大学数学教与学研究系列之

助教 助学 助考研

# 微积分

## 教与学要览

WEIJIFEN JIAO YU XUE YAOLAN

喻德生 主编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

# 微积分教与学要览

喻德生　主编





西南交通大学出版社
·成　都·

## 内容提要

本书参照经、管、文科《微积分》教学的基本内容，根据各章的内容分节论述微积分教与学的问题，每节均由教学目标、内容提要、疑点解析、例题分析和练习题五个部分组成. 教学目标根据微积分教学大纲的基本要求，逐点进行编写，目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性；内容提要以各节的知识结构为框架，用树形图表的方式，简明扼要地总结、概括各节的主要内容，从而使学生掌握各个知识之间的联系，使零散的知识形成系统的知识结构；疑点解析围绕教学的重点、难点，从不同侧面阐述有关知识点的数学思想、数学方法和教学方法等方面的内容，从而加深知识的理解、解决微积分教学中可能出现的一些问题；例题分析选择、构造一些比较典型的题目，从不同侧面阐述解题的思路、方法和技巧，每个题均按照“例题+分析+解或证明+思考”的模式编写，广泛运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质，从而把“师生对话”的机制植入融入解题的过程中，使“教、学、思”熔于一题，使举一反三成为可能，提高学生分析问题和解决问题的能力；练习题使学生在各题“思考”的基础上，进一步得到训练.

每章还配有测试卷一套，可作为学生学完各章内容之后，检测自己掌握所学知识的程度之用. 此外，书末还附有各节练习题答案或提示，以及测试卷答案.

本书旨在为《微积分》的教学与复习提供帮助，可作为经、管、文科《微积分》学习的指导书和研究生考试的复习资料供学生使用，也可以作为《微积分》教学的同步教材供教师参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分教与学要览 / 喻德生主编. —成都：西南交通大学出版社，2013.9
ISBN 978-7-5643-2587-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①喻… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 196383 号

微积分教与学要览

喻德生　主编

*

责任编辑　张宝华
封面设计　墨创文化

西南交通大学出版社出版发行
四川省成都市金牛区交大路 146 号　邮政编码: 610031　发行部电话: 028-87600564
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蓉军广告印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm × 260 mm　印张: 22.75
字数: 567 千字
2013 年 9 月第 1 版　2013 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-2587-9
定价: 37.00 元

# 前　言

本书根据高等学校微积分课程教学的基本要求，结合当前微积分教学改革和学生学习的实际需要，组织教学经验比较丰富的教师编写. 它可作为微积分学习的指导书和研究生考试的复习资料供学生使用，也可以作为微积分教学的同步教材供教师参考.

该书参照理《微积分》教材的基本内容，依据各章知识结构的体系——知识单元分节进行编写. 每节均包括教学目标、内容提要、疑点解析、例题分析和练习题五个部分，各部分编写说明如下：

一、**教学目标**　根据微积分教学大纲的基本要求，分层次逐点进行编写. 目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性.

二、**内容提要**　以各节的知识结构为框架，用树形图表的方式，简明扼要地总结、概括各节的主要内容. 目的是对各节的教学内容进行梳理，使学生掌握各个知识之间的联系，从而使零散的知识形成系统的知识结构. 在这部分中，通常先列出所述知识点的名称，这样当你熟悉这个名称的含义时，就不必往下看.

三、**疑点解析**　围绕微积分教学的重点、难点，从不同侧面阐述有关知识点的数学思想、数学方法，教学方法等方面的内容，主要包括一些概念的理解，一些定理条件与结论的分析，一些解题方法与技巧的总结，各种知识之间的区别与联系等，从而加深知识的理解、解决高等数学教学中可能出现的一些问题.

四、**例题分析**　围绕微积分教学内容的重点、难点，按每大节 17 个、小节 10 个左右例题的幅度选择一些比较典型的例题，从不同侧面阐述解题的思路、方法与技巧. 每个题均按照“例题+分析+解或证明+思考”的模式编写，运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质. 从而在解题的过程中，运用“师生对话”的机制，使“教、学、思”熔于一题，使举一反三成为可能，提高学生分析问题和解决问题的能力.

五、**练习题**　各节大约按例题一半的幅度配备练习题. 目的是让学生在各题“思考”的基础上，进一步得到训练.

每章还配有测试卷一套. 可作为学生学完各章内容之后，检测自己掌握所学知识的程度之用.

此外，书末还附有各节练习题答案或提示，以及测试卷答案.

本书由喻德生教授任主编. 参与本书编写的老师有：第二章第二节李昆，第三节邹群；第三章第一节明万元，第二、三节黄香蕉；第四章第一节王卫东，第二节程筠；第五章第一、二节杨就意；第六章第三节胡结梅；第七章第一、二节魏贵珍；第八章第一节杨就意，第四节漆志鹏；第九章第一、二节李园庭；其余章节及测试题喻德生. 全书修改、统纂定稿喻德生.

由于水平有限，书中难免出现疏漏、甚至错误之处，敬请国内外同仁和读者批评指正.

编　者

2013 年 5 月

# 目 录

# 第一章　集合与函数

## 第一节　集合的概念与性质

### 一、教学目标

1. 理解集合的基本概念与性质，能根据实际问题的需要，用适当的方法表示集合.
2. 掌握集合并、交、补和余等运算以及这些运算的性质.

### 二、内容提要

- 集合
  - 基本概念
    - 集合⇔具有某种属性的事物的全体，通常用大写字母 $A, B, C\cdots$表示.
    - 全集定义：研究的事物的全体构成的集合，记为 $U$；空集 ⇔ 不含任何元素的集合，记为$\varnothing$.
    - 集合的元素 ⇔ 构成集合的事物或对象，通常用小写字母 $a, b, c\cdots$表示；$a\in A \Leftrightarrow a$是集合 $A$ 的元素.
    - 子集
      - 定义：$A\subset B$或$B\supset A \Leftrightarrow \forall a\in A \Rightarrow a\in B$.
      - 性质
        - 任何集合都是它自身的子集，即 $A\subset A$；
        - 空集是任何集合的子集，对任意集合 $A$，有$\varnothing\subset A$;
        - 传递性：$A\subset B, B\subset C \Rightarrow A\subset C$.
    - 集合 $A$ 与 $B$ 相等 $\Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$，记为 $A=B$.
    - 集合$A$和$B$的笛卡尔积集⇔对任意的 $x\in A, y\in B$，所有的二元数组$(x,y)$构成的集合，记为 $A\times B$.
  - 集合的运算
    - 并集
      - 定义：集合 $A$ 与 $B$ 的并集 ⇔ 集合 $A$ 与 $B$ 的公共元素构成的集合，记为 $A\cup B$.
      - 性质
        - $A\subset A\cup B,\ B\subset A\cup B$;
        - $A\cup\varnothing = A, A\cup U = U, A\cup A = A$.
    - 交集
      - 定义：集合 $A$ 与 $B$ 的交集 ⇔ 集合 $A$ 与 $B$ 的公共元素构成的集合，记为 $A\cap B$.
      - 性质
        - $A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$;
        - $A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap U = A, A\cap A = A$.
    - 集合 $A$ 与 $B$ 的差集⇔属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素构成的集合，记为 $A-B$.
    - 补集
      - 定义：集合 $A$ 的补集⇔全集 $U$ 中不属于 $A$ 的元素构成的集合，记为 $\bar{A}$.
      - 性质：$A\cup\bar{A}=U, A\cap\bar{A}=\varnothing$.

集合

集合运算律
- 交换律: $A\cup B=B\cup A;\ A\cap B=B\cap A$.
- 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
- 分配律: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);\ (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
- 摩根律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

## 三、疑点解析

**1. 关于集合的概念**　集合是数学中几个常用的原始概念之一，此概念只能描述，不能用已有的概念来准确地定义.

集合由元素构成，但在我们这里所指的集合中，对相同的元素而言，无所谓个数的多少，集合中相同的元素是不重复计算的.

例如，方程 $x-1=0,(x-1)^2=0,(x-1)^3=0,\cdots$ 的根分别为 $1;1,1;1,1,1;\cdots$，但根的集合都是单元素集 $\{1\}$.

因此，一些表面上看起来有无穷多个元素的集合，也可能只有有限多个元素. 例如，尽管 $n$ 可以取遍所有整数，但由于余弦函数是以 $2\pi$ 为周期的函数，集合 $A=\left\{x_n\mid x_n=\cos\dfrac{n\pi}{4},n\in\mathbf{Z}\right\}$ 不是无穷集，而是一个至多有 8 元素的集合. 事实上，对任意的整数 $k$，有：

$$x_{8k}=\cos 2k\pi=1;\qquad x_{8k+1}=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_{8k+2}=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0;\qquad x_{8k+3}=\cos\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_{8k+4}=\cos(2k\pi+\pi)=\cos\pi=-1;\qquad x_{8k+5}=\cos\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_{8k+6}=\cos\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0;\qquad x_{8k+7}=\cos\left(2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故 $A=\left\{0,\pm1,\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ 为 5 元素集合.

**2. 关于集合的表示**　集合的表示方法主要有：描述法、列举法和图示法三种. 这三种方法从不同侧面揭示了事物的本质属性，既具有广泛的应用性，又适合于不同的场合.

首先，集合是数学的语言和工具，很多数学结论都是用集合的语言和方法表示的. 例如，基本的离散数集通常用列举法表示，如自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$，整数集 $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，正数集 $\mathbf{Z}^+=\{1,2,\cdots\}$ 等；在此基础上，就可以用描述法表示较复杂的离散数集，如正有理数集 $\mathbf{Q}^+=\left\{\dfrac{q}{p}\mid p,q\in\mathbf{Z}^+,(p,q)=1\right\}$，函数 $y=\tan x$ 间断点的集合 $\left\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，等等.

数轴上的连续点集（区间）通常用描述法表示，如实数集 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 和 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；邻域是关于一点对称的区间，也是用描述法表示

的，即$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$.

当然，在数学应用中，为方便起见，我们较少直接使用具体方法表示的集合，而是使用这个集合的简单记号.

其次，可以用不同方法和形式表示同一集合. 一方面，同一集合可以用不同的方法表示. 例如，函数的定义域和值域通常用描述法表示，有时为了直观，一、二、三元函数还可以分别用直线、平面和空间的图形来表示. 另一方面，同一集合也可以用同一方法的不同形式来表示. 一般地，如果两个式子之间可以互化（即相互等价），那么这两个式子表示的集合就是同一个集合. 例如，解方程$x^4-7x^3+17x^2-17x+6=0$时，我们往往通过恒等变形将方程化简，直至求出方程的解集$A$，这是因为每步恒等变形得到的方程都是同解的. 即

$$\begin{aligned}A&=\{x\,|\,x^4-7x^3+17x^2-17x+6=0\}=\{x\,|\,(x^4-x^3)-6(x^3-x^2)+11(x^2-x)-6(x-1)=0\}\\&=\{x\,|\,x^3(x-1)-6x^2(x-1)+11x(x-1)-6(x-1)=0\}=\{x\,|\,(x-1)(x^3-6x^2+11x-6)=0\}\\&=\cdots=\{x\,|\,(x-1)^2(x^2-5x+6)=0\}=\{x\,|\,(x-1)^2(x-2)(x-3)=0\}=\{1,2,3\}.\end{aligned}$$

**3. 关于集合的运算与性质**　首先，集合的运算都是在一定的前提下定义的，这个前提就是全集$U$. 因此，集合的运算都应该在这个前提下进行，即当$A,B$是全集$U$的两个子集时，才能进行这两个集合的并、交、差和补的运算.

其次，集合的运算与数的四则运算不同，它实质上是一种逻辑二值运算，因此要紧扣集合和集合运算的定义，避免数的四则运算所带来的负迁移的影响. 由于对于某个集合来说，其全集的每个元素都是"属于"和"不属于"这个集合的问题，通俗地说就是"有"和"无"的问题，因此各种运算后的结果也是"有"和"无"，且"有"时不重复. 例如，$A,B$的并集是两个集合所有元素构成的集合，但两个集合都有的元素与一个集合中含有的元素的结果是一样的——"有"，而不必重复计入；$A,B$的交集是两个集合公共元素构成的集合，仅一个集合中含有的元素与两个集合都不含的元素的效果是一样的——"无"，都不必计入.

最后，集合的运算性质与数的四则运算有些是类似的，如集合的交换律与结合律；有些是不同的，如集合分配律与摩根律. 因此要注意两者的类比，避免混淆. 另外，在集合运算的证明中，要注意用文氏图来直观表示，以避免抽象运算带来的困难.

## 四、例题分析

**例 1**　证明集合的分配律：（i）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；（ii）$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

**分析**　根据集合相等的定义，只需证明等式两边的两个集合相互包含即可，为此必须紧扣集合交与并运算的概念.

**证明**（i）$\forall x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in C\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in C$ 或 $x\in B$ 且 $x\in C$

$\Rightarrow x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Rightarrow(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

反之，$\forall x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in C$ 或 $x\in B$ 且 $x\in C$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$.

所以，$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

（ii）类似地可以证明.

**思考**　写出以下四个集合的运算律：（i）$(A\cup B)\cap(C\cup D)$；（ii）$(A\cap B)\cup(C\cap D)$，并

给出证明.

**例 2**　证明：$A-B=A\cap\overline{B}$.

**分析**　根据余集、补集和交集的定义，利用集合的运算性质，将等式左边的式子化成等式右边的式子即可.

**证明** $A-B=A-A\cap B=A\cap\overline{(A\cap B)}=A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$

$$=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})=\varnothing\cup(A\cap\overline{B})=A\cap\overline{B}.$$

**思考**　（i）利用例 1 的方法证明该结论；（ii）用该结论证明 $A-(B\cup C)=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

**例 3**　集合等式 $A\cup(B-A)=B$ 是否成立？为什么？

**分析**　利用例 2 结论，对上式左边进行化简，看其是否等于上式右边.

**解**　因为

$$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=(A\cup B)\cap U=A\cup B,$$

所以集合等式 $A\cup(B-A)=B$ 不成立.

**思考**　（i）举反例说明集合等式 $A\cup(B-A)=B$ 不成立；（ii）在什么情况下，集合等式 $A\cup(B-A)=B$ 成立？

**例 4**　用集合的运算律证明：$\overline{A\cup\overline{(A\cap B)}\cup B}=\varnothing$.

**分析**　根据补集定义，将所证等式转化成与其等价的等式，并给出该式的证明即可.

**证明**　等式取补集可得 $A\cup\overline{(A\cap B)}\cup B=\overline{\varnothing}=U$，因此只需证明该式成立即可. 根据摩根律及结合律，有

$$A\cup\overline{(A\cap B)}\cup B=A\cup(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B=(A\cup\overline{A})\cup(\overline{B}\cup B)=U\cup U=U,$$

所以，$\overline{A\cup\overline{(A\cap B)}\cup B}=\varnothing$.

**思考**（i）两次利用摩根律，直接进行该式的证明；（ii）利用以上两种方法证明 $\overline{A\cup\overline{(B\cap C)}\cup C}=\varnothing$.

**例 5**　证明：$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

**分析**　根据笛卡尔积集、并集和集合相等的定义证明即可.

**解**　$\forall(x,y)\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A$ 且 $y\in B\cup C\Leftrightarrow x\in A$ 且 $y\in B$ 或 $x\in A$ 且 $y\in C$

$$\Leftrightarrow(x,y)\in A\times B \text{ 或 } (x,y)\in A\times C\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C),$$

所以 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

**思考**　判断 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ 是否正确；正确给出证明，错误举出反例.

**例 6**　下列四个集合中，与集合 $J=\{-1,0,1\}$ 不相等的集合是（　　）.

A. $J_1=\left\{x_n\mid x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$　　B. $J_2=\left\{x_n\mid x_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{n\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $J_3=\left\{x_n\mid x_n=\cos\dfrac{n\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$　　D. $J_4=\left\{x_n\mid x_n=2\cos\dfrac{n\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$

**分析**　尽管四个选项中的 $n$ 都可以取所有整数，但由于各选项中 $x_n$ 的周期性，故对不同的整数 $n$，$x_n$ 可以重复取某几个值，而对我们这里所指集合而言，相同的元素是不重复计算的，因此各选项也可能是与集合 $J=\{-1,0,1\}$ 相等的有限集，为此先求出各选项中的集合.

**解法 1**　选 D.

因为在 $J_4$ 中，当 $n=6k$ 时，$x_n=2\cos 2k\pi=2$；当 $n=6k+1$ 时，$x_n=2\cos\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$；当 $n=6k+2$ 时，$x_n=2\cos\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$；当 $n=6k+3$ 时，$x_n=2\cos(2k\pi+\pi)=2\cos\pi=-2$；当 $n=6k+4$ 时，$x_n=2\cos\left(2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)=2\cos\dfrac{4\pi}{3}=-1$；当 $n=6k+5$ 时，$x_n=2\cos\left(2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right)=2\cos\dfrac{5\pi}{3}=1$，所以 $J_4=\{1,2,-1,-2\}\neq J$，选择 D.

**思考 1**　不计算 $J_4$ 中的其余各值，而仅根据其中的 $x_{6k}=2\cos 2k\pi=2$，就可以作出选择 D 的决定？为什么？

**解法 2**　选 D.

因为在 $J_1$ 中，当 $n=4k$ 时，$x_n=\sin\dfrac{4k}{2}\pi=\sin 2k\pi=0$；当 $n=4k+1$ 时，$x_n=\sin\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；当 $n=4k+2$ 时，$x_n=\sin(2k\pi+\pi)=\sin\pi=0$；当 $n=4k+3$ 时，$x_n=\sin\left(2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$，所以 $J_1=J$.

类似地，可得 $J_2=J$，$J_3=J$. 故排除 A，B，C，选择 D.

**思考 2**　再给出分别与选项 A，B，C 形式相似，且与集合 $J$ 相等的集合的例子.

**注：** 解法 1 是一种直接证明或解答的方法，但和一般的证明题和解答题不同，必须事先初步猜测哪个选项最有可能正确，再试图给出证明或解答，否则无从下手；解法 2 是一种间接证明的方法，叫做排除法，因为对于四选一的题，其中只有一个选项是正确的，因此如果能判断其中三个是错的，那剩下的哪个就是正确的，推理和举反例是排除法的基本手段.

**例 7**　下列四个集合中，与其余三个集合不相等的集合是（　　）

A. $J_1=\{y\mid y=\cos 2x+C_1,C_1\in\mathbf{R}\}$　　B. $J_2=\left\{y\mid y=\dfrac{1}{2}\cos 2x+C_2,C_2\in\mathbf{R}\right\}$

C. $J_3=\{y\mid y=\cos^2 x+C_3,C_3\in\mathbf{R}\}$　　D. $J_4=\{y\mid y=C_4-\sin^2 x,C_4\in\mathbf{R}\}$

**分析**　该题不可能直接选择某个选项，而至少要计算出三个相同的集合，才能排除这几个选项，从而得出剩下的一个选项正确的结论.

**解**　选 A.

显然，对任意常数 $a$，有

$$J_2=\left\{y\mid y=\frac{1}{2}\cos 2x+C_2,C_2\in\mathbf{R}\right\}=\left\{y\mid y=\frac{1}{2}\cos 2x+a,a\in\mathbf{R}\right\},$$

故由

$$\cos^2 x+C_3=\frac{1+\cos 2x}{2}+C_3=\frac{\cos 2x}{2}+\left(C_3+\frac{1}{2}\right)$$

和

$$C_4-\sin^2 x=C_4-\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\cos 2x}{2}+\left(C_4-\frac{1}{2}\right),$$

分别取 $a=C_3+\dfrac{1}{2}$ 和 $a=C_4-\dfrac{1}{2}$，易知 $J_2=J_3=J_4$，故排除 B，C，D，选择 A.

**思考** （i）应对选项 C 和 D 如何改动，才能使选项 B 为正确答案？（ii）若选项 D 为 $J_4=\{y\,|\,y=\sin^2 x+C_4, C_4\in\mathbf{R}\}$，是否仍然有 $J_4=J_2$？为什么？

**注：** *在第五章不定积分中，经常会碰到同一函数的集合有多种不同表示的问题.*

**例 8** 用集合表示 $xOy$ 平面上三直线 $x+y=1,\ 2y-x=1,\ x-1=0$ 所围成的闭区域.

**分析** 每条直线都将 $xOy$ 平面均分成两部分，其中只有一部分包含三直线所围成的闭区域. 将这样的三部分表示成三个集合，则三直线所围成的闭区域就是这三个集合的交集. 此外，由于坐标面上点是由有序数对构成，因此可以确定集合 $D$ 中两坐标的范围，也可以用两坐标 $x,y$ 的两不等式来表示.

**解法 1** 如图 1.1 所示，设三直线所围成的闭区域为 $D$. 显然，$D$ 位于直线 $x+y=1$ 的上侧，位于直线 $2y-x=1$ 的下侧，直线 $x-1=0$ 的左侧，故令

$$A=\{(x,y)\,|\,x+y\geqslant 1\},$$
$$B=\{(x,y)\,|\,2y-x\leqslant 1\},$$
$$C=\{(x,y)\,|\,x\leqslant 1\}$$

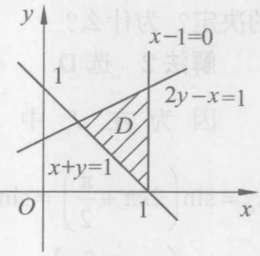

图 1.1

则 $D=A\cap B\cap C$.

**思考 1** 若三直线为 $x+y=1, x-y=0, x-1=0$ 或 $x+y=1,\ 2y-x=1, x+2y=1$，结果如何？为 $x+y=1,\ x-y=0,\ x+2y=1$ 呢？

**解法 2** 通过解联立方程组，求得直线 $x+y=1, 2y-x=1$ 交点的坐标为 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，于是区域 $D$ 的横坐标的范围为 $\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$. 而对任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{3},1\right]$，相应的纵坐标 $y$ 位于直线 $x+y=1$ 的上方，即 $y\geqslant 1-x$，且位于直线 $2y-x=1$ 的下方，即 $y\leqslant\dfrac{x+1}{2}$，故相应的纵坐标的范围为 $1-x\leqslant y\leqslant\dfrac{x+1}{2}$，故 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1, 1-x\leqslant y\leqslant\dfrac{x+1}{2}\right\}$.

**思考 2** 用解法 2 的表示方法，求解思考 1 中的各题.

**注：** *在第八章的二重积分中，经常要将一个平面区域表示成解法 2 中的形式.*

**例 9** 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，且 $A\cap B=\{b,c\}$，求 $(A\times B)-(B\times A)$.

**分析** 这是笛卡尔积集与差集的混合运算，先求出两个笛卡尔积集，再求它们的差集.

**解** 根据笛卡尔积集和差集的定义，可得

$$A\times B=\{(a,b),(a,c),(a,d);(b,b),(b,c),(b,d);(c,b),(c,c),(c,d)\},$$
$$B\times A=\{(b,a),(b,b),(b,c);(c,a),(c,b),(c,c);(d,a),(d,b),(d,c)\},$$

则
$$(A\times B)-(B\times A)=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(c,d)\}.$$

**思考** （i）若没有 $A\cap B=\{b,c\}$ 的限制，以上解答过程是否正确？为什么？若否，如何完善？（ii）若另设 $C=\{c,d,a\}$，求 $(A\times B)-(B\times C)$ 和 $(A\times C)-(B\times C)$.

## 五、练习题 1.1

1. 证明：$A-(B\cap C)=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C})$.

2. 判断命题“若$A\cup B=A\cup C$，则$B=C$”是否正确？若是，给出证明；若否，举出反例.

# 第二节 函数的概念与性质

## 一、教学目标

1. 理解函数的概念与性质，了解函数与关系之间的区别与联系；会求函数的定义域、值域以及一些实际问题的函数表达式；会求解一些有关函数单调性、有界性、奇偶性和周期性的问题.

2. 了解复合函数的概念，会求函数的复合函数或将一个函数分解成一些函数的复合.

3. 了解反函数的概念，了解反函数与直接函数之间的关系；会求函数的反函数.

4. 了解初等函数的概念与性质，会进行函数的运算.

## 二、内容提要

函数

- 基本概念
  - 函数 $y=f(x)\Leftrightarrow\forall x\in D\xrightarrow{f}y\in\mathbf{R}$, $D_f=D$ 为函数 $f$ 的定义域，$R_f=f(D)$ 为函数 $f$ 的值域.
  - 复合函数 $y=f[\varphi(x)]\Leftrightarrow y=f(u)$，定义域 $D_1$, $u=\varphi(x)$ 在 $D$ 上有定义($D\subset u=\varphi(x)$ 的定义域 $D_2$)且值域 $\varphi(D)\subset D_1$ ($u$ 为中间变量, $D$ 为 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域).
  - 反函数 $x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow\forall y\in f(D)\xrightarrow{y=f(x)}x\in D$ (反函数习惯记为 $y=f^{-1}(x)$).
  - 分段函数$\Leftrightarrow$在定义域内，对应不同的区间，有不同的表达式.
  - 初等函数$\Leftrightarrow$由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.
- 基本性质
  - 有界性: $y=f(x)$，定义域$D$, 如$\exists M>0, \forall x\in X\subset D$, 恒有$|f(x)|\leqslant M\Leftrightarrow f(x)$在$X$上有界; 否则, $f(x)$在$X$上无界. 即对任何$M>0, \exists x_1\in X\subset D$, 使$|f(x_1)|>M\Leftrightarrow y=f(x)$在$X$上无界.
  - 单调性：$y=f(x)$，定义域 $D$, 如 $\forall x_1,x_2\in I\subset D$, 且 $x_1<x_2$, 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$) $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $I$ 上单调增加(或单调减少).
  - 奇偶性：$y=f(x)$，定义域 $D$ 关于原点对称，如 $\forall -x\in D$, 恒有 $f(-x)=f(x)$ (或 $f(-x)=-f(x)$) $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数(或奇函数).
  - 周期性: $y=f(x)$, 定义域$D$, 如$\exists l>0$, $\forall x\in D$, 有$(x\pm l)\in D$, 且$f(x+l)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$为周期函数，$l$为$f(x)$的周期(通常取最小正周期).
- 基本初等函数
  - 定义：基本初等函数$\Leftrightarrow$幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的统称.
  - 性质、图像详见教材.

## 三、疑点解析

**1. 关于关系与函数关系之间的区别与联系** 关系是定义在两个非空集 $X,Y$ 上的，使得对 $X$ 中的每个元素 $x$，按照对应法则 $f$，在 $Y$ 中有至少一个元素 $y$ 与之对应；而函数（亦即函数关系）$y=f(x)$ 是数集 $D_f\subset\mathbf{R}$ 到数集 $\mathbf{R}$ 的关系，且对 $D_f$ 中的每个元素 $x$，按照对应法则 $f$，仅对应于 $R$ 中唯一的一个元素 $y$. 可见，关系与函数关系的区别一是所定义集合的范围，二是集合间对应的法则. 函数的定义域和值域都是非空数集，而一般关系中的集合都不必是数集；函数是一种特殊的关系，但关系未必就是函数.

函数 $y=f(x)$ 也可以理解为一个变量 $y$ 对另一个变量 $x$ 的依赖关系，使得对每个 $x\in D_f$，通过对应法则 $f$，有唯一的 $y\in R_f$ 与之对应. 可见，函数是由定义域 $D_f$、对应法则 $f$ 和值域 $R_f$ 三部分构成. 但是，函数的定义域 $D_f$、对应法则 $f$ 和值域 $R_f$ 三部分并不是完全独立的，因为一旦确定了函数的定义域 $D_f$ 和对应法则 $f$，函数的值域 $R_f$ 也就随之确定了.

如果把函数的对应法则 $f$ 理解成一个计算函数值的程序，那么，每输入一个 $x$，通过这个程序，就可以输出一个函数值 $y$（见图 1.2）.


图 1.2

**2. 关于确定函数的两个要素** 定义域 $D_f$ 与对应法则 $f$ 是构成函数 $y=f(x)$ 的两个要素. 两个形式上不同的函数，如果它们的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的函数；否则，只要两个函数的定义域或对应法则中有一个不同，它们就是不同的函数.

一般地，如果通过恒等变形可以将一个函数化成另一个函数，那么这两个函数就是相同的；反之，如果不是通过恒等变形，即使能把一个函数化成了另一个函数，这两个函数也是不同的.

例如，函数 $f(x)=2\ln|x|$ 与 $g(x)=\ln x^2$ 是相同的. 因为它们的定义域相同，都是 $\mathbf{R}\setminus\{0\}$；再由对数的性质有，$g(x)=\ln|x||x|=\ln|x|+\ln|x|=2\ln|x|$，因此它们的对应法则也相同.

而函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 与 $g(x)=x$ 是不同的. 因为尽管它们的定义域相同，都是 $\mathbf{R}$，但它们的对应法则不同. 因为 $\arcsin x$ 表示反正弦函数的主值，即 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，因此 $\arcsin(\sin x)$ 应在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，而不是在 $\mathbf{R}$ 上取值.

事实上，当 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，因为 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x-2k\pi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\sin(x-2k\pi)=\sin x$，所以

$$f(x)=\arcsin[\sin(x-2k\pi)]=x-2k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}\text{；}$$

当 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ 时，因为 $-\dfrac{\pi}{2}<x-(2k+1)\pi<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin[x-(2k+1)\pi]=-\sin x$，所以

$$f(x)=\arcsin\{\sin[(2k+1)\pi-x]\}=(2k+1)\pi-x,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

综上所述，有

$$f(x)=\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x-2k\pi, & 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ (2k+1)\pi-x, & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}\quad (k\in\mathbf{Z}).$$

显然，当 $k=0$ 时，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\arcsin(\sin x)=x$，此时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 才是同一函数.

函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sin(\arcsin x)$ 也是不同的．因为尽管它们的对应法则相同，即对任意 $x$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都与 $x$ 对应，但它们的定义域不同．$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，而 $g(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

3. **关于函数的复合**　函数的复合就是要把两个或两个以上的函数复合成一个函数，但不是任意两个或两个以上的函数都能复合成一个函数．根据函数的定义，其定义域是非空的．因此，要使两个函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 能够复合成一个函数，首先必须保证复合后所得到的式子 $f[g(x)]$ 中 $x$ 有取值的可能．如果 $x$ 没有取值的可能，尽管“形式上”可以得到这么一个式子，但这个式子是没有意义的．也就是说，它不是函数，否则就有定义域是空集的函数，这与函数的定义不符.

那么怎样才能保证复合后所得到的式子 $f[g(x)]$ 中 $x$ 有取值的可能呢？假若 $x=x_0$ 是使得这个式子有意义的一个取值，首先 $x_0$ 必须在 $g(x)$ 的定义域 $D$ 之内，即 $x_0\in D$，否则 $g(x_0)$ 没有意义；其次，函数 $g(x)$ 在 $x_0$ 处的值 $u_0=g(x_0)$ 还必须落在函数 $f(x)$ 的定义域之内，即 $g(x_0)\in D_f$，否则 $f(u_0)$ 没有意义．又显然，$g(x_0)$ 在 $g(x)$ 值域之内，即 $g(x_0)\in R_g$，因此 $D_f\bigcap R_g\neq\varnothing$.

一般地，要使两个函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 能够复合成一个函数 $y=f[g(x)]$，必须存在 $x_0\in D_g$，使 $u_0=g(x_0)\in D_f$．也就是说，函数 $f(u)$ 的定义域与函数 $g(x)$ 的值域的交集是非空的，即 $D_f\bigcap R_g\neq\varnothing$；否则，这两个函数是不能复合的．如果把复合函数中的两个对应法则 $f,g$ 理解成两个相互关联的计算程序，那么，每输入一个 $x$，通过程序 $g$，就可以输出（输入）一个函数值 $u$，再通过程序 $f$，就可以输出一个函数值 $y$（见图 1.3）.

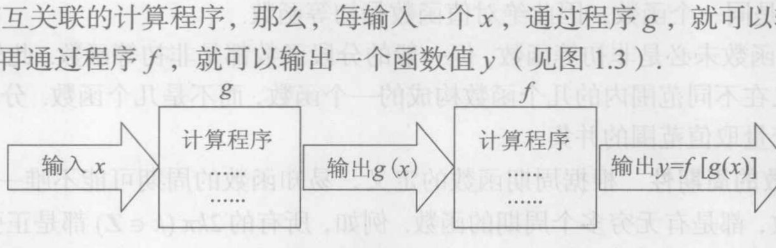


图 1.3

例如，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x-1$ 可以复合为一个函数 $y=\sqrt{x-1}$，因为函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为

$$D_y\bigcap R_u=[0,+\infty)\bigcap\mathbf{R}=[0,+\infty)\neq\varnothing.$$

而函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=1+\mathrm{e}^x$ 是不能构成复合函数的，因为它们通过复合所得到的式子 $\arcsin(1+\mathrm{e}^x)$ 没有意义，也就是

$$D_y\bigcap R_u=[-1,1]\bigcap(1,+\infty)=\varnothing.$$

**4. 关于复合函数的分解**　与函数复合相反，复合函数的分解是将一个函数分解成两个或两个以上函数. 显然，可能有多种方式将一个函数分解成几个不同的函数.

例如，函数 $y=\log_a(1+\sqrt{1+\sin^2 x})$ 可以看成是由函数

$$y=\log_a u,\quad u=1+\sqrt{v},\quad v=1+\sin^2 x$$

复合而成的，也可以看成是由函数

$$y=\log_a u,\quad u=1+\sqrt{v},\quad v=1+w^2,\quad w=\sin x$$

复合而成的. 这两种分解都是正确的.

但是，我们毕竟要问，上述两种分解哪一种更可取呢？这需要根据实际应用来判定. 在高等数学，比如说在求函数微分和积分的过程中，往往需要将一个函数看做是由一些基本初等函数或一些简单的初等函数复合而成的，因此这里通常讨论该意义下函数复合的分解. 据此判断，上例中函数 $y=\log_a(1+\sqrt{1+\sin^2 x})$ 的第二种分解是符合要求的，而第一种分解则不符合这个要求.

**5. 关于初等函数**　初等函数是常数和基本初等函数，经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤而成，并能用一个式子表示的函数. 可见，经过无限次的四则运算或无限次的复合步骤而成的函数和不能用一个式子表示的函数都是非初等函数.

例如，函数 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是非初等函数，因为它是由无限项（无限个函数）的和构成的；取整函数 $y=[x]$ 也是非初等函数，因为它不能用一个式子表示出来. 但高等数学课程中讨论的函数绝大多数都是初等函数.

**6. 关于分段函数**　分段函数是在自变量不同的变化范围内，对应法则用不同的式子表示的函数. 这种函数似乎满足非初等函数“不能用一个式子表示出来”的要求，但是不是分段函数都是非初等函数呢？答案是否定的.

例如，绝对值函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是分段函数，但这个函数与用一个式子表示出来的函数 $y=\sqrt{x^2}$ 实际上是同一个函数，因此绝对值函数是初等函数.

因此，分段函数未必是非初等函数，但一般的分段函数都是非初等函数. 此外，还应注意，分段函数是定义在不同范围内的几个函数构成的一个函数，而不是几个函数. 分段函数的定义域是各段上自变量取值范围的并集.

**7. 关于函数的周期性**　根据周期函数的定义，易知函数的周期可能不唯一. 甚至，一些常见的周期函数，都是有无穷多个周期的函数. 例如，所有的 $2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 都是正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的周期. 有时，周期函数周期的多值性会产生歧义，给使用带来不便. 因此，为使周期函数的周期具有唯一性，通常情况下约定“周期”是指函数的最小正周期. 例如，正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的周期通常指 $2\pi$，而不是所有的 $2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$. 这样所指的周期就具有唯一性，从而没有歧义. 但应注意，在周期函数没有最小正周期的情况下，会出现函数有无穷多个周期，但却没有“周期”的现象.

例如，可以证明任意有理数 $r$ 都是狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

的周期.

事实上，设$r$是任意有理数，则当$x$是有理数时，$x+r$是有理数，于是$D(x+r)=1=D(x)$；当$x$是无理数时，$x+r$是无理数，于是$D(x+r)=0=D(x)$．故对任意的实数$x$，恒有$D(x+r)=D(x)$，因此任意有理数$r$都是利克雷函数的周期.

由于没有最小的正有理数，因此获利克雷函数有无穷多个周期，但没有最小正周期.

## 四、例题分析

**例 1**　设函数$f(x)$的定义域为$D=[0,1]$.（i）求函数$f(\sin x)$的定义域；（ii）讨论$a$为何值时，两函数$f(x+a)$和$f(x-a)$可以进行加减运算，并求函数$f(x+a)\pm f(x-a)$的定义域.

**分析**　这是已知简单函数的定义域，要求复合函数定义域的问题. 因此，被复合的中间变量必须落在简单函数的定义域之内.

**解**　（i）因为函数$f(x)$的定义域为$D=[0,1]$，故由$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，解得

$$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

因此$f(\sin x)$的定义域$D=\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

（ii）由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，解得

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}.$$

于是当$a\leqslant 1-a$，即$a\leqslant\frac{1}{2}$时，不等式组的解为

$$a\leqslant x\leqslant 1-a;$$

当$1-a<a$，即$a>\frac{1}{2}$时，不等式组$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$无解.

故当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，两函数$f(x+a)$和$f(x-a)$可以进行加减运算，且函数$f(x+a)\pm f(x-a)$的定义域为

$$D=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 1-a\};$$

当$a>\frac{1}{2}$时，两函数$f(x+a)$和$f(x-a)$不能进行加减运算，此时$f(x+a)\pm f(x-a)$无意义.

**思考**（i）求函数$f(2\sin x)$的定义域；（ii）讨论$a$为何值时，两函数$f(x+a)$和$f(a-x)$可以进行加减运算，并求函数$f(x+a)\pm f(a-x)$的定义域.

**例 2**　下列各对函数中是相同函数的是（　　）.

A. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与$g(x)=x+1$　　B. $f(x)=\ln x^2$与$g(x)=2\ln x$

C. $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$与$g(x)=x\sqrt{x-1}$　　D. $f(x)=\sqrt[3]{x^3(1-x)}$与$g(x)=x\sqrt[3]{1-x}$