PUTONGGAODENGJIAOYU GAOJIYINGYONGXING RENCAI PEIYANGGUIHUAJIAOCAI

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

概率论与数理统计

（第2版）

主 编 林伟初

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育高级应用型人才培养规

概率论与数理统计

（第2版）

主　编　林伟初

副主编　高　卓　凌卫平　蒋银山

参　编　李　琳　张　辉　杨　霞　肖传强

同济大学出版社

内 容 提 要

本书共分 9 章，第 1 章至第 4 章是概率论部分，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量及其分布. 第 5 章至第 8 章是数理统计部分，内容包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析. 每章最后一节专门有应用实例. 第 9 章作为讲解相关软件及其应用，介绍数学实验与数学模型. 书后附有常用分布表和习题参考答案.

本书的主要特点是：保证知识的科学性、系统性、严密性，坚持直观理解与严密性的结合，深入浅出，以实例为主线，贯穿于概念的引入、例题的配置与习题的选择上，淡化纯数学的抽象，注重实际，特别根据独立学院学生思想活跃的特点，举例富有时代性和吸引力，突出实用，通俗易懂，注重培养学生解决实际问题的技能，针对不同院校课程设置的情况，可根据教材内容取舍，便于教师使用.

本书可作为本科院校信息、电子、工程技术、经济、管理等非数学专业的“概率论”或“概率论与数理统计”课程的教材使用，也可作为部分专科院校的同类课程教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 林伟初主编. -- 2 版. -- 上海：同济大学出版社，2014. 1

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

ISBN 978-7-5608-5395-6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 311049 号

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

概率论与数理统计(第 2 版)

主　编 林伟初

副主编 高　卓　凌卫平　蒋银山

责任编辑 陈佳蔚　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787 mm×960 mm　1/16

印　　张　14.75

字　　数　295 000

印　　数　1—3 100

版　　次　2014 年 1 月第 2 版　2014 年 1 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-5395-6

定　　价　30.00 元

前　言

第1版教材经过数年来的使用，广大教师和学生反映良好，根据使用者提出的意见和建议，我们对第1版教材进行了修订．主要修订原则和新版变化如下：

(1) 为突出应用型和实用性，进一步提高读者的学习兴趣，每章开头提到应用的实例，引起读者兴趣，每章后面专门增加了一节内容，介绍应用实例，前后呼应．

(2) 对部分陈旧内容做了更新以适应新时期的要求；表述更为准确，以帮助读者更好掌握知识点．

(3) 注意知识的系统性和完整性，完善了个别内容．

(4) 先简后繁，由浅入深，逐步启发学生思考．

(5) 理顺解题过程，使之条理更为清楚；化繁为简，简单明了．

(6) 深入浅出，为巩固知识点要求，对部分例题进行处理，增加了应用性、趣味性的题目．

(7) 保证基本理论、基本知识，降低了部分题目的难度，对部分难题，更换成新的题目．为减轻读者负担，去除了部分较难的题目．

(8) 对每章的习题B级题做了重新精选，多数采用近几年研究生入学考试题，以让学有余力的学生提升到更高的水平．

本书由林伟初主编，高卓、凌卫平、蒋银山副主编，参加编写的人员还有：李琳、张辉、杨霞、肖传强．第2版的修订工作由主编华南农业大学珠江学院林伟初教授和数学教研室主任高卓老师负责．在修订过程中，广大教师和学生提出了很多宝贵的意见和建议，使第2版修订工作得以顺利完成，在此表示感谢！

编　者

2014年1月

第1版前言

本书的编写是为了突出独立学院以着重培养应用型人才的目标，针对目前独立学院所用教材大多直接选自普通高校教材，难以充分体现独立学院的人才培养特点，无法直接有效地满足独立学院本身的实际教学需要.根据当前独立学院的学生和所开设的“概率论与数理统计”课程实际情况，为了适应国家的教育教学改革需要，符合独立学院本科层次的教学要求，更好地培养高等工程技术、经济管理等应用型人才，提高学生的应用能力与综合素质，为专业服务和以应用为目的，以保证理论基础、注重应用、彰显特色为基本原则，参照国家有关教育部门关于“概率论与数理统计课程基本要求”所规定的内容的广度和深度，在我们多年从事高等教育特别是民办本科教育教学实践的基础上，编写本教材.

本教材具有如下特点：

(1) 保证知识的科学性、系统性和严密性，坚持直观理解与严密性的结合，深入浅出.

(2) 以实例为主线，贯穿于概念的引入、例题的配置与习题的选择上，淡化纯数学的抽象，注重实际内容以及解决各种具体问题，举例富有时代性和吸引力，突出实用，通俗易懂.

(3) 注意趣味性，在多数章节中，从开头提出生动活泼、耐人寻味的实际例子作为引子，通过内容的学习，让学生感到茅塞顿开，饶有兴趣，使学生在学习知识的同时切实感到所学知识的作用，获得利用概率统计的知识解决各种实际问题的技能.

(4) 注意知识的拓广，介绍了概率统计相关的数学实验和数学模型，引进常用的数学软件，使学生感受用现代计算机技术求解概率统计问题并不费时费力，还可以对复杂的抽象的知识直观化，增强其“做数学”的意识和能力.通过了解相关概率统计的数学模型，培养学生对概率统计的进一步认识，促进学生参与数学建模等活动.

(5) 为学生深造打好基础，在习题的选取上，分为A、B两级，A级以基本、够用为度，B级与考研的要求接轨.

(6) 考虑到学生在中学已学习了部分概率的知识，因此，第1章尽量简化，不在基本问题上浪费学时.将一些内容进行整合，如理论性太强的大数定律与中心极限定理不作为专门一章，只是作为一节介绍；为了尽快让学生掌握数字特征的内容，在一维随机变量之后就开始学习数学期望与方差；数理统计主要突出参

数估计和假设检验的基本方法，不求全不求深.

在学时分配上，本教材的讲授以36～72学时为参考. 如72学时，可全部讲完本教材内容，可要求学生完成全部A、B两级习题；如54学时，则可将最后一章作为参考资料，部分理论性较强的内容，如定理证明等可跳过；如36学时，则可将最后两章作为参考资料，以掌握基本内容为教学要求.

本书由林伟初主编，凌卫平、蒋银山、李琳副主编，参加编写的人员还有：张辉、杨霞、高卓、肖传强. 林伟初主要负责全书的编写策划、第6章和第7章的编写以及全书的统稿，第1章由凌卫平编写，第2章由杨霞编写，第3章由肖传强编写，第4章由张辉编写，第5章和第9章由高卓编写，第8章由李琳编写.

在本书的编写过程中，始终得到华南农业大学珠江学院副院长曾家驹教授、广东技术师范学院天河学院副院长胡永谟教授、广东商学院华商学院副院长丘兆福教授，以及北京理工大学珠海学院、广东白云学院、广州大学松田学院、广东外语外贸大学南国商学院等院校领导和老师的支持和帮助. 谨此向他们表示衷心的感谢！

由于作者水平与学识有限，加之编写时间紧迫，虽经多次校雠，书中疏漏与错误之处难免，真心希望广大教师和学生不吝赐正并多提宝贵建议.

编　者

2008年5月

目　　录

1 随机事件及其概率

你可能玩过纸牌，也可能买过彩票，这些实际问题都和概率有关. 再来说个实际问题：如果你和小伙伴每人拿出等额的奖品，玩一个 5 局 3 胜的游戏，并约定胜者通吃. 假如你的小伙伴先胜 1 局之后，你连赢 2 局，这时因故需要中断游戏，对方提出你得到全部奖品的三分之二，他得到三分之一，你能答应吗？这个问题涉及本章的古典概率和条件概率、全概率公式等知识，它就是著名的赌徒困惑问题，甚至导致了概率论的产生！这个问题将在本章最后一节详细介绍.

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类是在一定条件下必然出现的现象，如太阳从东方升起；树上苹果成熟后，在地心引力作用下一定下落；在标准大气压下，水被加热到 100℃时一定沸腾等. 这类现象称为**确定性现象**. 另一类则是在一定条件下事先无法准确预知其结果的现象，如掷一枚硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上；从一批产品中任取 1 件产品，可能是次品，也可能不是次品；某网站在某时段的点击量等. 这类现象称为**非确定性现象**，或称为**随机现象**. 随机现象都带有不确定性，同时有其规律性的一面，在相同条件下，对随机现象进行大量观测，其可能结果就会出现某种规律性. 概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门科学. 本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

1.1 随 机 事 件

1.1.1 随机试验与随机事件

一般而言，试验是指为了察看某事的结果或某物的性能而从事某种活动. 在概率论与数理统计中，一个试验如果具有以下三个特点：

（1）可重复性：在相同条件下可以重复进行；

（2）可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

（3）不确定性：一次试验之前，不能预知会出现哪一个结果，就称这样的试验是一个**随机试验**，简称为**试验**.

每次试验的每一个结果称为**基本事件**，也称作**样本点**，记作 $\omega_1, \omega_2, \cdots$. 全部样本点的集合称为**样本空间**，记作 Ω，则 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$.

例 1-1 投掷一颗均匀骰子,观察出现的点数. 这是一个随机试验. 样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 1-2 观察某地的气温,这是一个随机试验. 样本空间 $\Omega = [a, b]$,其中 a, b 分别表示该地的最高气温和最低气温.

基本事件是不可再分解的、最基本的事件,其他事件均可由它们复合而成,由基本事件复合而成的事件称为**随机事件**或简称**事件**. 常用大写字母 A, B, C 等表示事件. 在试验中,如果出现 A 中所包含的某一个基本事件 ω, 则称 A 发生,记作 $\omega \in A$. 如例 1-1 中, $A = \{$出现的点数为偶数$\} = \{2, 4, 6\}$.

样本空间 Ω 包含了全体基本事件,而随机事件是由具有某些特征的基本事件所组成,所以从集合论的观点来看,一个随机事件是样本空间 Ω 的一个子集.

必然事件是指必然要发生的事件,**不可能事件**是指不可能发生的事件. 因为 Ω 是由所有基本事件所组成,因而在任一次试验中,必然要出现 Ω 中的某一个基本事件 ω, 即 $\omega \in \Omega$, 这就意味着在试验中,Ω 必然会发生,所以 Ω 是必然事件. 相应地,空集 $\varnothing$ 可以看作是 Ω 的子集,在任意一次试验中,不可能有 $\omega \in \varnothing$, 也就是说 $\varnothing$ 永远不可能发生,所以 $\varnothing$ 是不可能事件. 必然事件与不可能事件本质上不具有"不确定性",但是为了讨论问题方便,将其看作是特殊的随机事件.

1.1.2 事件的关系与运算

既然事件是样本空间的一个子集,所以事件之间的关系与运算可参照集合之间的关系和运算来处理.

1. 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 B 包含 A**,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如 $A = \{$出现点数为 6$\}$这一事件发生就导致事件 $B = \{$出现点数为偶数$\}$的发生. 因为出现点数为 6 意味着偶数点出现了,所以后者包含了前者.

"A 发生必然导致 B 发生"意味着"属于 A 的 ω 必然属于 B",即 A 中的样本点全在 B 中,如图 1-1 所示.

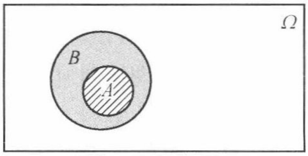

图 1-1

因为不可能事件 $\varnothing$ 不含有任何 ω, 所以对任一事件 A, 都有 $\varnothing \subset A$.

2. 事件的相等

若事件 A 所包含的基本事件与事件 B 所包含的基本事件完全相同,即 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$. 比如在例 1-1 中,事件 $A = \{$出现点数为 2, 4, 6$\}$这一事件与事件 $B = \{$出现点数为偶数$\}$是相等事件.

3. 事件的和(并)

事件 A 与 B 中至少有一个事件发生,即事件 A 发生或事件 B 发生,这个事件称为**事件 A 与 B 的和**(或**并**)事件,记作 $A+B$ 或 $A\cup B$,如图 1-2 所示.

类似地,n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示"A_1, A_2, …, A_n 中至少有一个发生";可列个事件 A_1, A_2, …, A_n… 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 表示"A_1, A_2, …, A_n, … 中至少有一个发生".

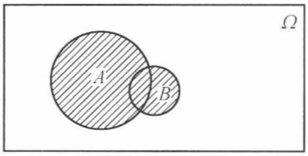

图 1-2

4. 事件的积(交)

事件 A 与 B 同时发生,即事件 A 发生且事件 B 发生,这个事件称为**事件 A 与 B 的积**(或**交**)事件,记作 AB (或 $A\cap B$).

积事件 AB 是由事件 A 与 B 所包含的所有公共基本事件构成的集合,如图 1-3 所示.

类似地,n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示"n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 同时发生";可列个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"A_1, A_2, …, A_n, … 同时发生".

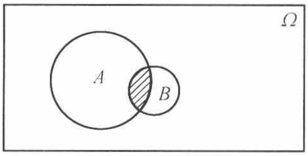

图 1-3

5. 互斥事件

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生,则称**事件 A 与 B 互斥**,或称事件 A 与事件 B **互不相容**. 显然,若事件 A 与 B 互斥,意味着 A 中基本事件都不属于事件 B, 反之亦然,如图 1-4 所示. 例如,基本事件是两两互斥的.

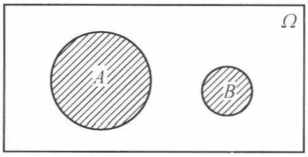

图 1-4

6. 对立事件

若事件 A 与 B 中至少有一个事件要发生,而且 A 与 B 不能同时发生,则称事件 B 为事件 A 的**对立事件**或**逆事件**,记作 $\overline{A}$.

对立事件 $\overline{A}$ 是由必然事件 Ω 所包含的全体基本事件中去掉事件 A 所包含的基本事件后所有剩余基本事件构成的集合,如图 1-5 中的阴影部分.

在例 1-1 的抛骰子试验中,事件 $A=\{$出现的点数为偶数$\}$的对立事件为 $\overline{A}=\{$出现的点数为奇数$\}$;但事件 $A=\{$出现的点数为偶数$\}$与事件 $B=$

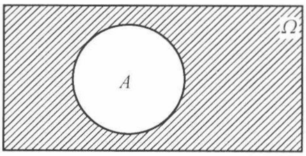

图 1-5

{出现的点数为 1}互斥而不互逆.

注 事件的互斥与对立不能等同. 互斥事件有可能都不发生，但对立事件中一定有一个事件发生. 所以对立事件一定互斥，但互斥事件不一定是对立事件.

显然有

$$A\overline{A} = \varnothing \quad 且 \quad A \cup \overline{A} = \Omega.$$

7. 事件的差

若事件 A 发生而事件 B 不发生，这个事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记作 $A-B$.

差事件 $A-B$ 是由事件 A 所包含的基本事件中去掉积事件 AB 所包含的基本事件后所有剩余基本事件构成的集合，如图 1-6 所示.

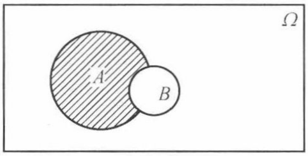

图 1-6

注 由于事件 B 不发生为事件 B 的对立事件 $\overline{B}$，因此，事件 A 发生且事件 B 不发生可表示为积事件 $A\overline{B}$，于是有关系式

$$A - B = A\overline{B}.$$

与集合运算一样，事件的运算也有如下的运算：

(1) **交换律** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(2) **结合律** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) **分配律** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) **对偶律** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

上述运算律还可以推广到任意有限个或可列个事件的情形.

例 1-3 某人连续 3 次购买体育彩票，每次 1 张，令 A, B, C 分别表示其第 1, 2, 3 次所买的彩票中奖的事件. 试用 A, B, C 及其运算表示下列事件：(1)第 3 次未中奖；(2)只有第 3 次中了奖；(3)恰有 1 次中奖；(4)至少有 1 次中奖；(5)不止 1 次中奖；(6)至多中奖 2 次.

解 (1) $\overline{C}$; (2) $\overline{A}\,\overline{B}C$; (3) "恰有 1 次中奖"即为"3 次中有 1 次中奖而另 2 次未中奖": $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$; (4) $A \cup B \cup C$; (5)"不止 1 次中奖"即为"至少有 2 次中奖": $AB \cup AC \cup BC$; (6)"至多中奖 2 次"即为"不可能中奖 3 次": $\overline{ABC}$，或为"至少有 1 次不中奖": $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

8. 完备事件组

若事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 满足

(1) 两两互斥：$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n，

(2) 至少出现 1 个事件：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

则称 A_1，A_2，…，A_n 构成 1 个**完备事件组**，如图 1-7 所示.

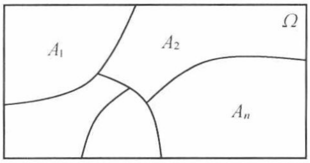

图 1-7

显然，事件 A，$\overline{A}$ 构成最简单的完备事件组.

1.2 随机事件的概率

随机事件在 1 次试验中是否发生虽然不能确定，但让人感兴趣的是随机事件在 1 次试验中发生的可能性有多大？概率就是用来描述随机事件发生的可能性大小的. 本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 概率的统计定义

由于随机现象的结果事先不能预知，初看似乎毫无规律. 然而，人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**.

历史上，研究随机现象统计规律最著名的试验是抛掷硬币的试验. 表 1-1 是历史上抛掷硬币试验的记录.

表 1-1　　抛掷硬币试验的记录

试验者	投掷次数 n	出现正面次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
德・摩根(De Morgan)	4 092	2 048	0.500 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
威廉・费勒(William Feller)	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-1 中容易看出，当投掷次数 n 很大时，出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，并且随着投掷次数的增加，这种摆动的幅度是很微小的. 说明出现正面的频率具有稳定性，确定的常数 0.5 就是出现正面频率的稳定值，用它描述出现正面这个事件发生的可能性大小，揭示出现正面这个事件发生的规律.

这个试验说明，虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性，但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果是有规律可循

的，这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

事实上，对一般情形下的事件的频率稳定性已不断地为人类的实践所证实，并且在理论上可以证明，在一定条件下，频率稳定在某常数附近对任意的随机事件都成立. 这样对每一个事件都客观地存在一个数与事件对应，这个数就称为概率，它表征事件在一次试验中发生的可能性大小.

定义 1 在多次重复试验中. 若事件 A 发生的频率稳定在确定常数 p 附近摆动，且随着试验次数的增加，这种摆动的幅度是很微小的，则称确定常数 p 为事件 A 发生的**概率**，记作 $P(A) = p$.

上述定义称为随机事件概率的统计定义. 它有相当直观的试验背景，易于接受. 根据这一定义，在实际应用时，往往可用试验次数足够大时的频率来估计概率的大小，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高.

1.2.2 概率的公理化定义

概率的统计定义具有应用价值，但在理论上有严重的缺陷，人们在不断地寻找更好的定义概率的方式. 直到 1933 年，苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在总结前人的大量研究成果的基础上，建立了概率的公理化法则，并由此导出概率的一般定义.

定义 2 设随机试验的样本空间为 Ω，若对每一事件 A，有且只有一个实数 $P(A)$ 与之对应，满足如下公理：

公理 1(非负性) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

公理 2(规范性) $P(\Omega) = 1$.

公理 3(可列可加性) 若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的定义，可以推出一些重要性质：

性质 1 $P(\varnothing) = 0$.

证明 因为 $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots \cup \cdots$，由公理 3 有

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots,$$

从而必有 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2(有限可加性) 对任意有限个两两互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证明 因为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$，因而

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots),$$

由公理 3 和性质 1 即得性质 2 成立.

性质 3 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明 因为 $A \cup \overline{A} = \Omega$，$A\overline{A} = \varnothing$，由公理 2 和性质 2 有

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

移项即得性质 3 成立.

性质 4 若 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$ 且 $P(A) \leqslant P(B)$.

证明 因为 $A \subset B$，则 $B = (B-A) \cup A$，显然 $(B-A)$ 与 A 互斥，故由性质 2 有

$$P(B) = P(B-A) + P(A), \quad 即 \quad P(B-A) = P(B) - P(A).$$

由公理 1，$P(B-A) \geqslant 0$，有 $P(A) \leqslant P(B)$.

性质 5 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

证明 因为 $A \cup B = A \cup (B-A)$，A 与 $(B-A)$ 互斥，又 $AB \subset B$，所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B-AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质 5 可以推广到任意有限个随机事件之和的情形，即对于任意有限个随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n}^{n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

请读者写出公式 $P(A \cup B \cup C) = ?$（答案见本节书后）

例 1-4 已知 $P(A) = 0.6$，$P(B) = 0.5$，$P(A \cup B) = 0.9$，求 (1) $P(AB)$；(2) $P(A-B)$；(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 (1) $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.9 = 0.2$；

(2) $P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB) = 0.6 - 0.2 = 0.4$；

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$.

1.2.3 古典概型

称具有下列两个特征的随机试验模型为**古典概型**.

(1) **有限性**. 随机试验只有有限个可能的结果；

(2) **等可能性**. 每一个结果发生的可能性大小相同.

古典概型又称为**等可能概型**. 在概率论的产生和发展过程中，它是最早的研究对象，且在实际中也是最常用的一种概率模型.

设古典概型的一个试验共有 n 个基本事件，而事件 A 包含 m 个基本事件. 注意到在一次试验中，恰好只有一个基本事件发生，且每个基本事件发生的可能性是等同的. 又事件 A 包含 m 个基本事件，意味着试验结果若是这 m 个基本事件中的某个基本事件，则事件 A 发生，于是事件 A 发生可能性的大小取决于它所包含的 m 个基本事件在所有 n 个基本事件中所占的比重，即事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

在古典概型的一个试验中，如何计算所有基本事件的个数？如何计算事件 A 包含基本事件的个数？考虑到基本事件是每次试验的一个可能结果，而每次试验的一个可能结果对应于完成试验要求的一种方法，所以所有基本事件的个数就是完成试验要求所有方法的种数，事件 A 包含基本事件的个数就是完成事件 A 方法的种数，它是完成试验要求所有方法种数的一部分.

若试验属于元素不重复的排列问题，则归结为计算排列数，如 n 个不同元素取 m 个 $(m<n)$ 按某种次序排成一列，则排列数为

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

若试验属于元素可重复的排列问题，则归结为计算元素可重复排列的个数，如 n 个不同元素可重复地取 m 个排列，这种可重复的排列数为

$$n^m=n\cdot n\cdot\cdots\cdot n.\quad(m\text{ 个 }n\text{ 相乘})$$

若试验属于组合问题，不必考虑次序，则归结为计算组合数，如 n 个不同元素取 m 个 $(m<n)$ 为一组，则组合数为

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}.$$

对于一般情况，则根据基本原理计算相应方法的种数.

例 1-5 口袋里装有 4 个黑球与 3 个白球，任取 3 个球，求：

(1) 其中恰好有 1 个黑球的概率；(2) 其中至少有 2 个黑球的概率.

解 从 7 个球中任取 3 个，共有 $n=C_7^3$ 种取法，即基本事件总数为 $n=C_7^3$.

(1) 设事件 A 表示任取 3 个球中恰好有 1 个黑球，完成事件 A 有 $C_4^1C_3^2$ 种取法，根据古典概型计算概率的公式，得到概率