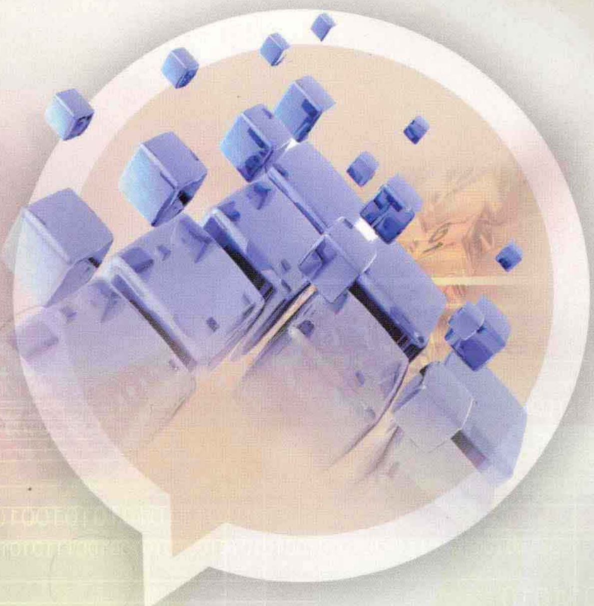
YUNCHOUXUE

Jiqi Yingyong

运筹学及其应用

刘瑞芹 主编



中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

运筹学及其应用

主　编　刘瑞芹
副主编　刘海生　张晓瑾　苗文静　葛世刚
参　编　王文祥　于　健
主　审　刘金铎

中国矿业大学出版社

内容提要

本书主要介绍了运筹学的一些主要分支的基本概念、基本理论和基本方法.其内容包括线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、图与网络分析、存贮论、排队论、决策论、对策论的基本概念、理论、方法和模型.在介绍理论和方法时,尽量结合生产管理的具体应用背景,深入浅出,从简单问题入手,逐步过渡到比较抽象和难度较高的概念和原理,从而使读者比较容易理解和掌握运筹学解决实际问题的基本原理和方法。各章后均附有习题,以帮助读者复习基本知识和检查学习效果.

本书可作为高等院校经济管理类和理工类本科生的教材,也可作为工程技术人员和经济管理人员的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

运筹学及其应用 / 刘瑞芹主编. —徐州:中国矿业大学出版社,2012.12

ISBN 978-7-5646-1734-9

Ⅰ.①运… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 287781 号

书　　名 运筹学及其应用
主　　编 刘瑞芹
责任编辑 史凤萍
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 淮安淮海印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 10.75　**字数** 268 千字
版次印次 2012 年 12 月第 1 版　2012 年 12 月第 1 次印刷
定　　价 32.00 元
(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前　　言

运筹学是20世纪30年代末期诞生并逐步发展起来的一门应用性学科，主要研究生产管理工作中存在的各种优化问题. 它是根据实际问题，利用科学的方法特别是数学方法，通过建立数学模型以及求解模型，对复杂系统、组织的内部行为结构等进行定量分析，探讨解决问题的思路、方法和途径，为系统结构的优化设计或组织行为的管理决策等提供科学依据. 作为一门重要的应用性学科，运筹学已广泛地应用于科学技术、社会、经济、军事、国防等诸多领域。运筹学已成为高等院校许多专业开设的一门必修课，在提高人才素质上起到了重要作用.

本书是为本科生编写的运筹学教材，书中尽量避免复杂的理论证明，注重介绍一些重要的数学思想和方法，力图通俗易懂，简明扼要；选材力求详略得当，从整体上讲，线性规划部分较详，其他内容较略；方法讲述较详，理论证明较略. 知识内容力求新颖，由于本课程系新兴学科，不少内容、方法在不断改进和完善，我们力求将其写入，以开阔读者视野；注重实用性，加强对实际背景的描述和在解决实际问题中的应用.

全书具体分工如下：绪论、第6章和第10章由苗文静编写；第1章和第2章由张晓瑾编写；第3章和第4章由葛世刚编写；第5章和第11章由刘海生编写；第7章由王文祥编写；第8章和第9章由刘瑞芹编写；于健编写了部分习题，参加录入和排版. 全书由刘金铎主审.

由于编者水平有限，书中有不妥或错误之处，恳请广大读者批准指正.

编者

2012年9月

目　录

绪　论

运筹学是近代应用数学的一个分支，主要是研究人类对各种广义资源的运用及筹划活动，其目的在于了解和发现这种运用及筹划活动的基本规律，并为决策者实现有效管理、正确决策提供科学依据.

1. 运筹学的定义

运筹学一词起源于 20 世纪 30 年代，在美国称为 Operations Research，在英国称为 Operational Research，简写为 O. R.，可直译为“运用研究”或“作业研究”. 中国学者把这门学科意译为“运筹学”，取自古语“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”，其意为运算筹划，出谋献策，以最佳策略取胜. 极为恰当地概括了这门学科的精髓.

根据《大英百科全书》释义，“运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学”；“运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”. 中国大百科全书的释义为：运筹学“用数学方法研究经济、民政和国防等部门在内外环境的约束条件下合理的分配人力、物力、财力等资源，使实际系统有效运行的技术科学，它可以用来预测发展趋势，制定行动规则或优选可行方案”.《辞海》(1979 年版)中有关运筹学条目的解释为：运筹学“主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达有关运用、筹划与管理方面的问题，它根据问题的要求，通过数学的分析与运算，作出综合性的合理安排，以达到较经济有效的使用人力物力”.《中国企业管理百科全书》(1984 年版)中的释义为：运筹学“应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人、财、物等有限资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理”. 除了这些以外，运筹学还有很多定义，综合这些释义可以将其总结为：“运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和方法，解决实际提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据”.

2. 运筹学的发展简史

(1) 朴素的运筹学思想. 在我国古代文献中就有不少记载，例如田忌赛马和丁渭主持皇宫的修复等事. 还有许多历史名将，如战国时的孙子、宋朝的岳飞、元朝的成吉思汗、明朝的刘基等，他们在不同的历史阶段的复杂斗争中，都有着十分丰富的运筹思想和指挥艺术，这些运筹思想对现在仍然有影响. 但这些古老的运筹思想主要是凭经验、靠主观判断，一般都是定性分析，计算工具也很原始，所以不能称之为科学. 运筹真正称之为科学还是近几十年的事.

(2) 运筹学的产生. 在阶级社会中，科学技术的发展往往受到战争的极大推动，许多新科学、新技术首先是由军事斗争的需要而产生和发展起来的. 运筹学也不例外，它的产生背景为第二次世界大战.

20 世纪 30 年代后期，英国军事管理部门召集了一批科学家，研究与防御有关的战略和战术问题，以便更有效的利用有限的军事资源，最成功地使用现有的武器装备.“运筹学”这个名称正式使用是在 1938 年，当时，英国为解决空袭的早期预警，作好反侵略战争准备，积极进行雷达的研究. 但随着雷达性能的改善和配置数量的增多，出现了来自不同雷达站的信息以及雷达站与整个防空作战系统的协调配合问题. 1938 年 7 月，波德塞(Bawdsey)雷达站

的负责人罗伊(A. P. Rowe)提出立即进行整个防空作战系统运行的研究,用“Operational Research”一词作为这方面研究的描述,这就是 O. R.(运筹学)这个名词的起源. 1940 年 9 月,英国成立了由物理学家 P. M. S. 布莱克特领导的第一个运筹学小组,成员有:三名生物学家、两名数学物理学家、一名天文学家、一名军官、一名测量员、一名普通物理学家和两名数学家. 由于人员组成的多专业性,所以有人称这个小组为“布莱克特马戏团”. 1942 年,美国和加拿大都相继建立了运筹学小组. 这些运筹学小组在确定护航舰队的规模、开展反潜艇战的侦察、组织有效的对敌轰炸等方面做了大量研究,为运筹学有关分支的建立作出了贡献. 这些早期的运筹学工作所使用的方法一般来说都极为浅显,但成效显著. 人们开始认识到,利用定量分析方法研究实际问题、建立模型等是行之有效地.

(3) 运筹学的发展. 第二次世界大战后运筹学作为一门技术被广泛应用于经济领域,并得到了很大的发展,它的发展大体上可分为三个阶段:

① 从 1945 年到 20 世纪 50 年代初,被称为创建时期. 此阶段的特点是人数不多,范围较小,出版物、学会等寥寥无几. 最早英国一些战时从事运筹学研究的人积极讨论如何将运筹学方法应用于民用部门,于 1948 年成立“运筹学俱乐部”,同年美国麻省理工学院把运筹学作为一门课程介绍,1950 年英国伯明翰大学正式开设运筹学课程,1952 年在美国喀斯(Case)大学设立了运筹学的硕士和博士学位. 第一本运筹学杂志《运筹学季刊》(*O. R. Quarterly*)于 1950 年在英国创刊,第一个运筹学学会——美国运筹学学会在 1952 年成立,并与同年出版《运筹学学报》(*Journal of ORSA*).

② 20 世纪 50 年代初期到 50 年代末期,被认为是运筹学的成长时期. 此阶段电子计算机技术迅速发展,使得运筹学中一些方法如单纯形法、动态规划等得以用来解决实际管理系统中的优化问题,促进了运筹学的推广应用. 1957 年在英国牛津大学召开了第一次国际运筹学会议,以后每 3 年举行一次. 1959 年成立国际运筹学联合会(International Federation of Operations Research Societies, IFORS).

③ 自 20 世纪 60 年代以来,是运筹学开始普及和迅速发展的时期. 这个阶段运筹学进一步细分为各个分支,专业学术团体迅速增多,创办了更多的期刊,大量的运筹学书籍出版,有越来越多的学校把运筹学课程纳入教学计划之中. 第三代电子数字计算机的出现,促使运筹学得以更迅速的发展.

中国的第一个运筹学研究小组是在钱学森、许国志先生的推动下于 1956 年在中国科学院力学研究所成立的. 1957 年开始应用于建筑业和纺织业,1958 年开始在交通运输、工业、农业、水利建设、邮电等方面使用,尤其是在运输方面应用较广泛,从物资调运、装卸到调度等等. 1958 年,成立了专门的运筹学研究室,由于在应用单纯形法解决粮食的合理运输问题时遇到了困难,我国运筹学工作者于是创立了运输问题的“表上作业法”. 我国于 1982 年加入 IFORS,并于 1999 年 8 月组织了第 15 届国际运筹学联合会.

国际上著名的运筹学刊物有:*Management Science*, *Operations Research*, *Journal of Operational Research Society*, *European Journal of Operations Research* 等. 国内运筹学的刊物或较多刊登运筹学理论和应用的刊物主要有:《运筹学学报》,《运筹与管理》,《系统工程学报》,《系统工程理论与实践》,《系统工程理论方法应用》,《数量经济技术经济研究》,《预测》,《系统工程》,《系统科学与数学》,等等.

3. 运筹学研究的基本特征

运筹学研究的基本特征主要有三点：

(1) 系统的整体性：即总体的最优化或系统优化. 所谓系统可以理解是由相互关联、相互制约、相互作用的一些部分组成的具有某种功能的有机整体. 运筹学不是对每一个决策行为孤立地进行评价，而是把它同系统内所有其他重要的相互作用结合起来做出评价，把相互影响的各方面作为一个统一体，从总体利益的观点出发，寻找出一个优化协调的方案.

(2) 多学科的综合：运筹学采用数学方法进行分析，因此涉及数学的许多分支；运筹学的方法又程序化，重复与循环多，运用计算机求解十分有利，因此，它又涉及计算机科学、管理学、组织学、心理学、经济学等学科. 这种多学科的协调配合在分析和确定问题的主要方面，在选定和探索解决问题的途径时，都显得特别重要.

(3) 模型方法的应用：即模型化，以各种模型为研究手段. 运筹学的模型呈现多样性，有离散型与连续型模型、确定型模型与随机型模型、静态模型与动态模型，还有参数型模型等. 学习运筹学要掌握的重要技巧就是提高对运筹学数学模型的表达，运算和分析的能力.

4. 运筹学研究问题的方法步骤

运筹学作为一门用来解决实际问题的学科，在处理千差万别的各种问题时，一般有以下几个步骤：

(1) 提出并形成问题. 任何决策问题进行定量分析前，先必须认真地进行定性分析. 首先需要提出问题，明确问题的实质及关键所在，这就要求对系统进行深入的调查和分析，确定问题的界限，选准问题的目标.

(2) 建立模型. 模型是对现实世界的事物、现象、过程和系统的简化描述，或其部分属性的模仿，是对实际问题的抽象概括和严格逻辑表达. 模型表达了问题中可控的决策变量，不可控的决策变量，工艺技术条件及目标有效度量之间的相互关系. 模型的正确建立是运筹学研究中的关键一步，对模型的研究是一项艺术，它是将实际问题、经验、科学方面三者有机结合的创造性工作. 建立模型的好处，是使问题的描述高度规范化，掌握其本质规律.

(3) 分析并求解模型. 即用数学方法或其他工具对模型求解，根据问题的要求和所建模型的性质及其数学特征，选择适当的求解方法，可分别求出最优解，次最优解或满意解；依据对解的精度的要求及算法上实现的可能性，又可区分为精确解和近似解.

(4) 检验并评价模型. 模型分析和计算得到结果以后，尚需按照它能否解决实际问题，是否达成目标的情况，选择合适的标准，并通过一定的方法，例如灵敏度分析法、相关分析法等，对模型结构和一些基本参数进行评价，以检验它们是否准确无误，否则就要考虑改换或修正模型，增减计算过程中所用到的资料或数据.

(5) 应用或实施模型的解. 经过反复检查以后，最终应用或实施模型的解，就是供给决策者一套有科学依据的并为解决问题所需要的数据、信息或方案，以辅助决策者在处理问题时作出正确的决策和行动方案.

上述步骤往往需要交叉反复进行.

5. 运筹学的主要内容

运筹学按所解决问题性质的差别，将实际的问题归结为不同类型的数学模型. 这些不同类型的数学模型构成了运筹学的各个分支. 主要分支有：

(1) 规划论. 包括线性规划、整数规划、非线性规划、目标规划、动态规划. 其中线性规划

是解决经营管理中如何有效地利用现有人力、物力完成更多的任务.通过分析、建模得到一个线性不等式或等式的限制条件下,使某一个线性目标取得最大(或最小)的问题.整数规划是一类特殊的线性规划,它是在线性规划模型中,一部分或全部变量都要求为整数,最具代表性的解决整数规划的方法是割平面法和分枝定界法,它们的共同特点是能化为多次线性规划问题求解.如果线性规划模型中目标函数或约束条件不全是线性的,对这类模型的研究构成非线性规划分支.由于大多数工程物理量的表达式是非线性的,因此非线性规划在各类工程的优化设计中得到较多应用,是优化设计的有力工具.目标规划是研究单目标或多个目标,允许有偏差变量的规划问题的理论和方法.动态规划也是运筹学的一个非常重要的分支.它是研究多阶段决策过程的最优化问题.

(2) 图与网路分析.运筹学中很多问题可以化为图来求解,把一些研究的对象用节点表示,对象之间的联系用连线(边)表示,用点、边的集合构成图.然后利用图论方法来研究各类网络结构和流量的优化分析.

(3) 存贮论,是一种研究最优存贮策略的理论和方法.它研究在各种不同情况下的库存问题,形成数学模型,选择合理策略,使各项总费用最小.

(4) 排队论.排队论又称为随机服务系统.它是研究系统拥挤现象和排队现象的一门学科.排队论研究顾客不同输入、各类服务时间的分布、不同服务员数及不同排队规则情况下,排队系统的工作性能和状态,为设计新的排队系统及改进现有系统的性能提供数量依据.

(5) 决策论.在一个管理系统中,采用不同的策略会得到不同的结局和效果.由于系统状态和决策准则的差别,对效果的度量和决策的选择也有差异.决策论通过对系统状态的性质、采取的策略及效果的度量进行综合研究,以便确定决策准则,并选择最优的决策方案.

(6) 对策论.也称为博弈论,用于研究具有对抗局势的模型.研究的主要对象是带有斗争行为的现象,在政治、军事、工业、农业、交通等许多领域有着广泛的应用.

1　线性规划与单纯形法

线性规划是运筹学中发展最早、理论与方法最完善的一个分支，它主要解决两类问题：

第一，给定人力、物力等资源，要求使之产生最大效益；

第二，给定任务，要求以最小代价实现.

1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　问题的提出

例 1　某公司计划生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，需要在 A、B、C 三台设备上进行加工. 已知在计划期内，A、B、C 三台设备可用工时分别为 6 h，8 h 和 15 h，Ⅰ、Ⅱ两种产品的市场价格和制作工艺资料见表 1-1，试问在计划期内，公司应如何安排生产计划才能获利最大.

表 1-1

设备 \ 产品	Ⅰ	Ⅱ	可用工时(h)
设备 A	1	1	6
设备 B	1	2	8
设备 C	0	5	15
利润/(万元/件)	1	4	

解　第一步：选取决策变量.

设计划期内公司生产Ⅰ产品 x_1 件、Ⅱ产品 x_2 件，x_1 和 x_2 称为决策变量.

第二步：建立目标函数.

公司计划期内可获得利润为 $z=x_1+4x_2$ 万元，公司的目标要求获得的利润为最大，即求 $\max z$.

第三步：确定约束条件.

目标函数中的决策变量 x_1、x_2 不能任意取值，x_1、x_2 的取值受到设备 A、B、C 可用工时的限制.

根据所给条件，在计划期内设备 A 可用工时不超过 6 h，即

$$x_1+x_2\leqslant 6$$

同理，设备 B、C 也有类似的不等式 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 和 $5x_2\leqslant 15$.

显然还有 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$.

于是得到问题的数学模型为：

目标函数　　$$\max z=x_1+4x_2$$

约束条件　　$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 6 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 5x_2\leqslant 15 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的数学模型

通过上面的例子可以看出,线性规划模型具有以下三个特征:

(1) 存在着决策者能够控制的一组决策变量,通常记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 对决策变量的每一组取值 $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ 代表了一种具体的决策方案.

(2) 决策变量的取值要受到某些条件的限制,这些条件称为约束条件. 可以用一组线性等式或不等式来表示.

(3) 有决策者要追求的一个目标,这个目标是关于决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性函数,称为目标函数. 要求这个目标函数在满足约束条件下实现最大化或最小化.

一般地,线性规划问题的数学模型为:

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant(\leqslant,=)b_1 & (1\text{-}1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant(\leqslant,=)b_2 & (1\text{-}2)\\ \quad\vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant(\leqslant,=)b_m & (1\text{-}3)\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 & (1\text{-}4)\end{cases}$$

其中 s. t. 是 subject to 的英文缩写,它表示"假定","满足"之意. 式(1-1)～(1-3)称为约束条件;式(1-4)称为非负约束条件;$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 称为价值系数;$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 称为资源限量;$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为技术系数或工艺系数,表示变量 x_j 取值为一个单位时所消耗或含有的第 i 种资源的数量.

上述模型的简写形式为:

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant(\leqslant,=)b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

用向量形式表达时,上述模型可写为:

$$\max(\min)\ z=\boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j\geqslant(\leqslant,=)\boldsymbol{b}\\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$.

用矩阵形式来表示为:

$$\max(\min)\ z=\boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant(\geqslant,=)\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,称为约束方程组(约束条件)的系数矩阵.

注意:变量 x_j 的取值一般为非负,即 $x_j \geqslant 0$;从数学意义上可以有 $x_j \leqslant 0$;又如果变量 x_j 表示第 j 种产品本期内产量相对于前期产量的增加值,则 x_j 的取值范围为 $(-\infty, +\infty)$,称 x_j 取值不受约束,或称 x_j 无约束.

1.2　图解法

本节介绍用图解法求解线性规划问题,虽然它只适用于求解两个决策变量的线性规划问题,但是由此得出的一些重要结论对于多个决策变量的线性规划问题也是成立的.

图解法的步骤概括为:在平面上建立直角坐标系;图示约束条件,确定可行域;图示目标函数和确定最优解.下面通过例 1 来具体说明方法.

例 2　求解线性规则问题

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ \qquad 5x_2 \leqslant 15 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-5}$$

解　第一步:以变量 x_1 为横坐标轴,x_2 为纵坐标轴画出直角坐标系,并适当选取单位坐标长度,见图 1-1.

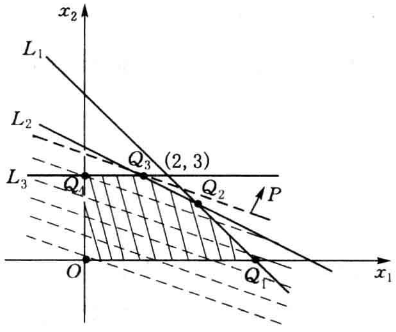


图 1-1

第二步:图示约束条件,确定可行域.

该模型中有三个约束条件,均为不等式,每个约束条件都代表一个半平面.如约束条件 $x_1+x_2\leqslant 6$,先取 $x_1+x_2=6$,在坐标系中画出这条直线并记为 L_1.而满足 $x_1+x_2<6$ 的点都在直线 L_1 的左下方半平面内($x_1+x_2>6$ 的点都在直线 L_1 的右上方半平面内),故约束条件 $x_1+x_2\leqslant 6$ 表示落在直线 L_1 上的和 L_1 左下方半平面内的所有的点.同理,满足约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 的所有点位于直线 L_2:$x_1+2x_2=8$ 上以及 L_2 的左下方半平面内;满足约束条件 $5x_2\leqslant 15$ 的点位于直线 L_3:$5x_2=15$ 上以及 L_3 下方半平面内.满足非负约束条件 $x_1, x_2\geqslant 0$ 的点分别为坐标平面的上半平面的点和坐标平面右半平面的点.

在线性规划问题中,将满足所有约束条件的点构成的集合,称为线性规划问题的可行域.本例中,满足式(1-5)中所有约束条件的点位于多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 内及其边界上(图 1-1),即多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 内及其边界上的所有点构成此线性规划问题的可行域.

从图 1-1 可知:多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 的可行域是凸的.后面我们要证明,如果线性规划问题存在可行域,则可行域一定是一个凸集.

第三步:图示目标函数.

对于给定的 z，$x_1+4x_2=z$ 表示平面上斜率为 $\left(-\frac{1}{4}\right)$ 的一条直线，该直线称为目标函数的等值线. 如果把 z 看做参数，则 $x_1+4x_2=z$ 表示斜率为 $\left(-\frac{1}{4}\right)$ 的一簇平行的目标函数的等值线.

第四步：最优解的确定.

从图 1-1 不难看出，随着 z 值的增大，目标函数的等值线 $z=x_1+4x_2$ 沿向量 $\boldsymbol{P}$ 的方向平行移动；反之，随着 z 值的减小，目标函数的等值线沿与向量 $\boldsymbol{P}$ 相反方向平行移动. 现在要求目标函数取得最大值，因此一方面要使 z 的值尽可能的增大，另一方面又要使等值线与可行域相交. 所以切点 Q_3 就是所求最优解的点. 故最优解 $\boldsymbol{X}^*=(2,3)^{\mathrm{T}}$，最优值 $z^*=14$. 即该公司计划生产Ⅰ产品 2 件，Ⅱ产品 3 件，能获得最大利润 14 万元.

例 3 解线性规划问题

$$\max z=x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 6 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_2\leqslant 2 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 如图 1-2. 分别作出问题的可行域和目标函数的等值线 $z=x_1+2x_2$. 注意到目标函数的等值线恰好与可行域一条边 Q_1Q_2 平行，故与可行域不是在一个点上相切而是在 Q_1Q_2 线段上相切. 点 Q_1、点 Q_2 以及 Q_1Q_2 所在线段上所有点都能使目标函数达到最大值，该问题有无穷多最优解.

例 4 求解下列线性规划问题

$$\max z=x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2\geqslant 2 \\ x_1-x_2\geqslant -1 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 如图 1-3. 可行域是一个无界的不封闭区域. 不难发现，随着 z 值的增大，目标函数的等值线逐渐沿图中向量 $\boldsymbol{P}$ 方向移动，始终与可行域相交，故目标函数无最大值，此线性规划问题无最优解.

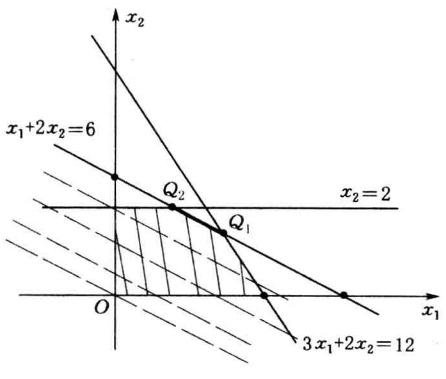


图 1-2

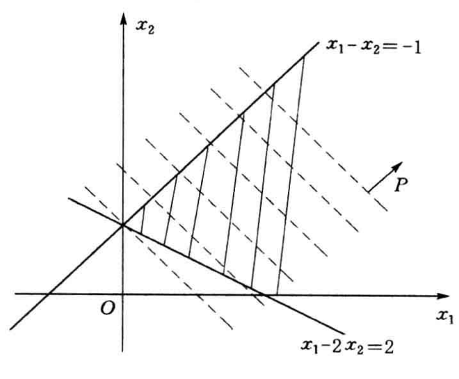


图 1-3

注意：并非无界的可行域一定是无最优解. 若本题改为目标函数最小化：$\min\ z=x_1+x_2$，则目标函数的等值线将沿 z 值减小的方向（与向量 $\boldsymbol{P}$ 相反的方向）移动. 则可得到最优解 $\boldsymbol{X}^*=(0,2)^{\mathrm{T}}$，最优值 $z^*=2$.

例 5 讨论下列线性规划问题的解.

$$\max\ z=2x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+\ x_2\leqslant 2\\2x_1+2x_2\geqslant 6\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 如图 1-4，由于约束条件 $x_1+x_2\leqslant 2$ 和 $2x_1+2x_2\geqslant 6$ 对应的这两个半平面没有公共的区域（可行域为空）. 故此线性规划问题无可行解，从而无最优解.

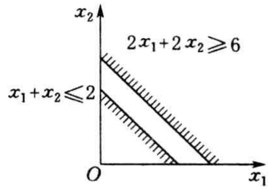


图 1-4

综上可知，线性规划问题的解的情况有四种：唯一最优解、无穷多个最优解、无界解（也称无最优解）和无可行解（无解）.

从上述的分析讨论中，可以得到以下关于两个决策变量的线性规划问题可行域与解之间的性质：

若线性规划问题有最优解（不论可行域是有界还是无界），其最优解必可以在可行域某个顶点上达到. 最优解的个数或唯一或有无穷多个.

注意：实际上，上面的性质对多个决策变量的线性规划问题也是成立的.

1.3 线性规划问题的标准型及其解的概念

1.3.1 线性规划问题的标准型

由于线性规划问题的数学模型有多种不同的形式，不便于寻找求解线性规划问题的一般性的方法，因此有必要给出一种统一的格式，就是线性规划问题的标准型. 它有四个特点：

(1) 目标函数为 max，这一形式不是必要的，也可以规定为 min 型；

(2) 所有约束条件全为“＝”；

(3) 约束条件右端常数项全为非负值；

(4) 对每一个决策变量取值非负.

于是，线性规划问题的标准型为：

$$\max\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}$$

简写为：

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_m\geqslant 0$.

1.3.2 化非标准的线性规划模型为标准型

对不符合标准型的线性规划模型,可分别化为标准型:

(1) 目标函数为 min,即 $\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$.

令 $z'=-z$,得 $\max z'=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$. $\max z'$ 与 $\min z$ 具有相同的最优解,最优值相反.

(2) 约束条件是不等式.

对"$\leqslant$"型,在该不等式的左边加上一个新非负变量,称为松弛变量,将不等式改为等式.如:$x_1+2x_2\leqslant 8\Rightarrow x_1+2x_2+x_3=8$.

对"$\geqslant$"型,在该不等式的左边减去一个新非负变量,称为剩余变量,将不等式改为等式.如:$2x_1-3x_2-4x_3\geqslant 8\Rightarrow 2x_1-3x_2-4x_3-x_4=8$.

松弛变量和剩余变量统称为松弛变量.

(3) 约束条件的右端项 $b_j<0$.

在约束条件两端同乘以(-1),则约束条件右端项必大于零.

(4) 决策变量 x_k 无约束,即 x_k 可能为正、负或为零.

令两个新的变量 $x_k'\geqslant 0,x_k''\geqslant 0$,作 $x_k=x_k'-x_k''$.

(5) 决策变量 $x_j<0$.

令 $x_j'=-x_j$,则 $x_j'\geqslant 0$.

例 6 将下列线性规划问题化为标准型

$$\min z=x_1+2x_2+x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3\leqslant 4\\ -3x_1+x_2+2x_3\geqslant 4\\ 4x_1-2x_2-3x_3=-6\\ x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 无约束}\end{cases}$$

解 令 $z'=-z,x_1'=-x_1,x_3=x_3'-x_3''$,其中 $x_3',x_3''\geqslant 0$,并添加松弛变量 $x_4\geqslant 0$ 和剩余变量 $x_5\geqslant 0$,可得标准型

$$\max z'=x_1'-2x_2-x_3'+x_3''$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1'+x_2+x_3'-x_3''+x_4=4\\ 3x_1'+x_2+2(x_3'-x_3'')-x_5=4\\ 4x_1'+2x_2+3(x_3'-x_3'')=6\\ x_1',x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

1.3.3 线性规划问题解的概念

设线性规划问题为标准型

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\qquad\begin{matrix}(1\text{-}6)\\(1\text{-}7)\end{matrix}$$

求解线性规划问题,就是从满足约束条件的所有解中找出一个解,使目标函数达到最大值.

(1) 可行解.满足约束条件(1-6)和(1-7)的解,称为线性规划问题的可行解.全体可行解的集合,称为线性规划问题的可行域.

(2) 最优解.使目标函数达到最大值的可行解,称为线性规划问题的最优解.

(3) 基.设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 是约束方程组的系数矩阵($m<n$),其秩为 m.若 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m\times m$ 的满秩子矩阵,则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基.不失一般性,设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{B}$ 中的每一个列向量 $\boldsymbol{P}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基向量,与基向量 $\boldsymbol{P}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 对应的变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基变量.线性规划中除基变量以外的变量称为非基变量.

(4) 基解.在约束方程组(1-6)中,令所有的非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$,则约束方程组变为以 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为变量的 m 元线性方程组,其系数矩阵为 $\boldsymbol{B}$.因为 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$,根据克莱姆法则,可解出唯一解 $\boldsymbol{X_B}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$.将这个解加上非基变量取 0 的值有 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,称 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题关于基 $\boldsymbol{B}$ 的基解.

注意:① 在基解中,非零分量的个数不大于基变量个数 m;② 线性规划问题的基和基解一一对应.线性规划问题基的个数不超过 C_n^m 个,故基解的总数不超过 C_n^m 个;③ 如果非零分量的个数小于 m,也就是存在取值为 0 的基变量,则称该基解为退化的基解.

(5) 基可行解.满足变量非负约束条件(1-7)的基解,称为基可行解.

(6) 可行基.对应于基可行解的基,称为可行基.当基可行解是最优解时,它所对应的可行基称为最优基.

例 7 找出下列线性规划问题的全部基解,指出其中的基可行解并确定最优解.

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ \qquad 5x_2 \leqslant 15 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 约束方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4,\boldsymbol{P}_5)$$

$\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子矩阵有 $C_5^3=10$ 个,其中有 1 个不是基.故可列表得到线性规划问题的全部基解,见表 1-2.