1+1 大课堂

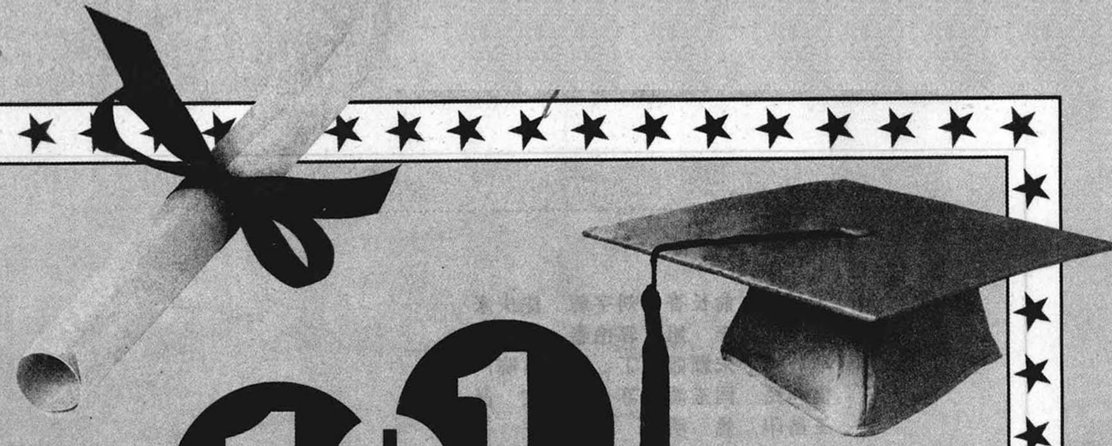
Da Ketang

高中数学

二年级 上

侯宝力 主编

东北师范大学出版社



1+1 大课堂

Da Ketang

高中数学

二年级

侯宝力 主编

东北师范大学出版社
长春

□主　　编:侯宝力
□副 主 编:张月柱
□编　　者:张月柱　俞长香　刘宇辉　沈庆来
陈　曦　李　旭　郭艳春　钟　江
牟　颖　朱颖丽　丁　黎　吕晓广
侯利民　闫玉波　苏　航　黄　晶
王昌印　姚　明

图书在版编目(CIP)数据

1+1大课堂．高中数学．二年级．上/侯宝力主编．
长春:东北师范大学出版社,2002.5
ISBN 7-5602-3019-9

Ⅰ.1…　Ⅱ.侯…　Ⅲ.数学课—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第019544号

□出 版 人:贾国祥　□总策划:第三编辑室
□责任编辑:刘忠谊　□封 面 设 计:魏国强
□责任校对:姜　虹　□责 任 印 制:张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街138号(130024)
电话:0431—5695744　5688470
传真:0431—5695744　5695734
网址:http://www.nnup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春第二新华印刷有限责任公司印刷
2002年5月第1版　2002年5月第1次印刷
开本:787mm×1092mm 1/16　印张:9.25 字数:243千
印数:00 001 —　12 000册

定价:9.90元

出版说明

培养中小学生的创新能力、创造性思维方式，提高创造性地运用知识解决实际问题的能力，是国家九五重点研究的课题，是中小学教师在教学过程中不断追求的目标，更是我们编写《1+1大课堂》的主旨。今天，我们将这套书作为一份厚礼，奉献给广大同学。

走进大课堂，新理念、新思维、新方法、新视觉使你目不暇接，流连忘返。

走进大课堂，巩固课内，拓展课外，定使你收获匪浅。

走进大课堂，创新题型、应用题型、竞赛题型，会培养你的创造性思维方式、多角度的探索精神、综合运用知识的能力。

让我们一起走进大课堂：

《**1+1大课堂**》吸收“九五”国家重点课题“面向21世纪中国基础教育课程教材改革实验”的最新研究成果，重视中小学课程一体化理论的应用，无论是内容和方法都具有超前性和实用性。

《**1+1大课堂**》按最新课程标准设计内容，依托人民教育出版社最新版本教材，又不局限于教材，具有很强的灵活性和指导性。

《**1+1大课堂**》既注意课内知识的学习，又兼顾课外能力的培养，包括竞赛能力及综合素质。作为少有的一套与教材同步的竞赛辅导书，既是对中小学课程教材的丰富，又是中小学生双休日、寒暑假课外活动的极好辅助读物。

《**1+1大课堂**》与人民教育出版社教材相配套，即一本教材配一本辅导书（上、下册配上、下册，全一册配全一册），分小学语文、数学，中学语文、外语、数学、物理、化学，共69册，其中秋季版41册。每册由**知识链接**、**学法扫描**、**例题引路**、**分层体验**、**实际应用**、**答案放映**六部分组成。

知识链接:在阐述本章与前后内容联系的同时,对知识点进行归纳总结,帮助学生从整体知识角度,理清知识脉络,构建科学的知识结构。

学法扫描:对本章知识点进行学习方法指导,针对学生学习所遇到的问题和困难,介绍学习策略,分析规律技巧,拓展发散思维空间。

例题引路:除对接近教材中典型习题加以分析外,还根据中小学教材内容增加竞赛内容,精选近年中、高考试题和作者多年教学积累的典型题目。通过例题分析,引导学生形成解题思路,掌握科学思维方法。

分层体验:精编基本题和提高题。基本题围绕重点、难点选题,旨在学好课本,巩固知识;提高题则以近年中、高考题和学科内综合题、跨学科综合题为主,意在培养学生综合运用所学知识分析和解决实际问题,提高创新能力。

实际应用:侧重理论联系实际,扩展学生知识视野,把生活中的具体问题知识化,从而提升学生的科学观念和素质。

答案放映:每章练习题均有答案,并配有提示与解题思维指导,使学生知其然也知其所以然,同时便于学生复习使用。

《**1+1大课堂**》由全国重点中小学特级和高级教师编写,大部分教师是参加教育部"面向21世纪教育振兴行动计划——跨世纪园丁工程"的骨干教师,具有很高的权威性。

《**1+1大课堂**》充分体现了求实、求新、求活的教育理念,它必将成为**教辅书海中的又一颗璀璨明珠!望天下学子,走进我们的大课堂,跨知识海洋,攀科学高峰!**

东北师大出版社第三编辑室

2002年5月

目 录

第六章　不　等　式

不等式是数学的重要内容，是研究数量大小关系的必备知识，是进一步学习数学和其他学科的基础和工具，是在初中所学不等式的基础上，从理论上加以系统地总结和提高．本章知识网络如下：

不等式

不等式的性质　不等式的证明　不等式的解法　不等式的应用

一　不等式的性质

★知识链接

1．理解两个实数的大小是利用实数运算性质来定义的．

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$　　　$a-b=0\Leftrightarrow a=b$　　　$a-b<0\Leftrightarrow a<b$

实数与数轴上的点是一一对应的，在数轴上不同的两点中，左边的点表示的实数比右边的点表示的实数小，实数的解法可以在数轴上表示．

2．理解并掌握不等式的 8 条性质，并能应用它们处理一些问题．这些性质是我们证明不等式和解不等式经常要用到的基础知识，条件和结论要掌握扎实．

(1) $a>b\Leftrightarrow b<a$　（对称性）

(2) $a>b, b>c\Rightarrow a>c$　（传递性）

(3) $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$

(4) $a>b, c>d\Rightarrow a+c>b+d$　（加法法则）

(5) $a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$　　$a>b, c<0\Rightarrow ac<bc$

(6) $a>b>0, c>d>0\Rightarrow ac>bd$　（乘法法则）

(7) $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}, n>1)$　（乘方法则）

(8) $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\,(n\in\mathbf{N}, n>1)$　（开方法则）

★学法扫描

1．应用这些性质时，要注意这些不等式还可以得到一些经常使用的结论．

由性质(3)可以得到：$a+b>c\Rightarrow a>c-b$（不等式的移项法则），由性质(4)可得到：$a>b, c<d\Rightarrow a-c>b-d$．由性质(5)可以推得：$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，还可以推得 $a, b, c, d\in\mathbf{R}^+$，且 $a>b, c<d\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$．

2．这些性质是不等式的理论基础，对于不等式性质，教科书上都给出证明．有些不等式的性质还可以用函数的单调性来证明，例如性质(3)$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$，可利用函数 $y=x+c$ 的单调性来证明．性质(5)$a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$，$a>b, c<0\Rightarrow ac<bc$，可利用函数 $y=cx$ 的单调性来证明，而性质(7)和性质(8)可以利用函数 $y=x^n$ 和 $y=x^{\frac{1}{n}}, x\in(0, +\infty)$上的单调性证明．

3．要注意不等式性质中哪些定理的条件是充要的，哪些是充分而不必要的．如 $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}, n>1)$中，$a, b\in\mathbf{R}^+$这个条件是充分而不必要的，因为当 n 为奇数时，只要 $a>b$，则 $a^n>b^n$．像乘、除、乘方、开方、倒数等性质都有附加条件不能乱用．

4．判别字母所连接的不等式正确性的方法：如果正确，要加以证明；如果不正确，只须举出反例．

5．两个实数的大小是用实数运算性质来定义的，这是最主要和最本质的思想，有时也要用到作商比较．设 a, b

$\in \mathbf{R}^+$,则$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$　　$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$　　$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

★例题引路

例1　判别下列命题是否正确,并说明理由.

(1) $a>b\Rightarrow a-c>b-c$　(2) $a>b,c=d\Rightarrow ac^n>bd^n,n\in \mathbf{N}^*$　(3) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　(4) $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$

(5) $a<b<0,c<d<0\Rightarrow ac>bd$　(6) $a^2>b^2\Leftrightarrow |a|>|b|$　(7) $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\Rightarrow a>b(n\in \mathbf{N}^*)$　(8) $a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$

[**分析**]　采用不等式性质,不正确举反例.

解　(1)命题正确,可由性质$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$直接推出.　(2)命题不正确,如$c=d=0$.

(3)命题不正确,如$c=0$.　(4)命题正确,可由性质$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$得到. $\because \frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2},c^2>0\Rightarrow a>b$.

(5)命题正确. $\because a<b<0,c<d<0\Rightarrow -a>-b>0,-c>-d>0\Rightarrow -a\cdot(-c)>(-b)\cdot(-d)$即$ac>bd$.

(6)命题正确. $\because a^2>b^2\Rightarrow \sqrt{a^2}>\sqrt{b^2}$(性质8)$\Rightarrow |a|>|b|$,且$|a|>|b|\Rightarrow |a|^2>|b^2|\Rightarrow a^2>b^2$.(性质7)

(7)命题正确. n为偶数时,可知$a\geqslant 0,b\geqslant 0$,从而$(\sqrt[n]{a})^n>(\sqrt[n]{b})^n\Rightarrow a>b$;$n$为奇数时,$y=x^n$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数,$\therefore (\sqrt[n]{a})^n>(\sqrt[n]{b})^n\Rightarrow a>b$,从而$a>b$.

(8)命题不正确. 如$3>-1,2>-8$,但$3\times 2>(-1)\times(-8)$不成立.

注　不等式性质是不等式变形的依据,使用时一定要分清哪些性质的条件与结论之间是充要的,哪些是不可逆的,解题时应引起充分的重视.

例2　比较$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$与$2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$的大小.

解　$\because$ $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-\left[2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-2=$

$\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\right]\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]-2=$

$2\left(2+\frac{4}{a^2}-1+\frac{2}{a^2}\right)-2=\frac{12}{a^2}>0\Rightarrow \left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3>2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$.

注　作差比较,其理论依据是$a>b\Leftrightarrow a-b>0$.

例3　比较a^4-b^4与$4a^3(a-b)$的大小.

解　作差比较. $(a^4-b^4)-4a^3(a-b)=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3-4a^3)=(a-b)[(a^2b-a^3)+(ab^2-a^3)+(b^3-a^3)]=-(a-b)^2(3a^2+2ab+b^2)=-(a-b)^2\left[\left(\sqrt{3}a+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2}{3}b^2\right]\leqslant 0$.　$\therefore a^4-b^4\leqslant 4a^3(a-b)$.

从而$a\neq b$时,恒有$a^4-b^4<4a^3(a-b)$,当$a=b$时,$a^4-b^4=4a^3(a-b)$.

注　实数的运算性质与实数大小之间的关系是作差比较法的理论依据. 其一般步骤是"作差→变形→定号(判断符号)",其中变形是关键. 变形手段一般有三种:或者化为一个常数,或者分解因式,或者配成几个数的平方和. 而其中分解因式是最常用到的方法,当所得的差是某个字母的二次三项式时,常用判别式法或配方法判别符号.

例4　设$x\in \mathbf{R}$,比较$\frac{1}{1+x}$与$1-x$的大小.

[**分析**]　作差,但要注意对题目涉及字母的讨论.

解　$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$　① 当$x=0$时$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x}=0,\therefore \frac{1}{1+x}=1-x$.　② 当$1+x<0$,即$x<-1$时,$\frac{x^2}{1+x}<0,\therefore \frac{1}{1+x}<1-x$.　③ 当$1+x>0$且$x\neq 0$时,即$x>-1$且$x\neq 0$时,$\frac{x^2}{1+x}>0,\therefore \frac{1}{1+x}>1-x$.

注　比较大小时,若差的正负不定,要注意分类讨论,分类的原则是不重不漏.

例5　(1)若$c>a>b>0$,求证:$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$;(2)$a>b>0,c<d<0,e<0\Rightarrow \frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

证明　(1) $\because c>a>b>0,\therefore 0<c-a<c-b$. 两边同除以$(c-a)(c-b)$得$\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0,\therefore \frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

(2) $c<d<0\Rightarrow\left.\begin{matrix}-c>-d>0\\ a>b>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-c>b-d>0\Rightarrow\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-d}\\ \text{又 } e<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$.

注 使用不等式性质时一定要注意其条件.

例 6 设 $x>0,a>0$ 且 $a\neq1$,试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小关系.

[**分析**] 根据题目结构,从不同角度去解决问题,可作差,也可以作商.

解 方法一 作差,令 $y=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$ $\because 0<x<1\Rightarrow-1<-x<0$ $\therefore 1<1+x<2,0<1-x<1$. 当 $a>1$ 时,有 $y=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)$ $\because 0<1-x^2<1\Rightarrow\log_a(1-x)^2<0\Rightarrow y>0$,$\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$. 当 $0<a<1$ 时,有 $y=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)$. $\because 0<1-x^2<1\Rightarrow\log_a(1-x^2)>0\Rightarrow y>0$,$\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$ 所以总有 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

方法二 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\dfrac{|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$,$(0<1-x<1,1<1+x<2)$

上式$=\dfrac{-\lg(1-x)-\lg(1+x)}{|\lg a|}=-\dfrac{\lg(1-x^2)}{|\lg a|}>0$,$(0<1-x^2<1)$ $\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

方法三 平方作差. $|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2=[\log_a(1-x)]^2-[\log_a(1+x)]^2=[\log_a(1-x)-\log_a(1+x)][\log_a(1-x)+\log_a(1+x)]=\log_a\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\log_a(1-x^2)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{\lg^2 a}\cdot\lg\dfrac{1-x}{1+x}>0$ ($\because 0<x<1\Rightarrow 0<1-x^2<1$,且 $0<\dfrac{1-x}{1+x}<1$) $\therefore|\log_a(1-x)|^2>|\log_a(1+x)|^2$,$\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

方法四 作商比较. $\dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{1+x}(1-x)|=-\log_{1+x}(1-x)=\log_{1+x}\dfrac{1}{1-x}>\log_{1+x}(1+x)=1$ ($\because 0<x<1\Rightarrow 0<1-x^2<1\Rightarrow 0<(1-x)(1+x)<1\Rightarrow 1+x<\dfrac{1}{1-x}$),$\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

注 变形过程中一定注意选择恰当的方法,同样是作差,可以从不同的角度去处理.

例 7 若 $0<\alpha<\pi$,试比较 $2\sin2\alpha$ 与 $\cot\dfrac{\alpha}{2}$ 的大小.

[**分析**] 采用三角公式,2α 与 $\dfrac{\alpha}{2}$ 都向 α"靠拢".

解 方法一 作差 $2\sin2\alpha-\cot\dfrac{\alpha}{2}=2\cdot2\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{4\sin^2\alpha\cos\alpha-(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{4\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)-(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{(1+\cos\alpha)[4\cos\alpha(1-\cos\alpha)-1]}{\sin\alpha}=\dfrac{-4(1+\cos\alpha)\left(\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\right)^2}{\sin\alpha}$. $\because\sin\alpha>0,1+\cos\alpha>0,\left(\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant0$,故 $2\sin2\alpha\leqslant\cot\dfrac{\alpha}{2}$,当且仅当 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立,此时 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ($\because\alpha\in(0,\pi)$).

方法二 作商比较. $\dfrac{2\sin2\alpha}{\cot\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{4\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}=4\cos\alpha(1-\cos\alpha)=1-(2\cos\alpha-1)^2\leqslant1$. $\because 0<\alpha<\pi$,$\therefore 0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\cot\dfrac{\alpha}{2}>0$,$\therefore 2\sin2\alpha\leqslant\cot\dfrac{\alpha}{2}$. 等号成立$\Leftrightarrow 2\cos\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{3}$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时,$2\sin2\alpha=\cot\dfrac{\alpha}{2}$;当 $\alpha\in(0,\pi)$ 且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{3}$ 时,$2\sin2\alpha<\cot\dfrac{\alpha}{2}$.

注 从函数名称以及角两个方面想方设法消除 $2\sin2\alpha$ 与 $\cot\dfrac{\alpha}{2}$ 的差异,便于找到共同点比较.

例 8 已知 $1\leqslant a\leqslant2,3\leqslant b\leqslant4$,求 $2a+b,a-b$ 及 $\dfrac{a}{b}$ 的范围.

[**分析**] 正确使用不等式性质.

解 $\left.\begin{matrix}1\leqslant a\leqslant2\Rightarrow2\leqslant2a\leqslant4\\ 3\leqslant b\leqslant4\end{matrix}\right\}\Rightarrow5\leqslant2a+b\leqslant8$, $\left.\begin{matrix}3\leqslant b\leqslant4\Rightarrow-4\leqslant-b\leqslant-3\\ 1\leqslant a\leqslant2\end{matrix}\right\}\Rightarrow-3\leqslant a-b\leqslant-1$

$\left.\begin{matrix}3\leqslant b\leqslant4\Rightarrow\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{1}{3}\\ 1\leqslant a\leqslant2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{2}{3}$.

注 同向不等式不能相减. 要求 $a-b$ 范围,必须先求 $-b$ 范围,然后求 $a+(-b)$ 范围.

例9 已知$a_1,a_2,\cdots,a_n$为各项都大于0的等比数列,公比$q\neq1$,则(　　).

A. $a_1+a_8>a_4+a_5$　B. $a_1+a_8<a_4+a_5$　C. $a_1+a_8=a_4+a_5$　D. a_1+a_8和a_4+a_5的大小关系不能由已知确定

[分析] 作差比较.

解 设此等比数列公比为q,则$a_1>0,q>0$且$q\neq1$,$(a_1+a_8)-(a_4+a_5)=a_1+a_1q^7-a_1q^3-a_1q^4=a_1(1-q^3)+a_1q^4(q^3-1)=a_1(1-q^3)(1-q^4)=a_1(1-q)(1+q+q^2)(1+q)(1-q)(1+q^2)=a_1(1-q)^2(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)>0$. $\therefore(a_1+a_8)-(a_4+a_5)>0$, $\therefore a_1+a_8>a_4+a_5$.

注 (1) 比较法的思想在高中数学的每一块儿都有体现,要细心体会. (2) 判别$a_1(1-q^3)(1-q^4)$的符号时也可以采用如下方法:当$q>1$时$\Rightarrow1-q^3<0,1-q^4<0\Rightarrow(1-q^3)(1-q^4)>0$. 当$0<q<1$时$\Rightarrow1-q^3>0,1-q^4>0\Rightarrow(1-q^3)(1-q^4)>0$.

★分层体验

基　本　题

1. 若$a>b$,则下面不等式不成立的是(　　).

A. $a+1>b+1$　B. $a-3>b-3$　C. $-5a<-5b$　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

2. 下列命题正确的是(　　).

A. $ax>b$,则$x>\frac{b}{a}$　B. $a^2x>a^2y$,则$x>y$　C. $\frac{x}{y}>\frac{u}{v}$,则$vx>uy$　D. $a>b,c<d,abcd\neq0$,则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

3. 若$f(x)=3x^2-x+1,g(x)=2x^2+x-1$,则$f(x)$与$g(x)$的大小关系是(　　).

A. $f(x)>g(x)$　B. $f(x)=g(x)$　C. $f(x)<g(x)$　D. 随x值变化而变化

4. 已知$a<0,-1<b<0$,那么下列不等式成立的是(　　).

A. $a>ab>ab^2$　B. $ab^2>ab>a$　C. $ab>a>ab^2$　D. $ab>ab^2>a$

5. 若角α,β满足$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则$\alpha-\beta$的取值范围是(　　).

A. $-\pi<\alpha-\beta<0$　B. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$　C. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$　D. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$

6. 若正数a,b,c,d满足$a+d=b+c,|a-d|<|b-c|$,则正确结论为(　　).

A. $ad=bc$　B. $ad<bc$　C. $ad>bc$　D. ad与bc的大小不确定

7. 已知$a,b,c,d\in\mathbf{R}$,且$ab>0,-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$,则下列各式中恒成立的是(　　).

A. $bc<ad$　B. $bc>ad$　C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　D. $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

8. 若$0<c<1<d$,则$a<b$是$a\log_c d>b\log_c d$的(　　).

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分又不必要条件

9. 若$a>b,c<0$,则$c(a-d)$________$c(b-d)$.

10. 已知$30<x<42,16<y<24$,则$x-2y$的范围是________,$\frac{x}{y}$的范围是________.

11. $a>b>0,m>0,n>0$,则$\frac{b}{a},\frac{a}{b},\frac{b+m}{a+m},\frac{a+n}{b+n}$的大小关系是________.

12. $a,b\in\mathbf{R}$,命题$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$成立的充要条件是________.

13. 设$a,b\in\mathbf{R}^+$,且$a\neq b$,试比较$\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的大小关系.

14. 设$f(x)=ax^2+bx$,且$1\leqslant f(-1)\leqslant2,2\leqslant f(1)\leqslant4$,求$f(-2)$的最大值与最小值.

15. 若$a>0,b>0$,且$a\neq b$,试比较$\left(\frac{b}{a}\right)^n$与$\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$的大小.

16. 已知$x>1,f(x)=1+\log_x3,g(x)=2\log_x2$.

(1) 比较$f(x)$与$g(x)$的大小.　(2)问x为何值时$|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)=4$.

提 高 题

1. 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$,则( ).

A. $0<a<b<1$　　B. $0<b<a<1$　　C. $a>b>1$　　D. $b>a>1$

2. 设甲:m 和 n 满足 $\begin{cases}2<m+n<4,\\0<mn<3\end{cases}$ 乙满足 $\begin{cases}0<m<1,\\2<n<3\end{cases}$ 那么( ).

A. 甲是乙的充分条件,但不是必要条件　　B. 甲是乙的必要条件,但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　D. 甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

3. 已知 $a^2<x<a$,$M=\log_a x^2$,$N=\log_a(\log_a x)$,$P=(\log_a x)^2$,则( ).

A. $M>N>P$　　B. $M>P>N$　　C. $P>M>N$　　D. $N>M>P$

4. 当 $0<a<b<1$ 时,下列不等式中正确的是( ).

A. $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$　　B. $(1+a)^a>(1+b)^b$　　C. $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　　D. $(1-a)^a>(1-b)^b$

5. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且方程 $x^2+ax+2b=0$ 和 $x^2+2bx+a=0$ 都有实根,求 $a+b$ 的最小值.

6. 若实数 a,b,c 满足 $b+c=-3a^2-2a-12$,$b-c=a^2-4a+4$,试确定 a,b,c 的大小关系.

7. 已知 $1\leqslant\lg\dfrac{x}{y}\leqslant 2$,$2\leqslant\lg\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant 3$,求 $\lg\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{y}}$ 的取值范围.

8. 已知 $x>0$,$x\neq 1$,$m>n>0$. 比较 $x^m+\dfrac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ 的大小关系.

9. 若 $0<x<\pi$,$0<y<\pi$,比较 $\dfrac{1}{2}(\sin x+\sin y)$ 与 $\sin\dfrac{x+y}{2}$ 的大小.

★实际应用

1 某种商品进价每个 80 元,零售价每个 100 元,为了促进销售,拟采用每买这样的一个商品,赠送一个小礼品的方法. 实验表明:礼品价值为 1 元时,销售量就增加 10%,且在一定范围内,礼品价值为 $n+1$ 元时,比礼品价值为 n 元时($n\in\mathbf{N}$)的销售量增加 10%. 请设计礼品的价值以使商店获得最大利润.

[**分析**] 把礼品价值为 n 元时商店所获利润记为数列 $\{a_n\}$,通过考察数列 $\{a_n\}$ 的单调性求得 a_n 的最大值及此时的 n.

解 把礼品价值为 n 元时商店所获利润记为数列 $\{a_n\}$,则 $a_n=a(1+10\%)^n(20-n)$ $(n\in[0,20),n\in N)$,其中 a 为没有促销手段时的销售量.

下面通过作差比较法考察数列 $\{a_n\}$ 的单调性:$a_{n+1}-a_n=a\left(\dfrac{11}{10}\right)^{n+1}[20-(n+1)]-a\left(\dfrac{11}{10}\right)^n(20-n)=a\left(\dfrac{11}{10}\right)^n\left[\dfrac{11(19-n)}{10}-20+n\right]=a\left(\dfrac{11}{10}\right)^n\dfrac{9-n}{10}=a\dfrac{11^n}{10^{n+1}}(9-n)$ $(n\in[0,20),n\in N)$. $\therefore n<9$ 时,$a_{n+1}-a_n>0$;$n>9$ 时,$a_{n+1}-a_n<0$;$n=9$ 时,$a_{n+1}=a_n$. 所以礼品价值为 9 元或 10 元时可以使商店获得最大利润.

★答案放映

基本题:1. D **2.** B **3.** A **4.** D **5.** A **6.** C **7.** B **8.** C **9.** $<$ **10.** $(-18,10)$,$\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{21}{8}\right)$ **11.** $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+n}{b+n}>\dfrac{b+m}{a+m}>\dfrac{b}{a}$ **12.** $a>0>b$ **13.** 解:$\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\left(\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\dfrac{b\sqrt{b}+a\sqrt{a}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a-b)}{\sqrt{ab}}$. $\because a,b\in\mathbf{R}^+$,$a\neq b\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 与 $a-b$ 同号,$\therefore\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$

14. 解:令 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$,即 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$,$\therefore\begin{cases}m+n=4,\\-m+n=-2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$ 即 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$. $\because 1\leqslant f(-1)\leqslant 2$,$\therefore 3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$. 而 $2\leqslant f(1)\leqslant 4$,$\therefore 5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$,即 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

15. 解：$\dfrac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}}=\dfrac{b}{a}$. 当 $a>b$ 时，有 $0<\dfrac{b}{a}<1$，$\therefore\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}<\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$；当 $a<b$ 时，有 $\dfrac{b}{a}>1$，$\therefore\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}>\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$.

16. 解：(1) $f(x)-g(x)=(1+\log_x 3)-2\log_x 2=\log_x 3x-\log_x 4=\log_x \dfrac{3}{4}x$. 当 $\dfrac{3}{4}x>1$，即 $x>\dfrac{4}{3}$ 时 $\Rightarrow\log_x \dfrac{3}{4}x>0$，此时有 $f(x)>g(g)$；当 $\dfrac{3}{4}x=1$，即 $x=\dfrac{4}{3}$ 时 $\Rightarrow\log_x \dfrac{3}{4}x=0$，此时有 $f(x)=g(x)$；当 $0<\dfrac{3}{4}x<1$，即 $1<x<\dfrac{4}{3}$ 时 $\Rightarrow\log_x \dfrac{3}{4}x<0$，此时有 $f(x)<g(x)$. (2) $|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)=4$. 由(1)当 $x\geqslant\dfrac{4}{3}$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，方程等价于 $2f(x)=4\Leftrightarrow 2(1+\log_x 3)=4\Leftrightarrow\log_x 3=1\Rightarrow x=3$. 当 $1<x<\dfrac{4}{3}$ 时，有 $f(x)<g(x)$，方程等价于 $2g(x)=4\Leftrightarrow 4\log_x 2=4\Leftrightarrow\log_x 2=1\Rightarrow x=2$（舍），综上 $x=4$.

提高题：**1.** A **2.** B **3.** C **4.** D

5. 解：由题意 $\begin{cases}a^2-8b\geqslant 0,\\4b^2-4a\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2\geqslant 8b,①\\b^2\geqslant a,②\end{cases}$ 由已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，将①式两端平方得 $a^4\geqslant 64b^2\cdots$③. 将②式代入③式中得 $\left.\begin{matrix}a^4\geqslant 64a\\a>0\end{matrix}\right\}$ 即 $\left.\begin{matrix}a^3\geqslant 64\\a>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\geqslant 4$，由② $b^2\geqslant a$ 知 $\left.\begin{matrix}b^2\geqslant 4\\b>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\geqslant 2$. 把 $a\geqslant 4$，$b\geqslant 2$ 代回原①②中检验，等号可以成立，则 $a+b\geqslant 6$，即 $a+b$ 的最小值为 6.

6. 解：由题 $b-c=(a-2)^2\geqslant 0$，$\therefore b\geqslant c$，而 $2b=(b+c)+(b-c)=(-3a^2-2a-12)+(a^2-4a+4)=-2a^2-6a-8$. $\therefore b=-a^2-3a-4$，$\therefore b-a=-a^2-4a-4=-(a+2)^2\leqslant 0$，$\therefore a=2$ 时，$a>b=c$；$a=-2$ 时，$a=b>c$；当 $a\neq\pm 2$ 时，$a>b>c$.

7. 设 $\lg\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{y}}=m\lg\dfrac{x}{y}+n\lg\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}$，则 $3\lg x-\dfrac{1}{3}\lg y=(m+2n)\lg x-\left(m+\dfrac{n}{2}\right)\lg y$，$\begin{cases}m+2n=3,\\m+\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}m=-\dfrac{5}{9},\\n=\dfrac{16}{9}.\end{cases}$ 得 $\lg\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{y}}=-\dfrac{5}{9}\lg\dfrac{x}{y}+\dfrac{16}{9}\lg\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}$，而 $1\leqslant\lg\dfrac{x}{y}\leqslant 2$ 且 $2\leqslant\lg\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant 3$，则 $-\dfrac{10}{9}\leqslant-\dfrac{5}{9}\lg\dfrac{x}{y}\leqslant-\dfrac{5}{9}$，$\dfrac{32}{9}\leqslant\dfrac{16}{9}\lg\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant\dfrac{48}{9}$，则 $\dfrac{22}{9}\leqslant-\dfrac{5}{9}\lg\dfrac{x}{y}+\dfrac{16}{9}\lg\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant\dfrac{43}{9}$，即 $\dfrac{22}{9}\leqslant\lg\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{y}}\leqslant\dfrac{43}{9}$.

8. 解：$x^m+\dfrac{1}{x^m}-\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)=(x^m-x^n)+\left(\dfrac{1}{x^m}-\dfrac{1}{x^n}\right)=(x^m-x^n)\left(1-\dfrac{1}{x^{m+n}}\right)=(x^m-x^n)\left(\dfrac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}\right)$

①当 $x>1$ 时，$x^m>x^n$，$x^{m+n}>1$，则 $(x^m-x^n)\left(\dfrac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}\right)>0$，即 $x^m+\dfrac{1}{x^m}>x^n+\dfrac{1}{x^n}$. ②当 $0<x<1$ 时，$x^m<x^n$，$x^{m+n}<1$，则 $(x^m-x^n)\left(\dfrac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}\right)>0$，即 $x^m+\dfrac{1}{x^m}>x^n+\dfrac{1}{x^n}$. 综上 $x^m+\dfrac{1}{x^m}>x^n+\dfrac{1}{x^n}$.

9. 解：$\dfrac{1}{2}(\sin x+\sin y)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$. $0<x<\pi$ 且 $0<y<\pi$，则 $-\pi<-y<0$. 即 $-\pi<x-y<\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x-y}{2}<\dfrac{\pi}{2}$. 此时 $0<\cos\dfrac{x-y}{2}\leqslant 1$. 又 $0<\dfrac{x+y}{2}<\pi$，$\therefore 0<\sin\dfrac{x+y}{2}\leqslant 1$. 那么 $\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}\leqslant\sin\dfrac{x+y}{2}$，即 $\dfrac{1}{2}(\sin x+\sin y)\leqslant\sin\dfrac{x+y}{2}$.

二　算术平均数与几何平均数

★知识链接

利用不等式的性质，我们可以推导出重要的不等式. 这些不等式是以后我们推理、论证的基础.

1. 掌握重要不等式：$a^2+b^2\geqslant 2ab$（等号成立当且仅当 $a=b$）. 这个不等式的适用范围是 $a,b\in\mathbf{R}$.

2. 掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单的应用.

定理　如果 a,b 是正数，那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 取"="号）.

这里，我们称$\frac{a+b}{2}$为 a,b 的算术平均数，称 $\sqrt{ab}$ 为 a,b 的几何平均数. 因而这一定理又可叙述为：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 能够用这两个重要不等式证明较简单的不等式，并会求一些函数的最大值与最小值.

★学法扫描

1. 在使用重要不等式的过程中，首先要注意使用条件. $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 中，a,b 的范围是一切实数. 而$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$中的 a,b 是正实数. 其次要注意在求最大（或最小）值的过程中，和（或积）必须为常数. 另外在求最大（或最小）值的过程中必须检查等号是否能取到.

2. 要注意重要不等式的变形. 如：$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$（$a,b\in\mathbf{R}$）. 这里 a,b 的范围是一切实数，它在求最大（或最小）值时也经常用到，是一个很重要的不等式，和 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$相比较，$a,b$ 的范围扩展了.

★例题引路

例 1　试证明下列结论：

(1) a 是正数$\Rightarrow a+\frac{1}{a}\geqslant 2$；$a$ 是负数$\Rightarrow a+\frac{1}{a}\leqslant -2$　　(2) a,b 同号$\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$；$a,b$ 异号$\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant -2$

(3) $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\tan\theta+\cot\theta\geqslant 2$　　(4) $\log_a b+\log_b a\leqslant -2$，其中 $a\in(0,1)$，$b\in(1,+\infty)$.

[分析]　这些结论是均值不等式得到的必然结果，也是以后做题过程中经常遇到的模式.

证明　(1) $a>0\Rightarrow\frac{1}{a}>0$，$\therefore a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$. 等号成立当且仅当 $a=\frac{1}{a}\Rightarrow a=1$. $a<0$ 时，$\Rightarrow -a>0$，$-\frac{1}{a}>0$. $\therefore a+\frac{1}{a}=-\left[(-a)+\left(-\frac{1}{a}\right)\right]\leqslant -2\sqrt{(-a)\left(-\frac{1}{a}\right)}=-2$. 等号成立当且仅当 $-a=-\frac{1}{a}\Rightarrow a=-1$.

(2) a,b 同号$\Rightarrow\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$，$\therefore\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$. 等号成立当且仅当$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\Rightarrow a=b$. a,b 异号$\Rightarrow\frac{b}{a}<0$，$\frac{a}{b}<0$，$\therefore\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-\left[\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{b}{a}\right)\right]\leqslant -2\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)}=-2$.

等号成立当且仅当$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\Rightarrow a=-b$.

(3) $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\tan\theta>0$，$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}>0$，$\therefore\tan\theta+\cot\theta\geqslant 2\sqrt{\tan\theta\cdot\cot\theta}=2$. 等号成立当且仅当 $\tan\theta=\cot\theta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$.

(4) $\because a\in(0,1)$，$b\in(1,+\infty)$，$\therefore\log_a b<0$，$\log_b a<0$，$\therefore\log_a b+\log_b a=-\left[(-\log_a b)+\left(-\frac{1}{\log_a b}\right)\right]\leqslant -2\sqrt{(-\log_a b)\left(\frac{1}{-\log_a b}\right)}=-2$. 等号成立$\Leftrightarrow\log_a b=\log_b a\Rightarrow\log_a b=-1$.

例 2　已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，求证 $\min\{a,b\}\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\max\{a,b\}$.

[分析]　这里采用分析法或重要不等式证明.

证明　先证 $\min\{a,b\}\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，不妨设 $a\geqslant b$，则 $\min\{a,b\}=b$，$\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}$，从而，$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{2}{b}}=b$. 再证$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$.　方法一　$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\sqrt{ab}=2$，$\therefore\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$.

方法二　$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{ab}}}=\sqrt{ab}$. 再证$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2=\frac{(a+b)^2-2(a^2+b^2)}{4}=-\frac{(a-b)^2}{4}\leqslant0$. ∴ $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，最后证$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\max\{a,b\}$，不妨设 $a\geqslant b$，则 $a^2\geqslant b^2$，从而$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+a^2}{2}}=a=\max\{a,b\}$. 从而，有 $\min\{a,b\}\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\max\{a,b\}$，其中等号成立当且仅当 $a=b$.

注　(1) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$叫做 a 与 b 的调和平均数. (2) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$叫做 a 与 b 的平方平均数. (3) 记住这些结论在处理一些题目时能给我们带来极大的方便.

例3　求证下列不等式：

(1) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$；(2)若 a,b,c 是不全相等的正数，求证：$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$；

(3) $a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$，并指出等号成立的条件.

证明　(1) ∵ $a^2+b^2\geqslant2ab$，$b^2+c^2\geqslant2bc$，$c^2+a^2\geqslant2ca$. 把上述三个表达式相加：$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant2(ab+bc+ca)$，∴ $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

(2) ∵ $b^2+c^2\geqslant2bc$，$a>0$，∴ $a(b^2+c^2)\geqslant2abc$，同理 $b(c^2+a^2)\geqslant2abc$，$c(a^2+b^2)\geqslant2abc$. ∵ a,b,c 不全相等，∴ 上述三个不等式等号不能同时成立，把三式左右分别相加得：$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$.

(3) ∵ $a^4+b^4\geqslant2a^2b^2$，$b^4+c^4\geqslant2b^2c^2$，$c^4+a^4\geqslant2c^2a^2$. 把上述三个表达式相加，$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. 当且仅当 $a^2=b^2=c^2$ 时等号成立. ∵ $a^2b^2+b^2c^2\geqslant2ab^2c$，$b^2c^2+c^2a^2\geqslant2abc^2$，$c^2a^2+a^2b^2\geqslant2a^2bc$. 把上述三个表达式相加，$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geqslant2abc(a+b+c)$，所以 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$，等号成立当且仅当 $a=b=c$.

注　先用平均值不等式，再迭加.

例4　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\geqslant4$.

[**分析**]　先用平均值不等式，再迭乘.

证明　$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)=[a+(b+c)]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\geqslant2\sqrt{a(b+c)}\cdot2\sqrt{\frac{1}{a(b+c)}}=4$.

例5　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

[**分析**]　先证明$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

证明　∵ $\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4}\geqslant0$，∴ $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，从而有 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$. 同理$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$. 把上述三式相加，得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

注　本题的证明思路也可以受到平方平均数与算术平均数的启发. 这说明记住一些重要结论能够帮助我们快速的找到解题思路.

例6　设 a,b,c 为非负数，求证：$\frac{1}{2}(a+b+c)\geqslant\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}-7$.

[**分析**]　采用均值不等式，去寻找满足$\frac{a+\square}{2}\geqslant\sqrt{a}$的"□".

证明　∵ $\frac{a+1}{2}\geqslant\sqrt{a}$，$\frac{b+4}{2}\geqslant\sqrt{4b}=2\sqrt{b}$，$\frac{c+9}{2}\geqslant\sqrt{9c}=3\sqrt{c}$. 把上述三个表达式相加，

$\frac{1}{2}(a+b+c+14)\geqslant\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$，∴ $\frac{1}{2}(a+b+c)\geqslant\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}-7$.

注　分析已知表达式结构，恰当使用均值不等式是本题的关键.

例 7　(1) 求函数 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$的最小值;(2) 求函数 $y=2-x-\frac{3}{x}(x>0)$的最大值.

解　(1) $y=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$,等号成立$\Leftrightarrow x=\frac{4}{x}\Rightarrow x=2$,$\therefore y_{\min}=4$.

(2) $y=2-\left(x+\frac{3}{x}\right)\leqslant 2-2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2-2\sqrt{3}$,等号成立当且仅当 $x=\frac{3}{x}\Rightarrow x=\sqrt{3}$,$\therefore y_{\max}=2-\sqrt{3}$.

注　采用均值不等式求最大值(或最小值)时一定要指出等号成立的条件.

例 8　求函数 $y=x+\frac{4}{x}$,$x\in(0,1]$上的最小值.

[**分析**]　采用重要不等式或函数的单调性.

解　错解:由题 $y=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$,$\therefore y_{最小值}=4$.

错误之处在于等号取不到,因为等号成立当且仅当 $x=\frac{4}{x}\Rightarrow x=2$,而 $x\in(0,1]$,所以不能取到等号.

方法一　$y=x+\frac{4}{x}=(x+\frac{1}{x})+\frac{3}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+\frac{3}{1}=5$($y=\frac{3}{x}$在$(0,1]$上减函数,前后两部分均在 $x=1$ 时取到最小值),

等号成立$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{x},\\x=1,\end{cases}$即 $x=1$ 时取等号. $\therefore y_{\min}=5$.

方法二　可先用函数的单调性定义去证明函数 $y=x+\frac{4}{x}$在$(0,1]$上为减函数(实质上在$(0,2]$上为减函数).任取 $x_1,x_2\in(0,1]$且 $x_1<x_2$. $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{4}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{4}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\left(\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right)=(x_1-x_2)\frac{x_1x_2-4}{x_1x_2}$.
$\because 0<x_1<x_2\leqslant 1$,$\therefore x_1-x_2<0$,$x_1x_2-4<0$,$x_1x_2>0$,$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$,$\therefore f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $y=x+\frac{4}{x}$在$(0,1]$上减函数,$\therefore x=1$ 时,$y_{\min}=1+\frac{4}{1}=5$.

方法三　任取 $x\in(0,1]$,则 $f(x)-f(1)=\left(x+\frac{4}{x}\right)-\left(1+\frac{4}{1}\right)=(x-1)+\frac{4(1-x)}{x}=(x-1)\frac{x-4}{x}\geqslant 0$ ($\because x-1\leqslant 0$,$x>0$,$x-4<0$),$\therefore f(x)\geqslant f(1)$,即 $y_{最小}=f(1)=5$.

注　(1) 采用均值不等式求最值时,一定要遵循下面三句话:看正数,凑常数,抓等数. 看正数是指公式适用条件,凑常数是指和(或积)必须是一常数,抓等数是指等号能取到才能保证使所得到的值为最大或最小. (2) 本题采用 $y=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=2$,虽然 x,$\frac{4}{x}$均为正数,其乘积为常数,但等号取不到,而方法一把它写成 $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{3}{x}$,前面采用均值不等式,后面采用反比例函数的单调性,保证了前后两部分同时在 $x=1$ 取到了最小值. 如果用下面方法做仍然是错误的:$y=x+\frac{4}{x}=x+\frac{\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{15}{4}}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{\frac{1}{4}}{x}}+\frac{\frac{15}{4}}{1}=1+\frac{15}{4}=\frac{19}{4}$. 等号成立$\Leftrightarrow x=\frac{\frac{1}{4}}{x}$,$x=1$. 前者 $x=\frac{1}{2}$,后者 $x=1$,前后两部分等号成立条件不一致. 所以拆项时必须保证前后两部分等号成立条件一致. (3) 函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$是一类极其重要的函数. 该函数在$(0,\sqrt{a}]$上为减函数,在$[\sqrt{a},+\infty)$上为增函数,使用这一结论时必须事先予以证明.

例 9　求下列函数的最小值.

(1) $y=2+3x+\frac{4}{x-1}\ (x>1)$;(2) $y=\frac{x^4+3x^2+3}{x^2+1}$;(3) $y=x+\frac{1}{x}+\frac{16x}{x^2+1}\ (x>0)$.

[**分析**]　采用拆项、填项、配凑,使题目的结构能用均值不等式.

解　(1) $y=2+3x+\frac{4}{x-1}=3(x-1)+\frac{4}{x-1}+5\geqslant 2\sqrt{3(x-1)\frac{4}{x-1}}+5=5+4\sqrt{3}$.

等号成立当且仅当 $3(x-1)=\frac{4}{x-1}\Rightarrow(x-1)^2=\frac{4}{3}\Rightarrow x=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$,此时 $y_{\min}=5+4\sqrt{3}$.

(2) $y=\frac{x^4+3x^2+3}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)^2+(x^2+1)+1}{x^2+1}=x^2+1+\frac{1}{x^2+1}+1\geqslant2\sqrt{(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}}+1=3$.

等号成立 $\Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow x^2+1=1$,即 $x=0$ 时,$y_{\min}=3$.

(3) $y=x+\frac{1}{x}+\frac{16x}{x^2+1}=x+\frac{1}{x}+\frac{16}{x+\frac{1}{x}}\geqslant2\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{16}{x+\frac{1}{x}}}=8$.

等号成立 $\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{16}{x+\frac{1}{x}}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=4$,即 $x=2\pm\sqrt{3}$ 时,$y_{\min}=8$.

注 当题目的结构不能直接用均值不等式时,需要适当配凑或拆项,这是经常要用到的一种技巧.

例10 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$,且 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$,求 $x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值.

[**分析**] 通过配凑,使和为常数.

解 $x\sqrt{1+y^2}=\sqrt{x^2(1+y^2)}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot4x^2(1+y^2)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{4x^2+1+y^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{4}$.

等号成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2=1+y^2,\\4x^2+y^2=4,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=\frac{3}{2},\\x^2=\frac{5}{8},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{4},\\y=\frac{\sqrt{6}}{2}.\end{cases}$ 即 $x=\frac{\sqrt{10}}{4}$,$y=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时,$x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值为 $\frac{5}{4}$.

例11 已知 $x>0,y>0$,且 $x+2y=1$,求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

[**分析**] 采用均值不等式.

解 错解一 $\because x+2y=1$,$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+2y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(2y+\frac{1}{y}\right)-1\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\sqrt{2y\cdot\frac{1}{y}}-1=1+2\sqrt{2}$. 所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $1+2\sqrt{2}$.

注 在求解过程中两次使用均值不等式:$x+\frac{1}{x}\geqslant2$,等号成立条件是 $x=1$;$y+\frac{2}{y}\geqslant2\sqrt{2}$ 等号成立条件是 $y=\sqrt{2}$,此时 $x+2y=1+2\sqrt{2}$ 与已知矛盾,从而导致错误.

错解二 $\because x+2y=1$,$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant2\sqrt{2xy}\cdot2\sqrt{\frac{1}{xy}}=4\sqrt{2}$,即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 最小值为 $4\sqrt{2}$.

注 求解过程中使用了两次均值不等式,等号成立的条件是 $x=2y$ 和 $x=y$,显然矛盾.

错解三 由 $x+2y=1$,得 $y=\frac{1-x}{2}$,$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}=\frac{x+1}{x(1-x)}$. $\because x(1-x)\leqslant\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,等号成立 $\Leftrightarrow x=1-x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$,$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqslant4(x+1)=4\times\frac{3}{2}=6$. 所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 6.

注 在分子有变量 $x+1$ 的情况下,对分母 $x(1-x)$ 使用均值不等式是错误的.

方法一 $\because x+2y=1$,$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+2y}{x}+\frac{x+2y}{y}=3+\left(\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geqslant3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3+2\sqrt{2}$,等号成立当且仅当 $\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{x}{y},\\x+2y=1.\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{2}-1,y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法二 $\because x+2y=1$,$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}+2$(下同解法一)

方法三 令 $x=\cos^2\theta,2y=\sin^2\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}=(1+\tan^2\theta)+2(1+\cot^2\theta)=3+(\tan^2\theta+2\cot^2\theta)\geqslant3+2\sqrt{\tan^2\theta\cdot2\cot^2\theta}=3+2\sqrt{2}$.