终点，（图 1-2）. 将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和写成：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种求两个向量和的方法，叫做三角形法则.

在 E^3 中给定两个向量的坐标分别为

$$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}. \quad \boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$$

那么 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差定义为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$

它的坐标为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3\}$$

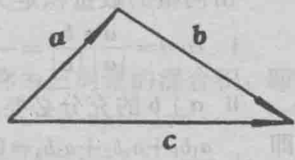

图 1-2

向量加法满足

i $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 交换律

ii $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 结合律

iii $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

3 乘数向量

设 m 是一实数，$\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ 是一向量，m 与 $\boldsymbol{a}$ 乘积仍是一向量，记作 $m\boldsymbol{a}$ 其坐为 $m\boldsymbol{a}=\{ma_1,\ ma_2,\ ma_3\}$. 它的模 $|m\boldsymbol{a}|$ $\sqrt{(ma_1)^2+(ma_2)^2+(ma_3)^2}$，即 $|m\boldsymbol{a}|=|m||\boldsymbol{a}|$. 显然，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}=\{0a_1,\ 0a_2,\ 0a_3\}$，$m\boldsymbol{a}$ 的方向与 m 的正负有关. 当 $m>0$，$m\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 当 $m<0$，$m\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

数乘向量满足下列性质：

i $m_1(m_2\boldsymbol{a})=(m_1m_2)\boldsymbol{a}$

ii $(m_1+m_2)\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{a}+m_2\boldsymbol{a}$

$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$

iii $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

4 向量的数量积

二向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（或读作点积）. 定义为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模乘以二向量之间的夹角 θ 的余弦. 可表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|cos\theta \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

注意：数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一实数而不是向量.

在 E^3 中，向二向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ 的数量积定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$$

特别地，当 $a=b$ 时有 $a\cdot a=|a|^2$

由向量的数量积定义，显然有

i $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

ii $a\perp b$ 的充分必要条件是 $a\cdot b=0$

即 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

设 b 是一个非零向量，向量 a 在向量 b 上的射影是一实数，记作 P_b^a. 定义为

$$P_b^a=\frac{a\cdot b}{|b|}$$

向量 a 在向量 b 上的射影向量表示为 $P_b{}^a$ 定义为

$$P_b{}^a u_b=\frac{a\cdot b}{|b|}\cdot\frac{b}{|b|}=\frac{(a\cdot b)}{|b|^2}\cdot b$$

(这里 u_b 是 b 方向上的单位向量).

向量的数量积满足下列运算规律

i $a\cdot b=b\cdot a$ 交换律

ii $(ma)\cdot b=m(a\cdot b)$ 结合律

iii $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ 分配律

iv $a\cdot a\geqslant 0$. $a\cdot a=0$ 只有 $a=0$ 时成立.

5 向量的向量积

二向量 a 与 b 的向量积记为 $a\times b$・（或读作叉积）定义为

i $a\times b$ 垂直于 a 和 b;

ii a、b、$a\times b$ 构成右手系;

iii 向量 $a\times b$ 的模为 $|a\times b|=|a||b|\mathrm{Sin}\theta$, 即以 a 和 b 为邻边所构成的平行四边形的面积. 其中 θ 为 a 和 b 的夹角.

向量的向量积满足下列运算规律

i $a\times b=-b\times a$ 反交换律

ii $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 分配律

iii $ma\times nb=mn(a\times b)$ 结合律

iv $a\times a=0$

6 向量的混合积

设 a，b，c 是三个向量，$a\cdot b\times c$ 称为三向量的混合积，即向量 a 与 $b\times c$ 的数量积.

在 E^3 中，设 $a=\{a_1, a_2, a_3\}$，$b=\{b_1, b_2, b_3\}$，$c=\{c_1, c_2, c_3\}$. 则

$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

由行列式的性质容易得到

$$(abc)=(cab)=(bca)$$
$$=-(bac)=-(cba)=-(acb)$$

特别地有 $a\cdot(b\times c)=(a\times b)\cdot c$

这样可以简写为

$$(abc)=a\cdot(b\times c)=(a\times b)\cdot c$$

$(abc)=0$ 的充分必要条件为 a，b，c 是线性相关的，即 a，b，c 是共面的.

7 向量的二重向量积

若三向量 a、b、c 作如下运算

$$a\times(b\times c)$$

即称为向量的二重向量积.

其运算规律为

$$a\times(b\times c)=(a\cdot c)\,b-(a\cdot b)\,c$$
$$(a\times b)\times c=(a\cdot c)\,b-(b\cdot c)\,a$$

即结合律不成立.

例 证明拉格朗日（lagrange）恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\\&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}\\&=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{d}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

复习思考题

1 向量与纯量是怎样定义的？它们有什么区别？

2 向量有哪些代数运算，都满足那些运算规律？

3 向量有哪几种乘法运算，它们都是怎样定义的，它们都满足哪些运算规律？

4 利用拉格朗日恒等式证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

§1.2 向量函数及其极限

在微分几何的学习中，要广泛地应用向量分析的基本知识，为此在这里对向量分析的基本知识作简要介绍.

1 向量函数

在向量代数中，我们讨论的都是模和方向保持不变的向量——常向量的有关运算性质（零向量视为特殊的常向量）. 然而在许多科学技术、生产实际的问题讨论中，却常常遇到模和方向至少有一方会改变的向量，即所谓变向量. 有了变向量，类似于实函数分析可引入向量函数概念.

定义 1.2.1 设 M 是一点集，如果对于集合 M 中每一点 x，

有唯一确定的向量 $\boldsymbol{r}$ 与之对应，则我们说，在点集 M 上给定了一个向量函数. 记为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x) \qquad x \in M$$

特殊地，若 M 是实数轴上一区间〔t_0，t_1〕，且 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$，则得一元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

若 M 集是一平面区域，且参数（u、v）$\in M$，则得一二元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

对于向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 容易看出，它是以实数为自变量，函数值为向量的函数.

在空间直角坐标系中，任何向量可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是向径. x、y、z 恰好是向径 $\boldsymbol{r}$ 的终点坐标.

因此向量函数 $\boldsymbol{r}$ 的坐标函数若为 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，则向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

或写成

$$\boldsymbol{r}=\{x(t),y(t),z(t)\}$$

若把 $\boldsymbol{r}(t)$ 看成空间一点 P 的向径，$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$，当 t 在区间〔t_1，t_2〕里变动时，P 点的轨迹一般为一条空间曲线 C. 方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$t\in$〔$t_1$，$t_2$〕称为曲线 C 的以 t 为参数的向量方程. 而 C 为方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 所对应的曲线.

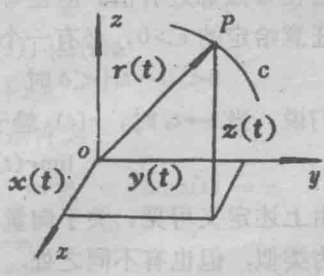

图 1-3

容易看出，曲线 C（图 1-3）以 t 为参数的参数方程

$$x=x(t) \qquad y=y(t) \qquad z=z(t)$$

恰好是向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在直角坐标系中的坐标函数. 因此，曲线

的向量方程与参数式方程是可以互换的.

例 圆柱螺线的参数方程为

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$$

其中 $a\neq0$，$b\neq0$ $\quad -\infty<t<+\infty$

则向量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$$

容易看出，给定以原点为起点的向量函数，就等于用方程组给定一曲线.

注意：由于曲线参数选取是任意的，显然曲线的方程并不是唯一的.

2 向量函数的极限

有了向量函数概念，类似于实函数的极限概念，我们容易定义向量函数的极限概念.

定义 1. 2. 2 设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是定义在某实数域 D 上的一元向量函数，它在 t_0 点邻近有值，但在 t_0 点可能无值，$\boldsymbol{r}_0$ 为固定向量. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，必有一个正数 $\delta>0$，使得当

$$0<|t-t_0|<\delta \text{ 时} \qquad |\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon$$

则我们说，当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{r}(t)$ 趋于极限时. 记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

由上述定义可见，关于向量函数极限概念与实函数的极限概念极为类似. 但也有不同之处. 即向量函数的极限仍是向量.

有了向量函数极限的定义，那么向量函数极限的运算性质，可以利用实数极限运算性质推得.

例 1. 2. 1 若 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{r}_{10}$ $\quad \lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{r}_{20}$

则

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t))=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$$

证 由已知条件可知，只需证

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t))=\boldsymbol{r}_{10}+\boldsymbol{r}_{20}$$

由极限定义上式又可以写成

$$\lim_{t\to t_0}|[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]-(\boldsymbol{r}_{10}+\boldsymbol{r}_{20})|=0$$

即对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta>0$，使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时

$$|(\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_2(t))-(\boldsymbol{r}_{10}+\boldsymbol{r}_{20})|<\varepsilon$$

这时

$$|(\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)-(\boldsymbol{r}_{10}+\boldsymbol{r}_{20})|\leqslant|\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_{10}|+|\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_{20}|$$

但当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，由条件可知

$$|\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_{10}|<\varepsilon \qquad |\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_{20}|<\varepsilon$$

得

$$|(\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t))-(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)|<2\varepsilon$$

即

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)+(\boldsymbol{r}_2(t))=\boldsymbol{r}_{10}+\boldsymbol{r}_{20}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$$

定理 1.2.1 设 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$$

则 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$ 成立的充分必要条件为

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0 \qquad \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0 \qquad \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0$$

证 必要性 若 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$

它又可写成

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|=0$$

根据向量模的定义得

$$\lim_{t\to t_0}\sqrt{[x(t)-x_0]^2+[y(t)-y_0]^2+[z(t)-z_0]^2}=0$$

由极限性质，有

$$\lim_{t\to t_0}[x(t)-x_0]=0$$

$$\lim_{t\to t_0}[y(t)-y_0]=0$$

$$\lim_{t\to t_0}[z(t)-z_0]=0$$

即 $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x_0 \quad \lim\limits_{t\to t_0}y(t)=y_0 \quad \lim\limits_{t\to t_0}z(t)=z_0$

充分性 若 $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x_0 \quad \lim\limits_{t\to t_0}y(t)=y_0 \quad \lim\limits_{t\to t_0}z(t)=z_0$ 并将三等式两端分别乘以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 再作和，得

$$\lim_{t\to t_0}x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}z(t)\boldsymbol{k}$$

$$=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$$

由极限运算性质及例 1.2.1 得

$$\lim_{t\to t_0}[x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}]$$

$$=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$$

即 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$

成立.

根据此定理容易证向量函数极限的下列性质

(1) $\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{r}_1(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$

(2) $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$

(3) $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$

其中 $\lambda(t)$ 为实函数，$\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2(t)$ 为向量函数. 且当 $t\to t_0$ 时有极限存在.

定理 1.2.1 的重要意义为：它使我们要讨论的向量函数的极限问题归结为我们熟知的实函数的极限问题. 这样可使实函数的许多极限性质直接应用到向量函数中来. 从而大大简化了关于向量函数一些性质的讨论步骤和繁琐的运算. 这是很重要的一种处理问题的方法.

有了向量函数概念，通过上边的讨论，我们知道它的极限概