

堀江千代子

銀林浩編

九年一貫教育

數學學習領域

永無止境的 數學故事

[平方根・無理數]



數學樂園 2

MATHEMATICS IN WONDERLAND

堀江千代子 *Chiyoko Horie*
銀林浩■

永無止境的數學故事

[平方根・無理數]



國家圖書館出版品預行編目資料

永無止境的數學故事／堀江千代子著．一初版．

—臺北市：國際村，2002〔民91〕

面；公分．—（數學樂園；2）

ISBN 957-452-203-2（平裝）

1. 數學遊戲

997.6

91001063

數學樂園②

永無止境的數學故事

NT\$180

堀江千代子／著

2002年3月／初版

〈企劃製作〉

益智工房製作中心

出版者：國際村文庫書店有限公司

編輯部：台北市〈文山區〉萬安街21巷11號3F

電話(02)2230-0545 * 傳真(02)2230-6118 * 郵撥17297530

總管理處：台北縣深坑鄉北深路3段141巷24號4F（東南學院正對面）

電話(02)2664-2511 * 傳真(02)2662-4655 / 2664-8448

網址：<http://www.linyu.com.tw>

E-mail：linyu@linyu.com.tw

〈代理商〉

創智文化有限公司

台北縣中和市中山路二段327巷3號4樓

電話(02)2242-1566 * 傳真(02)2242-2922

法律顧問：蕭雄淋律師 Printed in Taiwan ISBN 957-452-203-2

Copyright © 1995 by Kou Gimbayashi & Chiyoko Horie

First published in Japan in 1995 under the title "SUUGAKU WANDARANDO 2. HATESHINAI KAZU NO MONOGATARI" by Kokudo-sha, Co., Ltd.

Chinese translation rights arranged with Kokudo-sha Co., Ltd. through Japan Foreign-Rights Centre & Bardor-Chinese Media Agency

給讀者的一封信

從另一個角度觀察數學

你是不是曾經想過，為什麼數學總是又生硬又難？的確，翻開數學課本，出現的都是文字、函數或圖形的證明等等，看起來根本就是和現實世界毫無關係的抽象學習。你是否也因為認為它是非實用性的東西，總是以死背公式或計算練習的方式瞞混過去？

學校中使用的課本其實只呈現出數學的表面而已。由於表面呈現的是一本正經的樣貌，因此總是給人一種冷淡又難以接近的感覺。只要一想到數學是擁有 3 千年以上歷史的古老學問，或許就會無可奈何地認為它理當如此了，因為非將這 3 千年間眾多數學學者所思考的事情簡短地歸納整理一番不可。

那麼，如果從內在層面去看數學，又會變成如何呢？和生硬的印象相反，它會讓你覺得充滿更多自由的想像力。另外，依據作法的不同，學習上也可以更具體。

例如，大家一定都認為「1 加 1 就是 $1 + 1 = 2$ ，所以答案是 2」，對吧。

的確，在一般算術中所得到的答案是如此。但是，在不同的情況下，甚至得到 $1 + 1 = 0$ 的答案也不是無法想像的。而且，這不只是想像，如果我告訴你，在現實世界也可能發生，你是必然會大吃一驚吧?!

比如電器用品，通常是按一下開關就有電，再按一次，電就消失了。

瞧！就是這個了。接下來請你再發揮一次想像力。

$$1 + 1 = 1$$

如何?!這種情況也會發生嗎？

那麼，如果我們不看表面，而探索數學的面貌，即所謂數學的「本來面目」，應該比較好吧！就此而言，必須讓自己置身於數學被思考的情境「現場」。一邊想像前人的思考邏輯，同時試著踐履他們的足跡，這是一種方法；即使和歷史並沒有特別的關係，但可以在不依靠他人的情況下，利用自己的頭腦思考，也是一個很好的方法。

在這一套數學遊戲系列中，針對國中數學的幾個困難點，分別請在各個領域具有專長的老師發揮所長，撰寫成書。讓我們利用這項體驗學習，一起出發吧！

Let's Go!

銀林浩

永無止境的數學故事 目次

第 1 章 影印機的數字之謎——紙的規格—— 9

不可思議的數字 9

切割再切割，依然帶 $\sqrt{2}$ 的長方形 14

◎ 習題① 16

第 2 章 量不盡的數——無理數—— 17

互除法 17

◎ 習題② 23

連分數 24

◎ 習題③ 27

循環小數 28

非循環無限小數 30

第 3 章 平方根的祕密—— 35

隱藏在正方形中的無理數 35

另一種方法 38

許許多多的 $\sqrt{a}$ 40

◎ 習題④ 46

發現不可思議的規則 47

◎ 習題⑤ 48

◎ 習題⑥ 50

歐基里德的證明 52

用色紙折出 $\sqrt{a}$ 54

第4章 許許多多無理數—— 近似值和平方根的四則運算 ————— 59

在數軸上定出刻度 59

用 $a+b\sqrt{2}$ 填滿數軸 61

◎ 習題7 63

試做無理數 64

求出近似值 65

◎ 習題8 69

平方根的四則運算——乘除 70

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$? 73

◎ 習題9 74

◎ 習題10 75

第5章 遊戲中的無理數——剪影猜謎 ————— 77

益智板「七巧板」 77

◎ 習題11 82

T 板 84

◎ 習題12 87

終極的剪影猜謎——F 板 88

◎ 習題13 90

第 6 章 美之中的無理數——黃金比和黃金切割 91

折出帶 $\sqrt{}$ 的長方形 91

黃金長方形 94

◎ 習題 14 99

隱藏在正多面體中的無理數 102

鏡頭的光圈是無理數 104

在畫布上常使用的黃金長方形 105

人體是黃金比 108

在建築物中看到的無理數 112

黃金比的起源 114

出現在日本建築物中的無理數 116

第 7 章 大自然中的無理數——費波南茲數列 121

費波南茲數列 121

隱藏在大自然中的無理數 125

費波南茲數和黃金比 132

◎ 習題 15 137

結 語 139

習題解答 140

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

益智工房

〔編者〕銀林 浩

1927年生於東京都。現任明治大學教授。前數學教育協議會委員長。東大理學部數學科畢業後，於東京工大研究所認識了遠山啓。至今仍參加數學教育協議會的活動，對於理論的研究不遺餘力。近作有：《由人類的行動看數學》（明治圖書）、《人文數學的推薦》（日本評論社）、《現今的數學教育》（國土社）等。

〔作者〕堀江千代子

1942年於神奈川縣出生。數學教育協議會會員。橫濱國立大學畢業後，就職於私立櫻美林高中。後轉任東京都公立小學。現職東京大學附中、高中。喜好登山，欣賞野草。著作有《評價和指導》（學習研究社）、《數學的教授》（共著，一橋書房）等。

堀江千代子 *Chiyoko Horie*
銀林浩■

永無止境的數學故事

[平方根・無理數]



給讀者的一封信

從另一個角度觀察數學

你是不是曾經想過，為什麼數學總是又生硬又難？的確，翻開數學課本，出現的都是文字、函數或圖形的證明等等，看起來根本就是和現實世界毫無關係的抽象學習。你是否也因為認為它是非實用性的東西，總是以死背公式或計算練習的方式瞞混過去？

學校中使用的課本其實只呈現出數學的表面而已。由於表面呈現的是一本正經的樣貌，因此總是給人一種冷淡又難以接近的感覺。只要一想到數學是擁有3千年以上歷史的古老學問，或許就會無可奈何地認為它理當如此了，因為非將這3千年間眾多數學學者所思考的事情簡短地歸納整理一番不可。

那麼，如果從內在層面去看數學，又會變成如何呢？和生硬的印象相反，它會讓你覺得充滿更多自由的想像力。另外，依據作法的不同，學習上也可以更具體。

例如，大家一定都認為「1 加 1 就是 $1 + 1 = 2$ ，所以答案是 2」，對吧。

的確，在一般算術中所得到的答案是如此。但是，在不同的情況下，甚至得到 $1 + 1 = 0$ 的答案也不是無法想像的。而且，這不只是想像，如果我告訴你，在現實世界也可能發生，你是必然會大吃一驚吧?!

比如電器用品，通常是按一下開關就有電，再按一次，電就消失了。

瞧！就是這個了。接下來請你再發揮一次想像力。

$$1 + 1 = 1$$

如何?!這種情況也會發生嗎？

那麼，如果我們不看表面，而探索數學的面貌，即所謂數學的「本來面目」，應該比較好吧！就此而言，必須讓自己置身於數學被思考的情境「現場」。一邊想像前人的思考邏輯，同時試著踐履他們的足跡，這是一種方法；即使和歷史並沒有特別的關係，但可以在不依靠他人的情況下，利用自己的頭腦思考，也是一個很好的方法。

在這一套數學遊戲系列中，針對國中數學的幾個困難點，分別請在各個領域具有專長的老師發揮所長，撰寫成書。讓我們利用這項體驗學習，一起出發吧！

Let's Go!

銀林浩

永無止境的數學故事 目次

第 1 章 影印機的數字之謎——紙的規格—— 9

不可思議的數字 9

切割再切割，依然帶 $\sqrt{2}$ 的長方形 14

◎ 習題① 16

第 2 章 量不盡的數——無理數—— 17

互除法 17

◎ 習題② 23

連分數 24

◎ 習題③ 27

循環小數 28

非循環無限小數 30

第 3 章 平方根的祕密—— 35

隱藏在正方形中的無理數 35

另一種方法 38

許許多多的 $\sqrt{a}$ 40

◎ 習題④ 46

發現不可思議的規則 47

◎ 習題⑤ 48

◎ 習題⑥ 50

歐基里德的證明 52

用色紙折出 $\sqrt{a}$ 54

第4章 許許多多無理數—— 近似值和平方根的四則運算 ————— 59

在數軸上定出刻度 59

用 $a+b\sqrt{2}$ 填滿數軸 61

◎ 習題7 63

試做無理數 64

求出近似值 65

◎ 習題8 69

平方根的四則運算——乘除 70

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$? 73

◎ 習題9 74

◎ 習題10 75

第5章 遊戲中的無理數——剪影猜謎 ————— 77

益智板「七巧板」 77

◎ 習題11 82

T 板 84

◎ 習題12 87

終極的剪影猜謎——F 板 88

◎ 習題13 90

第 6 章 美之中的無理數——黃金比和黃金切割 91

折出帶 $\sqrt{}$ 的長方形 91

黃金長方形 94

◎ 習題 14 99

隱藏在正多面體中的無理數 102

鏡頭的光圈是無理數 104

在畫布上常使用的黃金長方形 105

人體是黃金比 108

在建築物中看到的無理數 112

黃金比的起源 114

出現在日本建築物中的無理數 116

第 7 章 大自然中的無理數——費波南茲數列 121

費波南茲數列 121

隱藏在大自然中的無理數 125

費波南茲數和黃金比 132

◎ 習題 15 137

結 語 139

習題解答 140

第1章 影印機的數字之謎——紙的規格



●不可思議的數字

建 老師好！我們今年又來拜訪了。

拓 您好！又要麻煩您了。

Y 喔！好久不見了。已經一年了吧？！你們好像變壯了些。

建 因為我們已經是國三生了呀！

Y 你們打算待多久？

拓 大概一個禮拜。今年也要請老師教我們數學。

Y 一個禮拜的話，大概可以教你們「無理數」。

建 剛好可以當成作業。

Y 不過，作業應該靠自己完成吧！但是，有同伴的話，會更有樂趣。碰到問題，一定要追根究柢。

（雙胞胎兄弟——拓和建迅速進到 Y 老師的山莊中坐下）

拓 你翻來翻去的在找什麼？